

5 LE SCALE DELLA TURBOLENZA

Il moto dei fluidi ad elevato numero di Reynolds (come l'aria nel *PBL*) è caratterizzato da una variazione del tutto irregolare delle caratteristiche fisiche e chimiche del fluido stesso in ogni punto dello spazio e ad ogni istante. Questo stato di cose viene normalmente indicato come *turbolenza completamente sviluppata*. E questa è normalmente la situazione che incontriamo nel *PBL*. Se ci limitassimo a considerare il solo campo di velocità (analoghi ragionamenti potremmo farli anche per le altre grandezze fisiche) ed introducessimo il concetto di velocità media (per esempio, mediando punto a punto su intervalli temporali sufficientemente lunghi ed ammettendo che il processo sia ergodico), vedremmo che le variazioni spaziali e temporali del campo di moto verrebbero fortemente attenuate dal processo di mediazione, evidenziando un valor medio variabile lentamente e con regolarità nello spazio e nel tempo. Ovviamente, sottraendo punto a punto il campo medio dal campo istantaneo, otteniamo la parte fluttuante del campo di velocità che, viceversa, è fortemente irregolare. In sostanza, il moto complessivo dell'aria può essere visto come il moto di un insieme numerosissimo di porzioni di fluido tra di loro logicamente e fisicamente separate in cui è presente una sorta di regolarità di moto. Queste strutture parzialmente coerenti in cui si può scomporre il fluido in moto prendono il nome di *disturbi* (questo è il termine usato da Monin e Yaglom) o *eddy* (termine usato in tutta la Letteratura anglosassone) o *vortici*. La definizione data non è molto quantitativa, ma il concetto di *eddy* elude una definizione precisa.

In questo Capitolo esaminiamo più nel dettaglio queste irregolarità che appaiono, almeno qualitativamente, come la sovrapposizione di *disturbi* di differente *dimensione (scala)*, dove col termine *dimensione* intendiamo l'ordine di grandezza della distanza entro cui la velocità varia apprezzabilmente. Vedremo che le dimensioni di tali disturbi variano in un intervallo estremamente ampio, coprendo parecchie decadi: i più grandi hanno dimensioni dell'ordine di grandezza della regione in cui si sviluppa il campo di moto ed i più piccoli sono talmente piccoli da essere aggrediti dalle forze viscosi e da essere dissipati in calore. L'obiettivo che cercheremo di perseguire è quello di individuare una *parentela energetica* tra i disturbi di dimensione differente e di giungere a delle relazioni quantitative utili alla descrizione delle proprietà statistiche del *PBL*.

Dato che le basi teoriche del moto dei fluidi sono state completamente esposte in precedenza e finora non è emerso nulla di utile allo scopo, risulta naturale che per poter fare qualche passo in avanti in questa direzione è necessario proporre (e verificare) delle ipotesi *ad hoc*. E' ciò che Kolmogorov ha fatto negli anni '40 con successo, consegnandoci una teoria semiempirica affascinante ed elegante, oltre che di estrema utilità pratica. L'esposizione che segue si basa pesantemente sulla bellissima trattazione di Monin e Yaglom (2007b) e su alcune pagine di rara chiarezza, incisività e completezza di Landau e Lifshitz (1987).

5.1 PREMESSA CONCETTUALE

Al Cap. 3 abbiamo introdotto il concetto di isotropia nella descrizione dei campi stocastici e abbiamo toccato con mano il fatto che un campo dotato di tale proprietà è estremamente semplice da trattare. Ma abbiamo anche visto che la turbolenza isotropa è, di per sé, un'idealizzazione matematica che ha ben poche affinità con i moti reali incontrati negli esperimenti di laboratorio o nel *PBL*. Ciò nonostante, è ragionevole supporre (ed è intuitivo fare ciò) che i disturbi del moto a scale sufficientemente piccole, presenti nei moti ad alto numero di Reynolds Re in piccole regioni dello spazio ed osservati per intervalli di piccola durata, siano praticamente omogenei ed isotropi. Se ciò fosse vero, potremmo pensare che almeno questi piccoli vortici siano facilmente

descrivibili proprio impiegando la teoria della turbolenza isotropa.

L'ipotesi che i disturbi a piccola scala in un fluido ad alto numero di Reynolds siano approssimativamente isotropi ha origine da un'intuizione di Rhichardson (1922) ed ipotizza che la turbolenza sviluppata consista di un insieme di disturbi disordinati (*eddies*) che differiscono tra loro per dimensione spaziale e velocità di scala. Se partiamo ipoteticamente da un fluido in moto laminare caratterizzato da una lunghezza di scala L e da una velocità di scala U , ed aumentiamo gradualmente Re (per esempio aumentando U), vediamo che il moto del fluido progressivamente diventa turbolento e che i disturbi di differenti dimensioni (*ordini*) non compaiono simultaneamente. Quando $Re = UL/\nu$ supera il valore critico Re_c , notiamo che i disturbi a grande scala (*disturbi del primo ordine*) sono i primi ad apparire. Essi sono instabili e generano a loro volta disturbi del secondo ordine, di dimensione caratteristica inferiore, che estraggono energia dai primi, quelli a grande scala. Mentre i disturbi del primo ordine occupano grosse regioni del fluido, quelli del secondo ordine occupano regioni più limitate. I disturbi del secondo ordine, anch'essi instabili, generano, poi, disturbi del terzo ordine di dimensione ancora inferiore, che traggono la propria energia dai disturbi del secondo ordine, e così via in una progressione apparentemente inarrestabile. Così si stabilisce una *gerarchia* in cui ogni disturbo trae la propria energia dai disturbi a scala immediatamente superiore e trasferisce la propria energia ai disturbi a scala immediatamente inferiore. I disturbi a scala più piccola evidentemente sono anche caratterizzati da valori più elevati dei gradienti di velocità e ciò comporta che siano più vulnerabili alle forze viscosse che ne dissipano l'energia cinetica in calore. In sostanza, la nostra visione del moto del fluido in condizioni di turbolenza sviluppata può essere sintetizzato qualitativamente nel modo seguente:

- pur nell'apparente disordine che regna nel fluido in moto, individuiamo sicuramente un moto medio, facilmente ottenibile dal campo che osserviamo mediando punto a punto la velocità per tempi sufficientemente lunghi, superiori al tempo caratteristico del fluido dato da $T_0 = L/U$. Tale moto medio presenta una notevole regolarità e le variazioni di velocità saranno significative solo su distanze dell'ordine di L ;
- sovrapposte al moto medio, notiamo la presenza nel fluido di zone caratterizzate da disturbi di diversa dimensione caratteristica che possono essere visualizzati come regioni del fluido che possiedono un elevato grado di coerenza. Queste zone hanno le dimensioni più varie: alcune hanno dimensioni paragonabili a quelle del dominio in cui si muove il fluido (e derivanti proprio dalla sua non omogeneità), altre decisamente più piccole. Ognuno di questi disturbi è, sostanzialmente, un mondo a sé, deriva dalla frammentazione dei disturbi a scala superiore da cui ha acquisito la propria energia cinetica, perde progressivamente la *memoria* del moto medio originale del fluido e tende ad assumere delle configurazioni sostanzialmente isotrope.

Consideriamo questa *cascata energetica* in maggior dettaglio. I disturbi a scala maggiore in un fluido turbolento hanno una lunghezza di scala l_1 (detta anche *scala fondamentale* o *scala esterna*) che è dello stesso ordine di grandezza della scala L caratteristica dell'intero moto medio del fluido. Sia l_1 che L possono essere definite in modi leggermente differenti dai vari Autori, ma ciò che conta veramente è che $l_1 < L$. I disturbi a scala maggiore hanno ampiezza maggiore e la loro velocità caratteristica v_1 è dello stesso ordine di grandezza della variazione Δu che presenta il moto medio dell'atmosfera su distanze dell'ordine di L . Per fissare le idee, v_1 è dell'ordine di grandezza di σ_u , la deviazione standard del vento medio. I disturbi a scala maggiore traggono, poi, la propria energia direttamente dal moto medio (in particolare, dallo *shear* del campo di moto medio) e ciò influenza inequivocabilmente le loro caratteristiche: i disturbi di scala maggiore sono sicuramente non omogenei e anisotropi.

Ai vortici di maggior dimensione presenti nel *PBL* si può attribuire un numero di Reynolds definito come:

$$Re_1 = v_1 l_1 / \nu \quad [5.1]$$

che normalmente è di molto inferiore a Re , visto che $l_1 < L$ e $v_1 < \Delta u < U$, ma è comunque elevato e ciò fa sì che la loro principale caratteristica sia l'instabilità. Ciò comporta che essi si frammentino naturalmente, generando moti turbolenti più piccoli caratterizzati da una lunghezza di scala $l_2 < l_1$ e da una velocità di scala $v_2 < v_1$ e quindi da un numero di Reynolds $Re_2 < Re_1$, ma ancora elevato e superiore al valore critico. Perciò questi moti secondari saranno a loro volta instabili e si frammenteranno, producendo disturbi di dimensione l_3 ancora più piccola con velocità di scala v_3 ancora inferiore e così via.

Questo processo di continua frammentazione spontanea termina dopo N step, quando la lunghezza dei disturbi di dimensione inferiore l_N , raggiunge un valore η che nel seguito individueremo, e la relativa velocità di scala v_N fanno sì che il numero di Reynolds Re_N tipico del disturbo sia dell'ordine dell'unità (o più precisamente dell'ordine del numero di Reynolds critico Re_c). Il moto ad una tale scala è idrodinamicamente stabile e, di fatto, tali disturbi non possono più frammentarsi; tuttavia, il fatto che essi siano caratterizzati da un Re così piccolo, fa sì che la viscosità diventi una forzante esterna importante. Infatti, l'energia che essi possiedono è totalmente dedicata a contrastare le forze viscosse e quindi è convertita in calore, mentre lo stesso non avviene per i disturbi a scala maggiore di η (e quindi con Re maggiori), che non vengono apprezzabilmente influenzati dalla viscosità. Il processo di frammentazione continua, da disturbi a scala maggiore a quelli a scala inferiore fino ad arrestarsi a quelli alla scala di η , richiede un continuo flusso di energia lungo tutto lo spettro dimensionale. A questo punto è evidente che la turbolenza sviluppata può essere mantenuta attiva solo con un apporto continuo di energia dall'esterno (dal moto medio), visto che essa è accompagnata da una continua dissipazione di energia cinetica in calore.

Oltre alla *lunghezza di scala* l_n e v_n del disturbo di ordine n , è possibile definire anche un *tempo caratteristico di scala* τ_n pari a $\tau_n = l_n/v_n$. A tale parametro può essere attribuito il significato di intervallo temporale entro cui il disturbo mantiene una propria identità prima di evolvere (mutare) in strutture differenti.

Un altro elemento da tener presente è il fatto che il trasferimento di energia dalle scale maggiori a quelle minori è un processo di natura stocastica e, per questo, l'effetto dell'anisotropia, della non omogeneità e della non stazionarietà del moto medio progressivamente diminuirà con la diminuzione della scala dei disturbi. Infatti, un ruolo importante del trasferimento di energia dalla scala l_n alla scala l_{n+1} è giocato dalle fluttuazioni di pressione prodotte come risultato della disomogeneità del campo di velocità della scala l_n , conducendo all'apparizione di fluttuazioni di pressione alla scala l_{n+1} non solo nella direzione in cui era polarizzato il campo di moto originale, ma anche in tutte le altre direzioni. Le fluttuazioni di pressione influenzano, così, la ridistribuzione dell'energia cinetica del moto originale lungo tutte le possibili direzioni. In pratica è decisamente plausibile che l'effetto della direzionalità sia concentrato prevalentemente nei disturbi di ordine inferiore (e di maggiori dimensioni) e praticamente assente nei disturbi di ordine superiore. In modo analogo, le variazioni spaziali della velocità \mathbf{u} del moto medio (ottenuto mediando su tempi dell'ordine di $T_0 = L/U$ il campo di moto istantaneo \mathbf{U}), che caratterizzano la disomogeneità del moto, saranno importanti solo a distanze dell'ordine di $L \sim l_1$, dove sono dell'ordine di $\Delta \mathbf{u} \sim v_1$, ma a distanze inferiori non influenzano le fluttuazioni a piccola scala che risulteranno in pratica statisticamente omogenee.

D'altro canto, è decisamente probabile che al diminuire di l_n (e quindi anche di Re_n) diminuisca anche il tempo di scala $\tau_n = l_n/v_n$. Di conseguenza T_0 , la scala temporale caratteristica del moto medio e della sua non stazionarietà (cioè della variazione della velocità media \mathbf{u}), è decisamente superiore a τ_n , per n non troppo piccolo. Il moto medio è la forzante energetica dell'intera cascata di vortici e, a tutti gli effetti, può essere considerata quasi-stazionaria (visto l'elevato valore del proprio tempo caratteristico). Pertanto, se la forzante energetica dell'intera cascata è stazionaria, le caratteristiche statistiche dei vari vortici lo saranno anch'essi.

Alla luce di tutto ciò, si giunge in modo naturale alla conclusione che, per il moto di un fluido ad elevato numero di Reynolds, lo stato statistico dei disturbi (eddy) a piccola scala (cioè con lunghezza di scala molto inferiore a $L \sim l_l$ e con tempi di scala piccoli, se paragonati a $T_0 = L/U$) confinati in regioni dello spazio-tempo sufficientemente piccole saranno praticamente omogenei, stazionari ed isotropi. Queste conclusioni, già insite nei ragionamenti di Richardson, sono state esplicitamente formulate da Kolmogorov nel 1941.

5.2 LA TURBOLENZA LOCALMENTE ISOTROPA

Il moto di un fluido è complessivamente descritto dal campo di velocità istantanea $\mathbf{U}(\mathbf{x},t)$, dove la dipendenza dal tempo può essere trascurata per i ragionamenti precedenti. Quello che intendiamo fare è studiare il moto dei vari disturbi che in esso si originano e, per fare ciò, è necessario che essi emergano in qualche modo dal campo di moto generale. In sostanza, vogliamo *filtrare* il campo di moto con un filtro ideale che evidenzia, di volta in volta, i disturbi di lunghezza caratteristica voluta. Dato che tali disturbi non sono a priori periodici, l'analisi armonica non è lo strumento più appropriato. E' quindi opportuno seguire l'idea di Kolmogorov (1941) e semplicemente sottrarre punto a punto dal campo di velocità $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ il campo medio di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ottenendo il campo delle fluttuazioni $\mathbf{u}' = \mathbf{U}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})$ che non è più esplicitamente dipendente dal moto medio del fluido. Fatto ciò, è importante convincerci che le proprietà a piccola scala della turbolenza si riflettono solo nel *moto relativo* delle particelle di fluido che appartengono al disturbo in piccole regioni dello spazio e per tempi brevi. Dato che un disturbo è una porzione di fluido che possiede una certa coerenza, tale coerenza si riflette nel fatto che le velocità relative delle particelle che lo compongono possiedono una certa *parentela*.

Premesso ciò, consideriamo ora una piccola regione G dello spazio-tempo e un dato *punto centrale* $P_0 = (\mathbf{x}_0, t_0)$ (del tutto arbitrario, ma interno al disturbo che vogliamo studiare). Possiamo allora definire un sistema di assi cartesiani che si muove secondo la velocità media $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0)$ del fluido, orientato in maniera del tutto arbitraria. Il passaggio ad un tale sistema di riferimento comporta che le coordinate usuali $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ed il tempo t siano sostituite da:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) \cdot (t - t_0) \\ \tau &= t - t_0 \end{aligned} \quad [5.2]$$

Per comprendere meglio ciò, è conveniente considerare la *Fig. 5.1* dove P_0 è la particella d'aria di riferimento e P è la particella generica. In realtà nella figura (che è bidimensionale e non tridimensionale per semplicità grafica) è evidenziata solo la componente x della relazione (5.2).

Lo spostamento \mathbf{r} è chiaramente una variabile stocastica. Anche la velocità assoluta $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ (in questo caso con \mathbf{u} si è indicata la fluttuazione della velocità, cioè la velocità depurata del valor medio) è ora sostituita dalla *velocità relativa* definita come:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, \tau) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) \quad [5.3]$$

Possiamo, ora, dare la seguente definizione:

una struttura turbolenta (un eddy) in una regione G dello spazio-tempo è detta localmente isotropa se, per ogni valore fissato $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{u}_0$, la distribuzione multidimensionale di probabilità per ogni insieme finito di velocità relative $\mathbf{v}(\mathbf{r}_k, \tau_k)$, $k = 1, 2 \dots, n$ nei punti (\mathbf{x}_0, t_0) , $(\mathbf{x}_1, t_1), \dots, (\mathbf{x}_n, t_n)$, di G è:

- a) indipendente da \mathbf{u}_0
- b) stazionaria (indipendente da t_0)
- c) omogenea (indipendente dalla scelta di \mathbf{x}_0)
- d) isotropa (invariante a riflessioni e rotazioni nello spazio dei vettori \mathbf{r}).

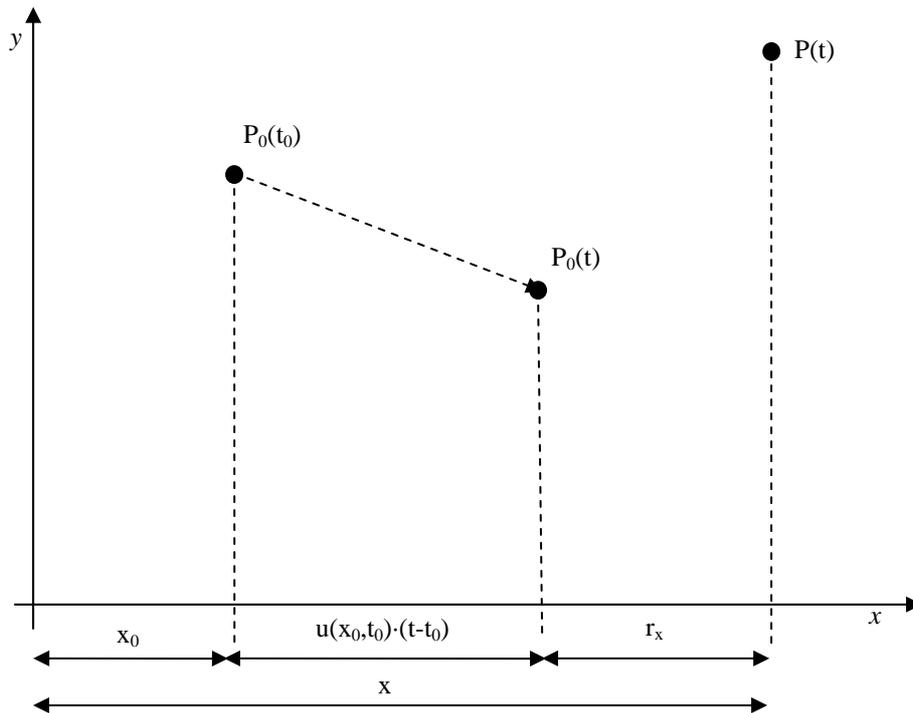


Fig. 5.1: sistema di coordinate relative per la descrizione del moto di un disturbo turbolento.

La discussione fatta al punto 5.1 ci consente di assumere che la turbolenza di un fluido a numero di Reynolds elevato è sempre localmente isotropa in ogni regione le cui dimensioni lineari siano molto minori di L e le cui scale temporali caratteristiche siano inferiori a $T_0 = L/U$. In altre parole, se restringiamo l'attenzione ai vettori r_k e agli intervalli temporali τ_k tali che:

$$|\mathbf{r}_k| = r_k \ll L \quad \text{e} \quad |\tau_k| \ll T_0$$

allora per $Re \gg Re_c$ la distribuzione di probabilità per ogni insieme finito di $\mathbf{v}_k(r_k, \tau_k)$ può essere considerata stazionaria, omogenea ed isotropa. Nota la distribuzione di probabilità per la velocità relativa, è possibile determinare anche la distribuzione di probabilità per le differenze di velocità in punti sufficientemente vicini nello spazio-tempo e quindi per le derivate della velocità relativa rispetto sia alla distanza che rispetto al tempo.

Se nel fluido in moto turbolento il campo di temperatura oltre che essere turbolento è anche non omogeneo, la situazione è più complicata. In questo caso, la definizione di turbolenza isotropa dovrà essere estesa, includendo tra le entità fisiche considerate non solo le velocità relative dei punti della regione G rispetto al punto P_0 , ma anche le rispettive differenze di temperatura, e richiedendo che la stazionarietà, l'omogeneità e l'isotropia siano soddisfatte dalla probabilità congiunta per le differenze di velocità relativa e di temperatura. Tutto ciò vale per un fluido incomprimibile (solenoidale). Per un fluido comprimibile la definizione di isotropia locale dovrebbe essere ulteriormente estesa alle differenze di pressione e di densità. Questo caso non verrà qui trattato.

Dato che la definizione di turbolenza isotropa coinvolge la distribuzione di probabilità per le sole differenze tra variabili del moto e temperatura relative a coppie di punti sufficientemente vicini, non è il caso di preoccuparsi dell'evoluzione nello spazio e nel tempo dei valori medi dei campi quando queste idee vengono applicate alla turbolenza del *PBL*. Infatti, questa evoluzione garantisce che solo i valori medi dei campi meteorologici siano staticamente instabili (e ciò assicura che ci sia il processo di frammentazione a cascata), senza influire direttamente sulle caratteristiche statistiche dei disturbi di piccole dimensioni.

E' chiaro che tutto questo ragionamento si fonda sulla possibilità di enucleare dal campo di moto \mathbf{U} un campo di moto medio \mathbf{u} . Avendolo costruito mediante un processo di mediazione nel tempo, esso inevitabilmente dipende dal tempo di mediazione usato. Va detto, però, che la definizione di isotropia locale coinvolge solo disturbi ad alta frequenza (per un disturbo di ordine n la frequenza, cioè la periodicità probabile con cui tale disturbo si ripete nel tempo, è proporzionale a v_n/l_n) molto inferiore alla frequenza fondamentale U/L e quindi è sufficiente considerare un tempo di mediazione superiore a L/U .

Oltre a ciò, la definizione di isotropia locale richiede di considerare una regione finita G dello spazio-tempo entro cui le fluttuazioni risultano localmente isotrope. Ciò, a rigore, potrebbe costituire una notevole complicazione formale, visto che dovremmo definire con precisione tale regione e dovremmo darne le condizioni al contorno. Tuttavia, l'intuizione fisica, che ha condotto alla definizione di isotropia locale, ci consente anche di ipotizzare che lo stato statistico delle fluttuazioni nella regione G siano indipendenti dalla sua forma e che le condizioni al contorno abbiano un effetto significativo solo nel definire l'apporto di energia dall'esterno della regione stessa. Perciò, nell'analisi teorica della turbolenza localmente isotropa possiamo estendere le caratteristiche di omogeneità, stazionarietà ed isotropia dei campi fluidodinamici di G all'intero spazio-tempo, cioè possiamo utilizzare un *modello ideale* di turbolenza localmente isotropa con una scala esterna L infinitamente grande. In un tale modello i vari campi di interesse sono definiti in tutto lo spazio e sono campi stocastici localmente isotropi nel senso definito in precedenza per la turbolenza completamente isotropa; in particolare, potremo usare la rappresentazione spettrale senza restrizioni. L'apporto di energia dall'esterno, necessario per mantenere stazionaria la turbolenza, può quindi essere visto come una continua eccitazione dei moti di Fourier con lunghezza d'onda infinita.

5.3 LE IPOTESI DI KOLMOGOROV

Già abbiamo detto che al ridursi della scala dei disturbi, si riduce anche l'effetto di *orientamento* esercitato dal moto medio del fluido ed aumenta l'indipendenza delle proprietà geometriche e cinematiche dagli stessi. E' quindi ragionevole assumere che i parametri del moto medio (per esempio la lunghezza caratteristica di scala L e la velocità caratteristica U) non influiscano *direttamente* sullo stato statistico delle fluttuazioni a piccola scala e che lo stato statistico dei disturbi a piccola scala sia determinato solo dalle proprietà interne agli stessi. Tali proprietà saranno naturalmente determinate dal trasferimento inerziale di energia dai moti a grande scala a quelli a piccola scala (cioè dal lavoro effettuato contro gli stress di Reynolds), trasferimento che avrà termine quando i disturbi raggiungeranno una scala talmente piccola da dissiparsi in calore. A scale superiori a questa, le forze inerziali e le forze viscosse saranno in equilibrio statistico, indipendentemente dalle caratteristiche del moto medio.

Questo stato di cose non comporta, tuttavia, che lo stato statistico delle fluttuazioni a piccola scala non dipendano del tutto dalle proprietà del moto medio. In realtà, il moto medio influisce sulle fluttuazioni a piccola scala, ma solo *indirettamente*, cioè mediante il flusso di energia che è associato al moto medio e che è trasferito ai disturbi di scala sempre più piccola mediante il processo di frammentazione continua. Supponiamo che il numero di Reynolds Re sia così elevato che l'omogeneità, l'isotropia e la stazionarietà dello stato statistico siano ottenute da disturbi a scala relativamente grande, per cui Re è molto maggiore di Re_c . In questo caso tali disturbi non verranno apprezzabilmente influenzati dalla viscosità. Il tasso di dissipazione medio di energia ε , cioè l'ammontare medio di energia convertita in calore per unità di massa e di tempo, sarà allora uguale all'ammontare medio di energia trasferito ai disturbi a scala maggiore (l_1) dal flusso medio. Di conseguenza ε sarà la caratteristica dei moti a grande scala che influenzerà lo stato statistico delle fluttuazioni a piccola scala. Per i disturbi a scala maggiore ($n = 1$), considerazioni del tutto dimensionali ci conducono a ritenere che l'energia cinetica ad essi associata sia

dell'ordine di u_l^2 e che il tasso di dissipazione di energia cinetica sia $\varepsilon \sim v_l^3/l_l$. Ricordiamo che il tasso di dissipazione di energia ε l'abbiamo già incontrato in precedenza ed è stato definito sulla base delle caratteristiche del campo di moto istantaneo come:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \nu \sum_{i,j} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad [5.4a]$$

deve le u_i sono le componenti del campo di moto istantaneo. Dato che siamo interessati al caso di moti ad alto numero di Reynolds, in cui la dissipazione diretta di energia da parte del moto medio sotto l'azione della viscosità molecolare è trascurabile, possiamo sostituire nella relazione precedente le componenti del moto istantaneo con le relative fluttuazioni, ottenendo:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \nu \sum_{i,j} \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad [5.4b]$$

Così come l'informazione direzionale delle grandi scale è persa col trasferimento dell'energia lungo la cascata energetica, Kolmogorov sostiene che tutte le informazioni geometriche dei grandi vortici (determinate dal moto medio del fluido e dalle condizioni al contorno) vengono perse. Di conseguenza, le caratteristiche statistiche dei moti a piccola scala devono essere in un certo senso *universali*, cioè simili per ogni moto ad elevato numero di Re.

5.3.1 LA PRIMA IPOTESI KOLMOGOROV

Concentriamo, ora, la nostra attenzione ai disturbi che hanno perso la proprietà direzionale (anisotropia) del moto medio e sono sostanzialmente isotropi. Tali vortici avranno ancora dimensioni ragguardevoli ed avranno una dimensione caratteristica dell'ordine di l_l . E' invalso l'uso (Pope, 2003) di introdurre la lunghezza di scala l_E (dell'ordine di $1/6 l_l$) come demarcazione tra i vortici sicuramente anisotropi ($l < l_E$) ed i piccoli vortici localmente isotropi ($l < l_E$). E' di questa classe di disturbi che ci occuperemo nel seguito del Capitolo.

Ritorniamo, ora, alla questione di quali parametri governano le proprietà statistiche delle velocità relative $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \tau)$ con valori di $|\mathbf{r}|$ e di τ sufficientemente piccoli. Sulla base della discussione precedente, le proprietà dei moti a grande scala possono influenzare le proprietà statistiche dei disturbi a scala inferiore solo attraverso il tasso di dissipazione dell'energia turbolenta ε . In aggiunta, tali proprietà dovranno dipendere anche dai parametri che caratterizzano le proprietà fisiche del fluido, che possono essere descritte dalla densità ρ e dalla viscosità ν . Poiché, tuttavia, i valori della velocità relativa sono indipendenti dalla scelta dell'unità di massa, le proprietà statistiche del moto dei disturbi non potranno dipendere da ρ . Siamo, perciò, costretti a concludere che le proprietà statistiche dei disturbi a scala sufficientemente piccola dipenderanno solo da ε e da ν . Questa è, in sostanza, la prima ipotesi di Kolmogorov, così espressa:

Prima ipotesi di Similarità di Kolmogorov

Nel caso di disturbi in un campo di moto a numero di Reynolds Re sufficientemente elevato, la distribuzione multidimensionale di probabilità per le velocità relative $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \tau) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}, t_0 + \tau)$ in una regione G dello spazio-tempo in cui la turbolenza è localmente isotropa, è definita senza ambiguità dai valori di ε e di ν .

Sulla base di questa ipotesi è possibile, con l'analisi di Similarità (Cap.7), formare in un solo modo con le due grandezze ε ($m^2 \cdot s^{-3}$) e ν ($m^2 \cdot s^{-1}$) la lunghezza di scala η , la velocità di scala v_η ed il tempo di scala τ_η che risultano così definite, a parte fattori numeri ininfluenti:

$$\eta = \left(\nu^3 / \varepsilon \right)^{1/4} \quad v_\eta = (\nu \varepsilon)^{1/4} \quad \tau_\eta = (\nu / \eta)^{1/2} \quad [5.5]$$

La lunghezza di scala η è nota come lunghezza di Kolmogorov.

Esercizio 5.1

Dimostriamo con l'aiuto della Similarità la relazione proposta nella (5.5) per la lunghezza di scala di Kolmogorov.

Per prima cosa, indichiamo con l'espressione [C] le dimensioni di una generica grandezza fisica e con L e T rispettivamente la lunghezza ed il tempo. La viscosità cinematica ν e il tasso di dissipazione medio di energia cinetica ε avranno le dimensioni seguenti:

$$[\nu] = L^2 T^{-1} \quad [\varepsilon] = L^2 T^{-3}$$

Dalla prima ipotesi di Kolmogorov si ha che ogni proprietà locale del disturbo dovrà essere funzione di queste due grandezze fisiche. Cerchiamo di individuare una lunghezza di scala η che possa dipendere solo da queste due variabili e dimostriamo che è unica. Tale lunghezza caratteristica dovrà essere espressa genericamente come:

$$\eta = K \varepsilon^a \nu^b$$

(K è una generica costante) e quindi bisognerà che tale relazione sia congruente dal punto di vista dimensionale. Ciò comporta che:

$$L = (L^2 T^{-3})^a (L^2 T^{-1})^b$$

Da questa relazione possiamo individuare un sistema di due equazioni nei due esponenti che derivano dal fatto che, perché tale relazione sia dimensionalmente congruente, bisogna che le dimensioni del membro di sinistra siano uguali a quelle del membro di destra. Tale sistema è:

$$\begin{aligned} \text{Considerando la lunghezza} &\rightarrow 2a + 2b = 1 \\ \text{Considerando il tempo} &\rightarrow -3a - b = 0 \end{aligned}$$

La soluzione è unica e data da: $a = -1/4$ e $b = 3/4$. Quindi, a parte la costante, la lunghezza di Kolmogorov sarà data dalla relazione:

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$$

Esercizio 5.2

Consideriamo una situazione convettiva durante la quale, nei pressi del suolo, la *friction velocity* u_* vale $0.3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Come vedremo al Cap.7, una buona stima del valore del tasso medio di dissipazione di energia cinetica turbolenta ε entro il *Surface Layer* è:

$$\varepsilon = \frac{u_*^3}{kz}$$

dove k è costante di Von Karman (0.4) e z è la quota di misura di u_* (es. 10m). Pertanto, in questa situazione $\varepsilon = 0.007 \text{ m}^2\text{s}^{-3}$. Nella situazione considerata, l'estensione verticale del *PBL* sia $z_i = 1000 \text{ m}$ (che possiamo identificare con la *Scala Esterna L del Moto*) ed il vento medio nell'intero *PBL* sia $U = 3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. La scala temporale caratteristica del moto sarà quindi pari a $T_0 = L/U = 0.3 \cdot 10^3 \text{ s} \cong 6 \text{ minuti}$. Il moto dell'aria è sicuramente turbolento, visto che:

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} = \frac{Uz_i}{\nu} = 2 \cdot 10^8$$

ricordando che la viscosità cinematica dell'aria è $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. I vortici di maggiore dimensione avranno, quindi, una dimensione caratteristica di circa 10^3 m . A questo punto disponiamo di tutti gli elementi per calcolarci le scale di Kolmogorov in questa situazione convettiva. In particolare avremo che:

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_\eta = (\nu \varepsilon)^{1/4} = 0.02 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\tau_\eta = (\nu/\eta)^{1/2} = 2.2 \cdot 10^2 \text{ s}$$

E' interessante osservare come le dimensioni caratteristiche dei disturbi in questa situazione di convettività varino da 10^3 m a 10^{-3} m (quindi di 6 decadi).

E' possibile fare anche altri ragionamenti di Similarità. Se utilizziamo come *unità di misura* le scale precedentemente individuate, possiamo definire una nuova velocità relativa adimensionale w nel modo seguente:

$$w(\xi, s) = \frac{v(\xi\eta, s\tau_\eta)}{v_\eta} = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}_0 + \xi\eta, t_0 + s\tau_\eta) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0)}{v_\eta} \quad [5.6]$$

Dato che non esiste la possibilità di formare un gruppo adimensionale con ε e ν , le caratteristiche statistiche di w non possono dipendere da queste due grandezze. Di conseguenza, in accordo con l'ipotesi di Kolmogorov, se w viene esaminata ad una scala non troppo grande ($|\xi| < l_E/\eta$) tale grandezza è statisticamente isotopa ed identica in ogni punto (\mathbf{x}_0, t_0) in tutti i moti turbolenti ad elevato Re . Quindi, alle piccole scale, tutti i campi di velocità in moti ad elevato Re sono statisticamente simili e quindi w è una caratteristica universale. Pertanto, la prima ipotesi di Kolmogorov può essere riformulata come:

la distribuzione di probabilità a finite dimensioni per il campo stocastico $w(\xi, s)$ corrispondente ai valori $r = |\xi|/\eta$ e $\tau = |s|/\tau_\eta$ che non sono troppo grandi, è la stessa per tutti i moti con Re sufficientemente elevato e quindi è universale.

I disturbi con lunghezza di scala η , caratterizzati da una velocità di scala v_η presentano un numero di Reynolds pari a $Re_\eta = \eta v_\eta/\nu = 1$. Perciò η è dello stesso ordine di grandezza della lunghezza di scala dei disturbi di ordine più elevato su cui la viscosità ha ancora un effetto apprezzabile (ed anche dell'ordine della lunghezza di scala dei disturbi cui corrisponde la massima dissipazione di energia, che è varie volte più piccola). Per questo η è un'importante caratteristica fisica della turbolenza sviluppata. La sua definizione consente, ora, di individuare un intervallo dimensionale per i disturbi entro cui la loro caratteristica principale è l'isotropia locale; infatti, tutti i disturbi con lunghezza di scala l inferiore a l_E e superiore a η sono localmente isotropi e l'intervallo dimensionale $\eta \div l_E$ è noto come Universal Equilibrium Range.

Consideriamo, ora, il rapporto tra la lunghezza di scala dei moti più piccoli η e la lunghezza di scala dei vertici di dimensioni maggiori l_1 ed i rapporti analoghi per la velocità di scala ed il tempo caratteristico di scala. Tali rapporti sono immediatamente determinati dalla definizione della scala di Kolmogorov e dal fatto che $\varepsilon \sim v_1^3/l_1$ nel modo seguente

$$\frac{\eta}{l_1} = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \cdot \frac{1}{l_1} \approx \left(\frac{\nu^3}{v_1^3 \cdot l_1^3} \right)^{1/4} = Re^{-3/4} \quad [5.7]$$

$$\frac{v_\eta}{v_1} \approx Re^{-1/4}$$

$$\frac{\tau_\eta}{\tau_1} \approx Re^{-1/2}$$

Quindi, la lunghezza di Kolmogorov diminuisce col crescere del numero di Reynolds che caratterizza il moto del fluido e così faranno anche la velocità di scala e il tempo di scala, ma più lentamente. Pertanto, ad elevati valori di Re , la velocità ed il tempo caratteristico di scala dei vortici più piccoli (v_η e τ_η) sono piccoli se comparati con quelli dei vortici più grandi (v_1, τ_1).

5.3.2 LA SECONDA IPOTESI KOLMOGOROV

Consideriamo ora il caso in cui il valore di Re del moto del fluido sia talmente elevato da far assumere ad η un valore piccolissimo, se confrontato con L (questo è il caso trattato nell'Esempio 5.2). In questo tipo di turbolenza possiamo isolare un vasto sottoinsieme di disturbi di lunghezza di scala l molto minore di L (e di conseguenza omogenei, isotropi e quasi stazionari) ma molto maggiore della lunghezza di Kolmogorov η . Per questi disturbi, le velocità relative caratteristiche v_l saranno molto maggiori di v_η e quindi il relativo numero di Reynolds $Re_l = lv_l/\nu$ sarà molto elevato rispetto a $\eta v_\eta/\nu = 1$. In altre parole, in questo sottointervallo dimensionale il processo dominante è il trasferimento inerziale dell'energia ai disturbi a piccola scala, senza però alcuna apprezzabile conversione di energia direttamente in calore ad opera delle forze viscosi. Le proprietà statistiche corrispondenti a questo sottointervallo di scala (noto come *Inertial Subrange*) non dipendono perciò dalla viscosità ν . In essenza, questa è la Seconda Ipotesi di Kolmogorov, che può essere formulata con maggior rigore nel modo seguente:

Seconda Ipotesi di Kolmogorov

Nel caso di turbolenza con numero di Reynolds Re sufficientemente elevato, la distribuzione di probabilità multidimensionale per le velocità relative $v(r_k, \tau_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ in uno spazio sufficientemente piccolo ed in intervalli $|r_k| \ll L$ e $|\tau_k| \ll L/U$ che soddisfano le condizioni aggiuntive:

$$\begin{array}{lll} |r_k| \gg \eta, & |r_j - r_k| \gg \eta, & \text{per } j \neq k \\ |\tau_k| \gg \tau_\eta, & |\tau_j - \tau_k| \gg \tau_\eta, & \text{per } j \neq k \end{array}$$

sono determinate, senza ambiguità, solo dal valore del tasso di dissipazione di energia turbolenta ε e sono indipendenti dalla viscosità ν .

Dato che non è possibile costruire né una lunghezza né una velocità né un tempo di scala col solo tasso di dissipazione ε , lo stato statistico dei disturbi che dimensionalmente stanno nell'*Inertial Subrange* hanno una forma universale determinata esclusivamente da ε .

E' conveniente, a questo punto, introdurre per comodità la lunghezza di scala l_D ($l_D = 60 \eta$, Pope, 2000) in modo che l'intero intervallo dimensionale dei disturbi sia ripartito nel modo seguente (Fig. 5.2):

- Universal Equilibrium Range: $l < l_E$
- Inertial Subrange: $l_E > l > l_D$
- Dissipation Range: $l < l_D$

La scala l_D individua un punto di transizione tra le scale maggiori che contengono energia e le scale più piccole che le dissipano. I moti nell'*Inertial Subrange* sono determinati dagli effetti inerziali (gli effetti viscosi sono trascurabili), mentre nel *Dissipation Range* tali moti vengono condizionati significativamente dagli effetti viscosi, responsabili essenzialmente della dissipazione.

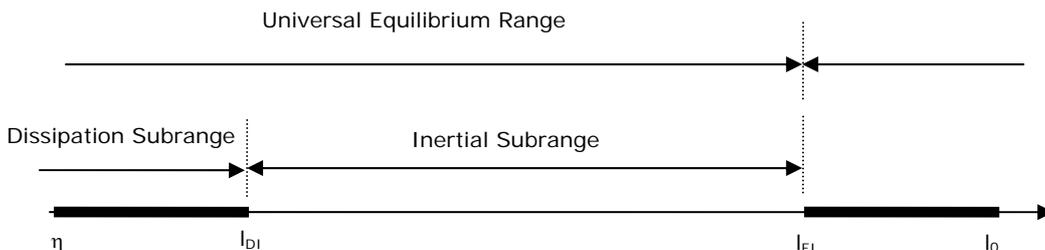


Fig. 5.2: ripartizione dell'intervallo dimensionale dei disturbi turbolenti

Esercizio 5.3

Riprendiamo in considerazione la situazione tratta all'Esempio 5.2 ed immaginiamo che la *friction velocity* sia stata ottenuta dal un anemometro ultrasonico triassiale che tratteremo più in dettaglio al Cap.11. Tuttavia si può dire che, idealmente, tale sensore misura la componente istantanea della velocità dell'aria lungo tre percorsi di lunghezza finita tra loro ortogonali. Immaginiamo che il percorso di misura sia pari a 0.12 m.

Da quanto visto all'Esempio 5.2, la lunghezza di Kolmogorov è pari a $\eta = 0.7 \cdot 10^{-3}$ m e quindi l_D è dell'ordine di 0.042 m, quindi l'anemometro ultrasonico triassiale non è in grado in questa situazione di misurare disturbi appartenenti al Dissipation Subrange.

Nell'*Inertial Subrange* la lunghezza, la velocità ed il tempo caratteristico di scala non possono essere espresse solamente dal tasso di dissipazione ε ; tuttavia, dato un vortice di lunghezza di scala l , la velocità ed il tempo caratteristico di scala possono essere espressi in funzione di ε ed l nel modo seguente:

$$\begin{aligned} v(l) &= (\varepsilon \cdot l)^{1/3} = v_\eta (l/\eta)^{1/3} \approx v_1 (l/l_1)^{1/3} \\ \tau(l) &= (l^2/\varepsilon)^{1/3} = \tau_\eta (l/\eta)^{2/3} \approx \tau_1 (l/l_1)^{2/3} \end{aligned} \quad [5.8]$$

In queste relazioni si è utilizzato il fatto che $\varepsilon \cong v_1^3/l_1$. La conseguenza di ciò è che, sulla base della seconda ipotesi di similarità, nell'*Inertial Subrange* la velocità relativa $v(l)$ ed il tempo caratteristico $\tau(l)$ decrescono col decrescere di l .

Nella concezione dell'*Energy Cascade* una quantità di centrale importanza è il tasso $T(l)$ a cui l'energia viene trasferita dai disturbi a dimensione maggiore di l ai vortici a dimensione inferiore ad l . Se tale processo viene realizzato primariamente da disturbi di dimensioni comparabili con l , allora $T(l)$ sarà dell'ordine di $v(l)^2/\tau(l)$ e sulla base delle relazioni di Similarità può essere espresso come:

$$\frac{v(l)^2}{\tau(l)} = \frac{(\varepsilon \cdot l)^{2/3}}{(l^2/\varepsilon)^{1/3}} = \varepsilon \quad [5.9]$$

Questo risultato è estremamente importante. Si ha, infatti, che dal momento in cui un disturbo di dimensione l_E (caratterizzato da un tasso di dissipazione ε) entra nel processo di *Cascade*, iniziando il processo di frammentazione, trasferisce al tasso costante di dissipazione ε l'energia entro tutto l'*Inertial Subrange* fino a che l è dell'ordine di l_D . In pratica $T_E = T(l_E) = T(l) = T_D = T(l_D) = \varepsilon$. Solo a questo punto si innescano i processi di dissipazione viscosa. Ciò è illustrato in maniera schematica in Fig. 5.3.

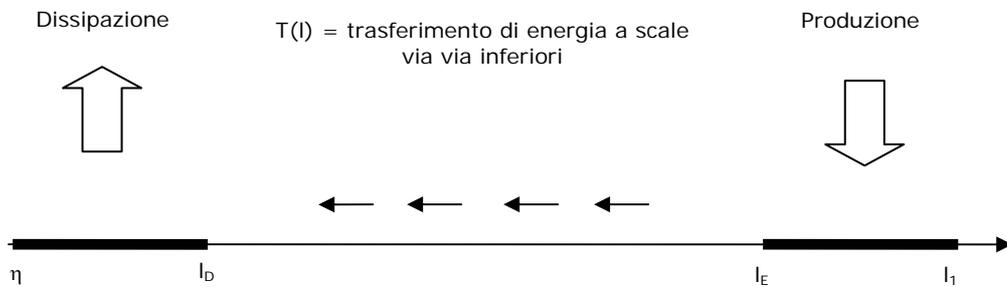


Fig. 5.3: il processo di trasferimento di energia entro l'*Universal Equilibrium Range*

5.3.3 EVOLUZIONI DELLE IPOTESI KOLMOGOROV

Da quando queste ipotesi sono state formulate sono stati fatti molti progressi nello studio teorico della turbolenza e le verifiche sperimentali hanno mostrato che le ipotesi di Kolmogorov danno una spiegazione soddisfacente di molte delle proprietà dei moti turbolenti e che le deduzioni basate su di esse sono in buon accordo con i risultati sperimentali. Ciò non vale solo per le sperimentazioni in laboratorio, ma vale anche per i fluidi di interesse geofisico ed in particolare vale per il *PBL*. Nondimeno, si deve ricordare che tali ipotesi non hanno e non possono avere una dimostrazione rigorosa sulla base delle leggi della Fluidodinamica. Comunque, più tardi, nel 1962 Kolmogorov e Obukhov hanno migliorato la teoria, introducendo piccole correzioni alla sua formulazione originaria. Queste correzioni sono, tuttavia, poco significative ai nostri scopi e non le tratteremo. Viceversa, sottolineiamo ancora una volta che, in accordo con i dati esistenti, le ipotesi di Kolmogorov descrivono correttamente molte delle caratteristiche della struttura locale della turbolenza. Le conseguenze derivanti da queste ipotesi (specialmente quelle che possono essere verificate direttamente in maniera sperimentale) sono perciò di indubbio interesse e nei punti che seguono ne descriveremo alcune.

5.4 LA STRUTTURA DELLE FLUTTUAZIONI DI VELOCITÀ

La dimensione caratteristica (scala) dei vari disturbi in una turbolenza sviluppata è distribuita in un intervallo molto grande (nell'Esempio 5.3, sono 6 decadi). La porzione che ubbidisce alla Prima Ipotesi di Kolmogorov, l'Universal Equilibrium Range, presenta un estremo superiore finito che è la lunghezza l_E , dello stesso ordine di grandezza di L e di l_1 . Per semplicità analitica è conveniente considerare un modello ideale in cui tale estremo superiore sia infinito, perché ciò consente di impiegare l'analisi spettrale senza restrizioni. Quando essa viene applicata a situazioni reali, ci si deve ricordare che l'apparato analitico sarà valido solo per numeri d'onda di modulo $k = |\mathbf{k}|$ non troppo piccoli ($k \gg 1/L$) e per frequenze ω non troppo piccole ($\omega \gg U/L$).

La Seconda Ipotesi afferma che nell'intervallo dimensionale $L \gg r \gg \eta$ e $L/U \gg \tau \gg \tau_\eta$ (o in maniera equivalente $1/L \ll k \ll 1/\eta$ e $U/L \ll \omega \ll 1/\tau_\eta$) tutte le leggi statistiche saranno determinate dal solo parametro ε e non potranno dipendere dalla viscosità ν . Tale intervallo è detto *Inertial Subrange* visto che in esso sono le forze inerziali a giocare il ruolo principale.

5.4.1 CARATTERISTICHE STATISTICHE EULERIANE DELLE DIFFERENZE DI VELOCITÀ

Consideriamo le caratteristiche statistiche delle differenze di velocità tra il punto $\mathbf{x}+\mathbf{r}$ ed il punto \mathbf{x} ad un dato istante t :

$$\Delta_r \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad [5.10]$$

Se la distanza $r = |\mathbf{r}|$ è sufficientemente piccola, la distribuzione di probabilità di $\Delta_r \mathbf{u}$ sarà omogenea, isotropa e stazionaria, per cui risulta possibile usare la prima e la seconda ipotesi di Kolmogorov. Tuttavia, qui non considereremo le distribuzioni di probabilità, ma restringeremo l'attenzione ai primi due momenti del vettore $\Delta_r \mathbf{u}$ che è un processo stocastico con incrementi stazionari.

In condizioni di isotropia e di omogeneità, è immediato verificare che il momento primo risulta pari a:

$$\overline{\Delta_r \mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)} = 0 \quad [5.11]$$

Ricordando quanto presentato al punto 3.1.3.4, il momento secondo (che è un tensore e che è noto come Funzione di Struttura) nell'intero *Equilibrium Range* (cioè per $r \ll L$), può essere

espresso in termini di due sole funzioni scalari, precisamente la Funzione di Struttura Longitudinale $D_{LL}(r)$ e la Funzione di Struttura Laterale $D_{NN}(r)$ del campo di velocità, definite come:

$$\begin{aligned} D_{LL}(r) &= \overline{(\Delta_r u_L)^2} \\ D_{NN}(r) &= \overline{(\Delta_r u_N)^2} \end{aligned} \quad [5.12a]$$

dove u_L e u_N sono rispettivamente la componente del campo di velocità relativa parallela e perpendicolare al vettore distanza \mathbf{r} . La relazione che esprime il tensore del momento secondo di $\Delta_r \mathbf{u}$ è la seguente:

$$\overline{\Delta_r u_i \cdot \Delta_r u_j} = D_{ij}(r) = \frac{D_{LL}(r) - D_{NN}(r)}{r^2} r_i r_j + D_{NN}(r) \cdot \delta_{ij} \quad [5.12b]$$

Come detto, delle sue 9 componenti, solo le tre componenti diagonali sono non nulle.

Quando l'equazione di continuità è espressa in forma incomprimibile e cioè quando il campo è sinusoidale (cosa che considereremo sempre vera nel seguito), tra le due funzioni di struttura sussiste, come si è visto, la relazione seguente:

$$D_{NN}(r) = D_{LL}(r) + \frac{r}{2} \frac{d}{dr} D_{LL}(r) \quad [5.12c]$$

Queste relazioni sono vere in generale, purché la turbolenza sia stazionaria, omogenea ed isotropa.

5.4.1.1 L'Universal Equilibrium Range

Se consideriamo, però, distanze compatibili con l'*Universal Equilibrium Range*, tali relazioni possono essere riformulate tenendo conto della Prima Ipotesi di Kolmogorov, secondo cui le proprietà statistiche delle velocità relative (e quindi anche le Funzioni di struttura) devono dipendere dal tasso di dissipazione media di energia ε e dalla densità ν . Più in particolare, le Funzioni di Struttura D_{LL} e D_{NN} , scalate con la velocità di scala ν_η dovranno essere funzioni universali della distanza normalizzata r/η , cioè:

$$\begin{aligned} D_{LL}(r) &= \nu_\eta^2 \cdot \beta_{LL}(r/\eta) \\ D_{NN}(r) &= \nu_\eta^2 \cdot \beta_{NN}(r/\eta) \end{aligned} \quad [5.13a]$$

Le due funzioni universali β_{LL} e β_{NN} per la (5.12c) saranno tra loro legate dalla relazione seguente, come è facile verificare:

$$\beta_{NN}(x) = \beta_{LL}(x) + \frac{x}{2} \frac{d}{dx} \beta_{LL}(x) \quad [5.13b]$$

Come si vede dalle (5.13), le due Funzioni di Struttura non dipendono esplicitamente dal tempo, ma solo implicitamente attraverso la loro dipendenza da ε che varia lentamente nel tempo.

Consideriamo, ora distanze $r \ll \eta$. In questa regione l'attrito è dominante sul moto relativo delle particelle d'aria e le componenti della velocità relativa sono descritte da funzioni decisamente regolari nelle coordinate spaziali. Dato che r è molto piccolo, si può espandere $\mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{r})$ in serie di Fourier arrestata al primo termine. Da questa considerazione e dalla definizione di funzione di struttura è facile verificare che vale le relazioni seguenti:

$$D_{LL}(r) \cong A \cdot r^2 \quad A = \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2} \quad [5.14a]$$

$$D_{NN}(r) \cong B \cdot r^2 \quad B = \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2} \quad [5.14b]$$

Quindi, nel *Dissipation range*, le Funzioni di Struttura dipenderanno quadraticamente dalla distanza r (che è molto minore della lunghezza di Kolmogorov η) Queste relazioni possono essere riscritte in una maniera decisamente più espressiva. Per prima cosa ricordiamo che il tasso medio di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta ε è dato dalla relazione:

$$\varepsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2} \quad [5.15a]$$

che esprime la somma di 9 termini. In condizioni di turbolenza isotropa si ha che:

$$\begin{aligned} s_{ii} &= \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2} = s && \text{per } i = 1,2,3 \\ s_{ij} &= \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2} = 2s && \text{per ogni } i \neq j \end{aligned} \quad [5.15b]$$

Quindi:

$$\varepsilon = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2} \quad \text{e} \quad \varepsilon = 7.5\nu \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2} \quad [5.15c]$$

Da queste considerazioni si giunge immediatamente alle relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} D_{LL}(r) &= \frac{\varepsilon}{15\nu} r^2 \\ D_{NN}(r) &= \frac{2\varepsilon}{15\nu} r^2 = 2D_{LL}(r) \end{aligned} \quad [5.15d]$$

in cui è evidenziata la dipendenza delle Funzioni di Struttura dal tasso di dissipazione ε e dalla viscosità ν . Inoltre, in questo intervallo dimensionale, D_{NN} è due volte D_{LL} .

5.4.1.2 L'Inertial Subrange

Consideriamo ora distanze comprese nell'*Inertial Subrange*. In tale intervallo dimensionale, secondo la Seconda ipotesi di Kolmogorov le proprietà statistiche delle velocità relative devono dipendere dal tasso di dissipazione media di energia turbolenta ε e devono essere indipendenti dalla viscosità ν . Ciò vale, ovviamente, anche per le Funzioni di Struttura. Per giungere ad una relazione operativa, basta seguire la Teoria della similarità secondo cui:

$$D_{LL}(r) = C_k \cdot (\varepsilon)^a (r)^b \quad [5.16a]$$

dove C_k è una costante universale e i numeri a e b devono essere determinati in maniera che le dimensioni fisiche del membro di sinistra dell'equazione eguagli le dimensioni del membro di destra. E' immediato verificare che:

$$D_{LL}(r) = C_k \cdot (\varepsilon \cdot r)^{2/3} \quad [5.16b]$$

Anche nell'*Inertial Subrange* vale la relazione (5.12c) che lega tra loro D_{LL} e D_{NN} . Impiegandola, si vede immediatamente che:

$$D_{NN}(r) = \frac{4}{3} C_k \cdot (\varepsilon \cdot r)^{2/3} \quad [5.16c]$$

Per ottenere l'espressione generale di una Funzione di Struttura $D_{ij}(r)$ nell'*Inertial Subrange*, basta impiegare la relazione (5.12b) ottenendo:

$$D_{ij}(r) = C_k \cdot (\varepsilon \cdot r)^{2/3} \cdot \left[\frac{4}{3} \delta_{ij} - \frac{1}{3} \frac{r_i r_j}{r^2} \right] \quad [5.16d]$$

Le relazioni (5.16) esprimono in varia forma quella che è nota come *la legge dei due terzi* che è valida per la Funzione di Struttura, cioè il momento secondo di $\Delta_r \mathbf{u}$. Essa vale nell'*Inertial Subrange*. Quando la distanza aumenta oltre il suo estremo superiore, la funzione di struttura continua ad aumentare con r , ma più lentamente ed in maniera non universale.

Se si considerano i momenti n -esimi si ottiene in modo simile un'espressione valida entro l'*Inertial Subrange* data da:

$$\overline{(\Delta_r u_i)^n} = C_n \cdot (\varepsilon \cdot r)^{n/3} \quad [5.17]$$

che è un'estensione della legge dei due terzi. Le misure sperimentali in laboratorio e nel *PBL* confermato la validità delle (5.16), mentre hanno evidenziato che la (5.17) risulta meno accurata, probabilmente a causa di fenomeni di intermittenza presenti nella turbolenza.

La Legge dei Due Terzi, come ci si poteva aspettare, è stata oggetto di un numero rilevante di verifiche sperimentali sia in laboratorio che in atmosfera. Seguendo Pope (2000) si può affermare che:

- la costante C_k assume sperimentalmente il valore di 2.0;
- nell'intervallo $7000\eta \cong 1/2 L > r > 20\eta$ il valore di C_k varia di circa il $\pm 15\%$;
- nell'intervallo $1200\eta \cong 1/10 L > r > 12\eta$ il rapporto di $4/3$ tra D_{NN} e D_{LL} varia di circa il $\pm 15\%$;
- non è stata riscontrata una tangibile differenza tra $D_{NN} = D_{22}$ e D_{33} .

Esercizio 5.4

Consideriamo ancora una volta le condizioni convettive studiate all'Esempio 5.2 ed immaginiamo inoltre che il vento medio alla quota di misura (10 metri dal suolo) sia pari a $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Se l'anemometro ultrasonico triassiale funziona con una frequenza di campionamento di 10 Hz, ogni 0.1 secondi otteniamo una misura e, per l'ipotesi di Taylor, tra due misure temporalmente successive passa una *distanza* $r = 0.1 \text{ m}$. Dato che la Lunghezza di Kolgorov è pari a $\eta = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, la distanza longitudinale r sarà pari a circa 143η , quindi ben all'interno degli intervalli citati sopra in cui valgono le relazioni relative all'*Inertial Subrange*

Consideriamo un periodo di misura di almeno 30 minuti ed applichiamo ora alle misure della componente lungo la direzione media del moto la definizione di Funzione di Struttura Longitudinale D_{LL} , ottenendo $D_{LL} = 0.0155 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$. Per ottenere una stima del tasso medio di dissipazione di energia cinetica ε basta applicare la (5.16b) ottenendo $\varepsilon = 6.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-3}$. Questo è effettivamente un metodo per stimare sperimentalmente il tasso medio di dissipazione di energia cinetica in campo da misure anemometriche.

5.4.2 LE CORRELAZIONI EULERIANE DELLA VELOCITÀ

Al Cap.3 sono state introdotte le Funzioni di Auto-correlazione e al punto 3.1.3.4 si è visto quali proprietà esse abbiano in situazioni stazionarie, omogenee ed isotrope. Qui di seguito presenteremo una breve sintesi di quanto già esposto, effettueremo alcuni approfondimenti e ricaveremo alcuni risultati rilevanti utilizzando le Ipotesi di Kolgorov.

5.4.2.1 Statistiche two-point ed isotropia

In condizioni di turbolenza stazionaria, omogenea ed isotropa con velocità media nulla, la correlazione *two-point*:

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \overline{u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \cdot u_j(\mathbf{x})} \quad [5.18a]$$

è indipendente da \mathbf{x} e dipende dalla distanza \mathbf{r} . Quando \mathbf{r} si annulla:

$$R_{ij}(0) = \overline{u_i u_j} = \overline{u^2} \delta_{ij} \quad [5.18b]$$

dove $\overline{u^2}$ è la varianza delle fluttuazioni di velocità, che sono isotrope.

Per l'isotropia del campo, ogni possibile correlazione *two-point* può essere ottenuta dalla conoscenza delle Funzioni di Auto-correlazione Longitudinale R_{LL} e Trasversale R_{NN} (si veda relazione 3.66). In particolare si ha che:

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = [R_{LL}(r) - R_{NN}(r)] \cdot \frac{r_i r_j}{r^2} + R_{NN}(r) \cdot \delta_{ij} \quad [5.19a]$$

Se poi si ammette che il campo di velocità è solenoidale, allora è possibile ottenere un'ulteriore relazione che lega tra loro R_{LL} e R_{NN} :

$$R_{NN}(r) = R_{LL}(r) + \frac{1}{2} r \frac{\partial R_{LL}(r)}{\partial r} \quad [5.19b]$$

e quindi ogni $R_{ij}(\mathbf{r})$ in un campo stazionario, omogeneo, isotropo e solenoidale può essere ottenuto dalla sola conoscenza di $R_{LL}(r)$ e di r . Se si rilegge il contenuto del punto 3.1.3.4 si ritroveranno altre proprietà notevoli delle Funzioni di Correlazione in questo tipo di turbolenza. Da tutto ciò è immediatamente chiaro come la statistica *two-point* in condizioni di isotropia sia completamente determinata dall'Auto-correlazione longitudinale $R_{LL}(r)$ e trasversale $R_{NN}(r)$. Ricordiamo, ora, la loro definizione. Se il vettore \mathbf{r} è orientato lungo l'asse x_1 , allora:

$$\begin{aligned} R_{LL}(r) &= \overline{u_1(x+r) \cdot u_1(x+r)} \\ R_{NN}(r) &= \overline{u_2(x+r) \cdot u_2(x+r)} \end{aligned} \quad [5.20a]$$

Esse hanno dimensione ($L^2 T^{-2}$). Per le considerazioni che seguono è conveniente renderle adimensionali, ricorrendo alla ridefinizione seguente:

$$\begin{aligned} R_{LL}(r) &= \overline{u_1^2} \cdot \frac{\overline{u_1(x+r) \cdot u_1(x+r)}}{\overline{u_1^2}} = \overline{u_1^2} \cdot f(r) \\ R_{NN}(r) &= \overline{u_2^2} \cdot \frac{\overline{u_2(x+r) \cdot u_2(x+r)}}{\overline{u_2^2}} = \overline{u_2^2} \cdot g(r) \end{aligned} \quad [5.20b]$$

dove $f(r)$ e $g(r)$ sono funzioni adimensionali di r , che valgono 1 quando $r = 0$ e sono tra loro legate dalla relazione:

$$g(r) = f(r) + \frac{1}{2} r \frac{\partial f(r)}{\partial r} \quad [5.20c]$$

quando il campo è solenoidale. Con queste funzioni, che altro non sono che delle correlazioni normalizzate, è possibile definire due distinte lunghezze di scala:

$$L_{11} = \int_0^{\infty} f(r) \cdot dr \quad [5.21.a]$$

$$L_{22} = \int_0^{\infty} g(r) \cdot dr \quad [5.21b]$$

Se il campo è solenoidale, vale la (5.20c) e quindi:

$$L_{22} = \int_0^{\infty} g(r) \cdot dr = \int_0^{\infty} \left[f(r) + \frac{1}{2} r \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right] \cdot dr = L_{11} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} r \frac{\partial f}{\partial r} dr \quad [5.21c]$$

Risolviendo per parti l'integrale, si giunge alla relazione $L_{22} = 1/2 L_{11}$.

5.4.2.2 La microscala di Taylor

In generale non è possibile dire molto sulla forma analitica delle funzioni di correlazione. Tuttavia, sempre ipotizzando di essere in condizioni stazionarie, omogenee ed isotrope, è possibile fare qualche passo avanti in questo senso assumendo che il campo delle velocità relative sia un campo continuo. Questa ipotesi è estremamente intuitiva e non è contraddetta dalla realtà dei fatti, almeno per quanto ci appare sperimentalmente. Consideriamo, ora, una generica componente del campo isotropo, per esempio la componente $u_L(r)$, variabile a seconda della distanza da un punto fisso generico. Per procedere è necessario dare una definizione di *derivata*. Il modo più sicuro per definirla nel caso di un processo stocastico qual è $u_L(r)$ è definire la *derivata in senso quadratico medio* du_L/dr (già introdotta in precedenza) tale che:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \frac{u_L(r+\delta) - u_L(r)}{\delta} - \frac{du_L}{dr} \right|^2 = 0 \quad [5.22]$$

Ritorniamo, ora, alla funzione di Auto-correlazione $R_{LL}(r)$ o, più semplicemente, alla sua versione normalizzata $f(r)$. la domanda che ci poniamo è: qual è il comportamento di $R_{LL}(r)$ quando $r = 0$? Essa è sempre una funzione continua, è pari e non è superiore a 1. Oltre a ciò si può dimostrare che:

- la sua derivata prima all'origine è nulla
- la sua derivata seconda all'origine è sempre negativa.

Esercizio 5.5

Dimostriamo che la derivata prima di $R_{LL}(r)$ è nulla.

Dato che il campo è omogeneo, senza perdere generalità poniamo che:

$$R_{LL}(0) = \overline{u_L(0) \cdot u_L(r)}$$

e, per semplicità grafica $x = u_L$. In generale, la derivata della Auto-correlazione è:

$$\frac{d}{dr} R_{xx} = \frac{d}{dr} \overline{x(0) \cdot x(r)} = \overline{x(0) \cdot \frac{d}{dr} x(r)} = R_{xx} \cdot$$

ma, per l'omogeneità del campo, vale anche:

$$\frac{d}{dr} R_{xx} = \frac{d}{dr} \overline{x(-r) \cdot x(0)} = -\frac{d}{dr} \overline{x(r) \cdot x(0)} = -R_{xx} \cdot$$

quindi:

$$\left. \frac{d}{dr} R_{xx} \right|_{x=0} = R_{xx} \cdot (0) = -R_{xx} \cdot (0) = 0$$

Si definisce *microscala di Taylor* λ_f il valore di r in cui la parabola oscurante la funzione di Auto-correlazione normalizzata longitudinale $f(r)$ interseca l'asse r , cioè:

$$\lambda_f = \sqrt{-2 \left/ \frac{d^2 f}{dr^2} \right|_{r=0}} \quad [5.23a]$$

Questa lunghezza caratteristica è stata individuata da Taylor nel 1935 in uno dei primi studi sulla turbolenza isotropa, anche se ora la lunghezza di Kolmogorov ne ha oscurato l'importanza. Per completare il ragionamento è istruttivo sviluppare il seguente ragionamento analitico:

$$\begin{aligned} \overline{u^2} \frac{d^2 f}{dr^2} \Big|_{r=0} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d^2}{dr^2} \overline{u_L(x+r) \cdot u_L(x)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d^2 u_L(x+r)}{dx^2} \cdot u_L(x) = \\ &= \overline{\frac{d^2 u_L}{dx^2} \cdot u_L} = \frac{d}{dx} \left(u_L \cdot \frac{du_L}{dx} \right) - \left(\frac{du_L}{dx} \right)^2 \end{aligned}$$

Dato che:

$$\overline{u_L(x) \cdot \frac{du_L}{dr}} = R \cdot \overline{u_L u_L}$$

che è nulla quando $r = 0$, allora:

$$\overline{u^2} \frac{d^2 f}{dr^2} \Big|_{r=0} = - \overline{\left(\frac{du_L}{dx} \right)^2}$$

A questo punto, la microscala di Taylor può essere espressa mediante i gradienti della velocità longitudinale $u_L(r)$ ottenendo:

$$\frac{2\overline{u^2}}{\lambda_f^2} = - \overline{\left(\frac{du_L}{dx} \right)^2} \quad [5.23b]$$

Ricordando che in condizioni isotrope il tasso medio di dissipazione di energia cinetica è pari a (4.39e):

$$\varepsilon = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u_L}{\partial x} \right)^2}$$

otteniamo:

$$\varepsilon = 15\nu \overline{u^2} / \lambda_f^2 \quad [5.23c]$$

Ragionamenti analoghi possono essere fatti anche per la funzione di correlazione normalizzata $g(r)$ da cui si ottiene la microscala λ_g pari a $\lambda_f / \sqrt{2}$.

5.4.2.3 Implicazioni delle Ipotesi di Kolmogorov

Tra le Funzioni di Correlazione e le Funzioni di Struttura esiste un evidente parallelismo formale come si è visto al punto 3.1.3.4. Entrambe risultano, in generale, descritte da due funzioni speciali: le funzioni di Correlazione Longitudinale $R_{LL}(r)$ e Trasversale $R_{NN}(r)$ descrivono la Funzione di Correlazione e ad esse si contrappongono in termini logici le funzione $D_{LL}(r)$ e $D_{NN}(r)$ che descrivono le Funzioni di Struttura.

In situazioni isotrope si ha che:

$$D_{LL}(r) = 2[R_{LL}(0) - R_{LL}(r)] = 2\left[\overline{u'^2} - R_{LL}(r)\right] \quad [5.24a]$$

$$D_{NN}(r) = 2[R_{NN}(0) - R_{NN}(r)] = 2\left[\overline{u'^2} - R_{NN}(r)\right] \quad [5.24b]$$

Nell'Inertial Subrange valgono le relazioni di Similarità (5.16c), quindi:

$$R_{LL}(r) = \overline{u'^2} - \frac{C_k}{2} (\varepsilon \cdot r)^{2/3} \quad [5.24c]$$

$$R_{NN}(r) = \overline{u'^2} - \frac{2C_k}{3} (\varepsilon \cdot r)^{2/3} \quad [5.24d]$$

5.5 L'ANALISI SPETTRALE DEL CAMPO DI MOTO E LE IPOTESI DI KOLMOGOROV

Al punto 3.2.2 sono stati descritti i principi generali dell'analisi spettrale dei campi stocastici, sia in situazioni generiche che in situazioni di turbolenza isotropa, non tenendo in alcun conto la dimensione caratteristica dei vari disturbi presenti nel *PBL*. In questo paragrafo, invece, si approfondirà l'argomento alla luce delle due ipotesi di Kolmogorov.

Per semplicità espositiva, comunque, è opportuno riassumere brevemente la teoria precedentemente esposta:

- l'analisi spettrale si prefigge l'obiettivo di far emergere dal campo di moto di un fluido turbolento proprio la presenza delle irregolarità a varie dimensioni di cui si è trattato finora. Ciò viene fatto scomponendo la statistica *two-point* del campo, cioè il tensore delle correlazioni, in *modi di Fourier*, cioè in componenti armoniche spaziali. Per comodità, questa analisi viene condotta i per campi stazionari ed omogenei;
- il risultato principale di ciò, è costituito dalla *relazioni di Wiener-Khinchine* che mettono in relazione il tensore delle correlazioni $R_{ij}(\mathbf{r})$ (il vettore \mathbf{r} è la distanza tra i due generici punti considerati) con un nuovo tensore $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ che è la densità spaziale *two-sided* del campo di velocità, funzione del vettore d'onda \mathbf{k} il cui modulo k è pari a $k = 2\pi/l$, dove l è la lunghezza d'onda dell'armonica spaziale. Tali relazioni sono:

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \cdot e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} dk_1 dk_2 dk_3 \quad [5.25a]$$

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\mathbf{r}) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} dr_1 dr_2 dr_3 \quad [5.25b]$$

- il tensore Φ_{ij} ha le dimensioni ($L^5 T^{-2}$), cioè di una lunghezza alla quinta per un tempo alla meno due;
- dato che il tensore di correlazione R_{ij} è simmetrico rispetto all'origine ed è una grandezza reale, il tensore dello spettro di velocità avrà la proprietà seguente:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \Phi_{ij}^*(\mathbf{k}) = \Phi_{ij}(-\mathbf{k}) \quad [5.25c]$$

dove Φ_{ij}^* è il complesso coniugato di Φ_{ij} .

- se il moto del fluido è incomprimibile (ipotesi decisamente buona nel *PBL*) si può di-

mostrare che vale la seguente relazione di ortogonalità:

$$k_i \Phi_{ij}(\mathbf{k}) = k_j \Phi_{ij}(\mathbf{k}) = 0 \quad [5.25c]$$

- le componenti diagonali Φ_{ii} del tensore sono reali e non negative.
- Il tensore $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ rappresenta la controparte, nello spazio dei numeri d'onda, degli Stress di Reynolds, cioè $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ è il contributo per unità di volume dello spazio dei numeri d'onda, del modo $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ allo stress $\overline{u_i u_j}$. In particolare è facile vedere che:

$$R_{ij}(0) = \overline{u_i u_j} = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \cdot dk_1 dk_2 dk_3 \quad [5.25d]$$

- dato che le componenti diagonali Φ_{ii} del tensore sono reali e non negative, a $\mathbf{r} = 0$ si ha che l'energia cinetica turbolenta e può essere espressa come:

$$2e = \sum_{i=1}^3 R_{ii}(0) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ii}(\mathbf{k}) \cdot dk_1 dk_2 dk_3 \quad [5.25e]$$

- l'informazione direzionale contenuta nel tensore dello spettro della velocità può essere rimossa, giungendo alla definizione di *funzione di energia spettrale* $E(k)$ (*Energy Spectrum*) che è uno scalare e che dipende solo dal modulo k del vettore numero d'onda. Per giungere alla sua definizione, si considera la traccia di Φ_{ij} (cioè la somma dei suoi elementi diagonali) e la si integra su una superficie sferica nello spazio dei numeri d'onda di raggio $k = |\mathbf{k}|$, ottenendo:

$$E(k) = \frac{1}{2} \oint \Phi_{ii}(\mathbf{k}) \cdot d\sigma \quad [5.25f]$$

dove $d\sigma$ è una porzione infinitesima della sfera su cui è esteso l'integrale. $E(k)$ è reale e non negativo, ha le dimensioni di ($L^3 T^{-2}$) ed è facile vedere che:

$$e = \int_0^{\infty} E(k) \cdot dk \quad [5.25g]$$

In pratica $E(k)$ rappresenta il contributo all'energia cinetica turbolenta dei modi di Fourier con numero d'onda (in modulo) compresi tra k e $k + dk$;

- la misura diretta del tensore $\Phi_{ij}(\mathbf{r})$ è al di là delle possibilità tecnologiche attuali. Ciò che è possibile fare è realizzare misure in campo protratte nel tempo, ma in un numero limitato di punti, ed usare l'ipotesi di Taylor stimando, quindi, le funzioni di correlazione *lungo la direzione del vento medio*. In particolare, si è in grado di stimare le correlazioni R_{LL} , R_{NN} e R_{33} lungo la direzione $(r,0,0)$, se l'asse x è allineato con la direzione media del moto. In questo caso possono essere determinati gli *spettri monodimensionali* (ed anche quello verticale) definiti come:

$$\Phi_{11}(\kappa_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{LL}(r,0,0) \cdot e^{-j\kappa_1 r} dr \quad [5.26a]$$

$$\Phi_{22}(\kappa_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{NN}(r,0,0) \cdot e^{j\kappa_1 r} dr \quad [5.26b]$$

Analogamente si può procedere per la stima dello spettro della componente verticale del moto Φ_{33} . In generale si ha che:

$$\Phi_{ij}(\kappa_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(r, 0, 0) \cdot e^{j\kappa_1 r} dr \quad [5.26c]$$

Seguendo la convenzione quasi universalmente adottata in Letteratura, invece di usare Φ_{11} , Φ_{22} , Φ_{33} ed in generale Φ_{ij} , si considerano come spettri monodimensionale le quantità $E_{11}(k_1) = 2\Phi_{11}$, $E_{22}(k_1) = \Phi_{22}$ e $E_{33}(k_1) = \Phi_{33}$. Sia gli spettri Φ_{ii} che gli spettri E_{ii} hanno dimensioni ($L^3 T^{-2}$). Si ottiene, poi, immediatamente che:

$$R_{11}(r, 0, 0) = \int_0^{\infty} E_{11}(k_1) \cdot \cos(k_1 r) dk_1 \quad [5.26d]$$

e relazioni analoghe per le altre Auto-correlazioni. Gli spettri monodimensionali sono legati al tensore di densità spettrale della velocità dalle relazioni:

$$E_{11}(k_1) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11}(\mathbf{k}) \cdot dk_2 dk_3 \quad [5.2e-5.26e]$$

$$E_{22}(k_1) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{22}(\mathbf{k}) \cdot dk_2 dk_3 \quad [5.26f]$$

In condizioni di isotropia, l'intero tensore $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ è completamente determinato dall'*Energia spettrale* $E(k)$ e tra le due grandezze sussiste la relazione seguente:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \cdot \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \quad [5.27a]$$

dove k_i e k_j sono le proiezioni del vettore \mathbf{k} nelle direzioni cardinali i e j . Oltre a ciò, sempre in condizioni stazionarie, omogenee ed isotrope, gli spettri monodimensionali sono determinati anche dall'*Energia Spettrale* $E(k)$. In effetti si mostra che:

$$E_{11}(k_1) = \int_{k_1}^{\infty} \frac{E(k)}{k} \cdot \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2} \right) \cdot dk \quad [5.27b]$$

Questa relazione può, poi, essere invertita per ottenere $E(k)$ in termini di $E_{11}(k_1)$:

$$E(k) = \frac{k^3}{2} \cdot \frac{d}{dk} \left[\frac{1}{k} \cdot \frac{dE_{11}(k)}{dk} \right] \quad [5.27c]$$

quindi la conoscenza di $E(k)$ consente di conoscere $E_{11}(k)$ e viceversa, purché $E(k)$ sia integrabile e $E_{11}(k)$ sia differenziabile. Analoghi ragionamenti possono essere fatti per gli spettri E_{22} ed E_{33} giungendo alle relazioni seguenti:

$$E_{22}(k_1) = E_{33}(k_1) = \frac{1}{2} \int_{k_1}^{\infty} \frac{E(k)}{k} \cdot \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2} \right) \cdot dk \quad [5.27d]$$

$$E(k) = -k \left\{ \frac{dE_{11}(k)}{dk} + \int_k^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{dE_{22}(k_1)}{dk_1} \cdot dk_1 \right\} \quad [5.27e]$$

Oltre a ciò, si può ottenere anche una relazione che lega tra loro lo spettro longitudinale E_{11} e quello trasversale E_{22} (un'analogha relazione può essere scritta anche per lo spettro monodimensionale E_{33}). Tale relazione è la seguente:

$$E_{22}(k_1) = \frac{1}{2} \left[E_{11}(k_1) - k_1 \cdot \frac{dE_{11}(k_1)}{dk_1} \right] \quad [5.27f]$$

5.5.1 ISOTROPIA LOCALE ED IPOTESI DI KOLMOGOROV

Le ipotesi di Kolmogorov si applicano nello spazio fisico a disturbi di piccola scala, scala che sta all'interno dell'*Universal Equilibrium Range* definito da $l < l_E$, dove l è la lunghezza di scala del generico disturbo. Nello spazio dei numeri d'onda l'intervallo corrispondente è $k > k_E = 2\pi/l_E$.

In accordo con l'ipotesi di isotropia locale, le proprietà statistiche del campo di velocità nell'*Universal Equilibrium Range* sono isotrope e, di conseguenza, per $k > k_E$, il tensore dello spettro di velocità $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ può essere espresso in termini di *Energia Spettrale* $E(k)$, secondo la relazione (5.27a), e quest'ultima funzione ($E(k)$ è uno scalare) può essere, a sua volta, espressa in termini di spettri monodimensionali E_{11} , E_{22} ed E_{33} dalle relazioni (5.26a-b).

In accordo con la Prima Ipotesi di Kolmogorov, le proprietà statistiche del campo di moto devono poter essere descritte solo dal tasso di dissipazione medio dell'energia turbolenta ε e dalla viscosità ν . Ciò vale anche per gli spettri, visto che anch'essi sono una proprietà statistica del campo. Come descriveremo più diffusamente al Cap. 7, possiamo utilizzare la Teoria della Similarità per individuare (almeno parzialmente) una relazione che leghi gli spettri a queste due proprietà del fluido. In poche parole, la Teoria della Similarità:

- richiede di formare con le variabili in gioco (nel nostro caso le densità spettrali, il numero d'onda k , il tasso di dissipazione ε e la densità ν) tutti i possibili gruppi adimensionali;
- se i gruppi adimensionali si riducono ad uno solo, tale gruppo sarà una costante C di cui nulla dice la Teoria della Similarità e che dovrà essere individuato sperimentalmente;
- se i gruppi sono almeno due, uno di essi sarà descritto da una funzione dei rimanenti. Di questa funzione nulla dice la Teoria della Similarità ed essa dovrà essere individuata direttamente dalle misure sperimentali.

Nel nostro caso, per prima cosa consideriamo il numero d'onda k che ha le dimensioni (L^{-1}). Dato che precedentemente abbiamo introdotto la lunghezza di scala di Kolmogorov $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, viene quindi naturale individuare come primo gruppo adimensionale $k\eta = k(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$.

Ricordando che sia $E(k)$ che gli spettri monodimensionali hanno dimensioni (L^3T^{-2}), il secondo (e ultimo) gruppo adimensionale distinto che individuiamo è $E(k) / (\varepsilon^{2/3}k^{-5/3})$. Pertanto, per la Teoria della Similarità, i due gruppi adimensionali individuati sono legati tra loro da una relazione funzionale del tipo:

$$E(k) = \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \cdot F(k\eta) \quad [5.28a]$$

dove $F(k\eta)$ è una funzione universale di Similarità da individuarsi sperimentalmente. Questa relazione, in accordo con la Prima Ipotesi di Kolmogorov, si applica quando $k > k_E$, cosa che corrisponde a:

$$k\eta > \frac{2\pi\eta}{l_E} \quad [5.28b]$$

La Seconda Ipotesi di Kolmogorov si applica, invece, alle scale dell'*Inertial Subrange*, cioè quando $\eta \ll l \ll l_1$ o, più precisamente, quando $l_D < l < l_E$. Il corrispondente intervallo nello spazio dei numeri d'onda è $k_E < k < k_D$ e anche:

$$k_D \eta = \frac{2\pi\eta}{l_D} > k\eta > \frac{2\pi\eta}{l_E} = k_E \eta$$

Nell'*Inertial Subrange*, in accordo con la Seconda Ipotesi di Kolmogorov, l'*Energia Spettrale* $E(k)$ possiede una forma universale determinata unicamente dal tasso medio di dissipazione di energia cinetica ε ed indipendentemente dalla viscosità ν . Dato che l'unico gruppo adimensionale che si riesce ad individuare è $E(k)/(\varepsilon^{2/3}k^{-5/3})$, la funzione universale $F(k\eta)$ diventa una costante C è quindi si ha che nell'*Inertial Subrange* la forma analitica dell'energy Spectrum è:

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad [5.29a]$$

Questa è la famosa legge dei meno cinque terzi che descrive l'*Energia Spettrale* in funzione del numero d'onda e la costante C è una costante universale che le misure sperimentali pongono pari a $C = 1.5$.

Ragionamenti del tutto analoghi possono essere fatti anche per gli spettri monodimensionali, la cui espressione analitica nell'*Inertial Subrange* diventa:

$$E_{11}(k) = C_1\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad [5.29b]$$

$$E_{22}(k) = C_1'\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad [5.29c]$$

$$E_{33}(k) = C_1''\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad [5.29d]$$

Utilizzando poi le relazioni (5.27e) e (5.27f) si ottiene facilmente che:

$$C_1 = \frac{18}{55}C \approx 0.49 \quad C_1' = \frac{4}{3}C_1 = \frac{24}{55}C \approx 0.65$$

5.5.2 UN MODELLO SPETTRALE

Il modello che emerge dall'analisi fatta sui disturbi presenti in un moto turbolento è estremamente semplice e possiamo sintetizzarlo così:

- c'è un limite superiore alla dimensione caratteristica dei disturbi, data dalla dimensione caratteristica L del moto stesso. Nel caso del *PBL* tale dimensione caratteristica è dell'ordine di 10^3 m. Questi disturbi di grandi dimensioni (tipicamente i vortici convettivi) sono sostanzialmente anisotropi e catturano energia cinetica dallo *shear* del moto medio ad un tasso pari ad ε . Indichiamo con l_1 la dimensione caratteristica dei disturbi di maggiore dimensione.
- I disturbi di maggior dimensione sono i primi a formarsi nel fluido e, vista la loro anisotropia, sono instabili e si frammentano in vortici di dimensioni inferiori, anch'essi instabili. Questi ultimi, per la loro instabilità, si frammentano a loro volta in disturbi più piccoli in un processo a *cascata* che stabilisce una *gerarchia dimensionale decrescente* di disturbi;
- man mano le dimensioni dei disturbi prodotti dal processo di frammentazione diminuisce, diminuisce pure l'anisotropia caratteristica del disturbo stesso e quindi la *parentela* dal moto medio. Convenzionalmente si definisce una dimensione caratteristica l_E (pari a $1/6 l_1$) come linea di demarcazione dimensionale tra i disturbi anisotropi e quelli isotropi. L'intervallo dimensionale $l_1 \div l_E$ raccoglie tutti i disturbi anisotropi. Tale intervallo è noto come *Energy-containing Range*, visto che per la loro anisotropia tali disturbi sottraggono energia al moto medio;
- per i disturbi con scala caratteristica $l < l_E$, la principale caratteristica è l'isotropia locale

che impedisce che essi possano sottrarre energia al moto medio. Pertanto la conseguenza principale di tutto ciò è che ogni disturbo trasmette ai disturbi che si generano per la sua frammentazione la stessa energia acquisita dai disturbi da cui sono nati. In sostanza c'è una *cascata energetica* che si incarica di trasmettere ai piccoli disturbi l'energia che i vortici più grossi hanno acquisito dal moto medio e che è pari a ε . E' consuetudine indicare col termine *Universal Equilibrium Range* l'intervallo dimensionale $l < l_E$;

- il numero di Reynolds Re_l che può essere associato a ciascun disturbo a scala l in un moto a grande Re resta elevato e quindi il disturbo resta immune dall'influenza delle forze viscosse fino a che l si avvicina ad una scala caratteristica η (la lunghezza di Kolmogorov) per la quale $Re_\eta = 1$. A questo punto le forze viscosse interferiscono decisamente col disturbo tendendo a distruggerlo, dissipandolo in calore. Convenzionalmente è stata definita una lunghezza caratteristica $l_D = 60\eta$, al di sopra della quale i disturbi non vengono influenzati dalla viscosità. L'intervallo dimensionale $l_E > l > l_D$ è noto come *Inertial Subrange*. In questo intervallo dimensionale i disturbi dipendono solo dal tasso di energia cinetica ε che si trasmettono l'un l'altro;
- per tutti i disturbi a scala l inferiore a l_D la dissipazione viscosa è l'elemento essenziale. Essi ne sono preda e ad essa soccombono dissipandosi in calore. L'intervallo dimensionale $l < l_D$ è noto come *Dissipation Range*.

A fronte di questa semplice visione fenomenologica, non tutto è stato definito quantitativamente. In particolare sarebbe interessante poter disporre di un modello spettrale che copra sia l'*Energy-containing Range*, sia l'*Universal Equilibrium Range*. Finora siamo riusciti ad ottenere un'espressione per l'*Energia Spettrale* $E(k)$ e per gli spettri monodimensionali $E_{11}(k)$, $E_{22}(k)$ ed $E_{33}(k)$ un'espressione analitica effettivamente usabile solo nell'*Inertial Subrange*, mentre per il *Dissipation Range* è stata ottenuta una forma analitica che richiede l'individuazione di una funzione universale di Similarità. Poco si può fare di più in termini puramente teorici: le restanti informazioni devono essere ottenute dalle misure.

L'analisi spettrale ha messo a dura prova le capacità sperimentali dei fluidodinamici, dato che per coprire il grande numero di decenni su cui si estende l'intervallo spettrale di interesse è necessario disporre di strumentazione ad alta precisione e a risposta rapida, oltre a sistemi di acquisizione che lavorano a frequenze elevate. Comunque in laboratorio molto si è fatto in proposito, ottenendo risultati molto interessanti. Di fatto, in laboratorio può essere misurata l'*Energia Spettrale* e gli spettri monodimensionali (senza invocare l'Ipotesi di Taylor) e si può esplorare anche il tensore delle densità spettrali Φ_{ij} . Dato, però, che il nostro interesse è focalizzato unicamente alla turbolenza presente nel *PBL*, il problema è ben diverso. Ad oggi, la tecnologia disponibile non ci consente di andare oltre alla misura diretta degli spettri monodimensionali, quasi sempre ottenuti invocando l'Ipotesi di Taylor. E questo è un problema ancora da risolvere.

Nella parte restante del paragrafo sintetizzeremo i principali risultati ottenuti in laboratorio, presentati nella forma di un modello spettrale analitico, mentre rimandiamo al Cap.7 i risultati dell'analisi spettrale effettuata nel *PBL*.

Seguendo Pope(2000, pag.232), la sintesi dei risultati di laboratorio e di quanto si è riusciti ad ottenere dall'utilizzo delle due Ipotesi di Kolmogorov è costituita da un modello analitico spettrale per l'*Energia Spettrale* che così è stato formulato:

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3} k^{-5/3} f_L(kL) \cdot f_\eta(k\eta) \quad [5.30a]$$

La funzione f_L oltre che dipendere dal numero d'onda k , dipende dalla scala del moto medio L e si incarica di tener conto dell'anisotropia caratteristica dell'*Energy-containing Range*. Essa non potrà mai essere universale e dipenderà sempre dalle caratteristiche del particolare moto medio che si è instaurato. La sua forma analitica scelta è la seguente:

$$f_L(kL) = \left(\frac{kL}{[(kL)^2 + c_L]^{1/2}} \right)^{5/3 + p_0} \quad [5.30b]$$

dove c_L e p_0 sono due costanti, entrambe positive, da determinare sperimentalmente. Come si può vedere, f_L tende a uno quando kL assume valori elevati e ciò esprime analiticamente il fatto che l'effetto dell'anisotropia e, quindi, dell'influenza del moto medio diminuisce col diminuire della scala del disturbo. Oltre a ciò, quando kL diventa piccolo, la funzione f_L risulta tale che lo spettro varia col numero d'onda come k^{p_0} . Dato che p_0 è positiva, lo spettro cresce con il numero d'onda. La dipendenza dalla scala esterna L fa sì che questa funzione non sia universale. Comunque, dai dati sperimentali raccolti in laboratorio si è ottenuto per c_L e per p_0 rispettivamente i valori 6.78 e 2.

La funzione f_η si incarica, invece, di descrivere ciò che avviene nel *Dissipation Range*. Per essa è stata proposta la seguente formulazione analitica:

$$f_\eta(k\eta) = \exp \left\{ -\beta \left[(k\eta)^4 + c_\eta^4 \right]^{1/4} - c_\eta \right\} \quad [5.30c]$$

dove β e c_η sono costanti positive. Questa funzione, per la prima ipotesi di Kolmogorov, è una funzione universale, cosa effettivamente confermata dai dati sperimentali che hanno fornito per le due costanti β e c_η rispettivamente i valori 5.2 e 0.4.

5.5.2 LO SPETTRO DEGLI SHEAR-STRESS

Fin qui abbiamo esaminato gli spettri di velocità solo in condizioni isotrope o, in alternativa, la porzione isotropa degli spettri in una turbolenza localmente isotropa. In questi casi gli spettri $\Phi_{12}(\mathbf{k})$ e $E_{12}(k_1)$ degli *shear-stress* sono nulli, proprio per la condizione di isotropia. Consideriamo, ora, una situazione in cui sia presente un gradiente medio di velocità, per esempio il gradiente:

$$S = \frac{\overline{\partial u_1}}{\partial x_2} > 0 \quad [5.31]$$

Ovviamente, la presenza del gradiente medio di velocità fa sì che la turbolenza indotta sia anisotropa. Cerchiamo, ora, una qualche relazione spettrale che possa esprimere $E_{12}(k)$ in modo da poter determinare il contributo delle varie scale di moto allo stress complessivo $\overline{u_1 u_2}$.

Per quanto già sappiamo, è naturale pensare che il maggior contributo spettrale allo stress provenga dai numeri d'onda appartenenti all'*Energy-containing Range* e che a numeri d'onda superiori $E_{12}(k)$ decadrà molto più rapidamente di quanto faccia $E_{11}(k)$. Se $\tau(k)$ è il tempo di scala caratteristico del numero d'onda k , l'influenza del gradiente medio di velocità S è caratterizzato dal parametro adimensionale $S\tau(k)$. E' ragionevole supporre che, se $S\tau(k)$ è piccolo, altrettanto piccolo sarà il livello di anisotropia creata dal gradiente S .

Nel *Dissipation Range* il tempo di scala appropriato è τ_η , perciò, come suggerito in origine da Corrsin (1958), un criterio per l'isotropia alle scale più piccole è:

$$S\tau_\eta \ll 1 \quad [5.32a]$$

Nell'*Inertial Subrange*, la scala temporale appropriata è quella formata da k e da ε e quindi $\tau(k) = (k^2 \varepsilon)^{-1/3}$. Perciò, il criterio per l'isotropia alla scala k può essere così formulato:

$$S\tau(k) = Sk^{-2/3} \varepsilon^{-1/3} \ll 1 \quad [5.32b]$$

Il piccolo livello di anisotropia in questa zona spettrale può essere visto come una piccola perturbazione (causata da S) dello stato isotropico di fondo, caratterizzato da ε . Pertanto, lo spettro $E_{12}(k_1)$ dipenderà da k_1 , ε e da S e, visto che l'anisotropia è considerata come una piccola perturbazione, la dipendenza da S sarà lineare. A conti fatti (Pope, 2000, pag. 246) si ha che:

$$E_{12}(k_1) = -C_{12} S \varepsilon^{1/3} k_1^{-7/3} \quad [5.33]$$

dove C_{12} è una costante con un valore prossimo a 0.15.

5.6 LA STRUTTURA LOCALE DEI CAMPI DI TEMPERATURA

Dopo aver trattato la struttura locale del campo di moto sia nel dominio del tempo che in quello delle frequenze (spaziali), accingiamoci ora a trattare la struttura locale dei campi di scalari passivi come la temperatura e la concentrazione di sostanze passive (vapor d'acqua, sostanze inquinanti, radionuclidi, ecc.) in un fluido (come il *PBL*) caratterizzato da un elevato numero di Reynolds. Lo studio, come fin qui fatto, sarà condotto dal punto di vista Euleriano, anche se, per comodità di comprensione, a volte si utilizzeranno concetti Lagrangiani. In effetti è più semplice ed intuitivo immaginarsi, per esempio, il campo di temperatura come il risultato del movimento di particelle, ciascuna dotata di una propria temperatura individuale. Ognuno dei vortici della gerarchia, che si viene a generare per continua frammentazione, sarà costituito da particelle con propria temperatura e, con l'evoluzione di ognuno di essi, le varie particelle si verranno a rimescolare nello spazio mutando rapidamente e irregolarmente il campo di temperatura che un osservatore Euleriano vede dall'esterno. Qui di seguito tratteremo il caso della temperatura come rappresentativo di tutti i campi scalari passivi seguendo prevalentemente Monin e Yaglom (2007b, pag.377).

5.6.1 CONSIDERAZIONI DI BASE

Supponiamo che $\theta(\mathbf{x},t)$ sia la temperatura trasportata dalle particelle che si muovono nel campo di moto turbolento e che essa non abbia un effetto apprezzabile sul livello di turbolenza. In sostanza supponiamo che la temperatura sia uno scalare passivo. In altre parole, consideriamo la convezione forzata in un campo di temperatura disomogeneo in presenza di una turbolenza sviluppata di origine dinamica. Come abbiamo visto, le ipotesi di similarità sono basate su idee fisiche che indicano che, ad elevati numeri di Reynolds, le proprietà statistiche delle fluttuazioni di velocità in ogni regione dello spazio-tempo sufficientemente piccolo sono isotrope e quasi-stazionarie, completamente definite dal tasso medio di dissipazione di energia cinetica ε e dalla viscosità cinematica ν . E', quindi, naturale aspettarsi che le fluttuazioni di temperatura derivanti dal rimescolarsi di porzioni di fluido a differenti temperature iniziali sia isotropa e stazionaria in piccole regioni dello spazio-tempo. Di conseguenza, il campo scalare $\theta(\mathbf{x},t)$ può essere considerato localmente isotropo in una regione dello spazio-tempo in cui il campo di moto è localmente isotropo. Tuttavia non c'è ragione alcuna di supporre che i suoi parametri statistici dipendano solo da ε e da ν . Infatti, l'evoluzione del campo di temperatura è descritta, in termini istantanei, dall'equazione di trasferimento del calore che contiene la diffusività molecolare termica χ . Perciò è chiaro che il valore di χ può influenzare la struttura locale del campo $\theta(\mathbf{x},t)$. Questo effetto non può essere trascurato: nel caso di un intenso rimescolamento turbolento, la conducibilità termica molecolare gioca un ruolo importante dato che i moti turbolenti possono far sì che volumi di fluido con temperature molto differenti si avvicinino, con un conseguente rapido aumento dei gradienti di temperatura. Tuttavia, anche se aggiungiamo χ ai parametri ε e ν , ancora non otteniamo l'insieme completo di parametri che definiscono lo stato statistico delle fluttuazioni di temperatura a piccola scala.

Quando abbiamo esplorato la struttura locale del campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, abbiamo assunto che il numero di Reynolds $Re = L \cdot \Delta U / \nu$ (si ricordi che ΔU è la tipica differenza di velocità su distanze dell'ordine di L) fosse sufficientemente elevato ed abbiamo considerato il processo di frammentazione delle disomogeneità macrostrutturali. Abbiamo notato che, di tutte le grandezze che caratterizzano i moti turbolenti a grande scala, l'unica che influenzava sufficientemente i disturbi a piccola scala era il tasso medio di trasferimento di energia dai moti a grande scala a quelli a piccola scala. Ciò alla fine determinava la distruzione dei disturbi a scala molto piccola a causa della viscosità molecolare. Il campo di temperatura può essere considerato allo stesso modo. Possiamo, tuttavia, assumere elevato non solo il numero di Reynolds Re , ma anche il numero di Peclet definito come:

$$Pe = \frac{L_\theta \cdot \Delta_\theta U}{\chi} \quad [5.34]$$

dove L_θ è una lunghezza caratteristica pari alla distanza tipica per cui si nota un'apprezzabile variazione della temperatura media e $\Delta_\theta U$ è la tipica variazione della velocità media del vento sulla distanza L_θ . Quando L_θ è maggiore di L , possiamo sostituire L_θ e $\Delta_\theta U$ con L e ΔU .

5.6.2 IL TASSO DI DISSIPAZIONE DELLE DISOMOGENEITÀ TERMICHE

La frammentazione a cascata dei disturbi del campo di velocità porterà anche alla frammentazione delle disomogeneità macrostrutturali di temperatura a scala L_θ in disturbi a piccola scala del campo $\theta(\mathbf{x}, t)$. Nelle regioni dello spazio-tempo con dimensioni lineari molto inferiori a L_θ , la temperatura media $\bar{\theta}$ può essere considerata praticamente costante. La tipica fluttuazione $\theta' = \theta - \bar{\theta}$ sarà, perciò, una misura del grado di disomogeneità del campo di temperatura in quella regione.

A tal proposito, è conveniente considerare la quantità:

$$H = \frac{1}{2} \int_V \rho \cdot \overline{[\theta(\mathbf{x}, t) - \bar{\theta}]^2} dV = \frac{1}{2} \int_V \rho \cdot \overline{\theta'^2} dV \quad [5.35]$$

come misura della disomogeneità nel volume V . Tale grandezza si basa sulla semivarianza della fluttuazioni di temperatura $\overline{\theta'^2}/2$. Per visualizzare meglio il concetto, riferendoci ad una regione sferica dello spazio di raggio l , possiamo immaginare questa quantità come la metà della deviazione quadratica media delle fluttuazioni di temperatura in questa regione rispetto alla sua temperatura media; con ciò abbiamo caratterizzato il contributo dovuto a disturbi di una data lunghezza di scala l alla disomogeneità del campo. La frammentazione delle disomogeneità termiche risulterà quindi nel fatto che la misura totale della disomogeneità di temperatura sarà concentrata prevalentemente nei disturbi a piccola scala. Immaginiamo di isolare un disturbo, che si presenterà come una struttura sostanzialmente coerente costituita da particelle le cui temperature conducono al grado di disomogeneità quantificato da $\overline{\theta'^2}/2$. Tale struttura si muoverà nello spazio-tempo senza alterare questa grandezza, esattamente come non varia la propria energia cinetica in un moto inerziale. Una variazione nel grado di disomogeneità di temperatura può essere prodotto solo dalla conduzione termica molecolare, che porta ad un'equalizzazione della temperatura tra particelle contigue, cioè ad una riduzione complessiva di $\overline{\theta'^2}/2$.

Sia N_θ il *tasso di dissipazione medio delle disomogeneità di temperatura*, cioè il tasso di riduzione della semivarianza delle fluttuazioni di temperatura dovuto alla conduzione termica molecolare. Per elevati numero di Reynolds e di Peclet il tasso di dissipazione della temperatura N_θ sarà quasi completamente concentrato nei disturbi a scala più piccola e sarà pari al *trasporto della misura di disomogeneità termica lungo l'intero intervallo spettrale*, cioè sarà pari

all'aumento nell'unità di tempo del contributo della semivarianza di temperatura associata ai disturbi a piccola scala $l \ll \min(L_0, L)$ e dovuti alla frammentazione delle disomogeneità termiche a grande scala.

E' chiaro che la grandezza N_θ può rimanere costante nel tempo se le disomogeneità a grande scala sono mantenute attive da sporgenti di calore esterne che producono una distribuzione fissa di temperatura media (la presenza della radiazione solare nel *PBL*). Se non fosse così, N_θ dipenderebbe dal tempo. Tuttavia la variazione temporale di N_θ sarà molto lenta se paragonata ai tempi caratteristici di scala dei moti turbolenti a lunghezza di scala sufficientemente piccola. Perciò, quando consideriamo le proprietà statistiche dei disturbi termici a piccola scala, N_θ può essere considerato costante.

Si può mostrare che, usando l'equazione di conservazione dell'energia termica:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \quad [5.36]$$

in un volume V sufficientemente grande, in modo da poter trascurare il trasferimento convettivo di calore ai bordi, la riduzione della misura della disomogeneità termica può essere descritta da:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_V \rho \cdot \overline{[\theta(\mathbf{x}, t) - \bar{\theta}]^2} dV \right] = -\chi \int_V \rho \overline{\left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)^2} dV \quad [5.37]$$

Di conseguenza. Il tasso di riduzione specifica (per unità di massa) della misura di disomogeneità termica è dato da:

$$N_\theta = \chi \overline{\left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)^2} \quad [5.38]$$

Quando la turbolenza è omogenea, il trasporto convettivo medio delle fluttuazioni θ' è nullo non solo dopo aver mediato in un volume di grandi dimensioni, ma anche in ogni punto. Quando poi la turbolenza è localmente isotropa, il contributo del trasporto convettivo al tasso di variazione della semivarianza delle fluttuazioni di temperatura sarà determinato dalle derivate spaziali del moto, molto regolare a grandi scale e quindi trascurabili. Pertanto:

$$N_\theta = \chi \overline{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right)^2} \quad [5.39]$$

Questa relazione è molto simile a quella che descrive il tasso medio di dissipazione di energia cinetica ε e ciò non è un caso, visto che le due grandezze hanno un significato fisico simile.

5.6.3 LE IPOTESI DI KOLMOGOROV PER IL CAMPO DI TEMPERATURA

Quando consideriamo il campo di temperatura, l'*Universal Equilibrium Range* coinvolge disomogeneità termiche aventi una lunghezza di scala $l \ll L_0 = \min(L, L_0)$. La Prima Ipotesi di Kolmogorov, in questo caso, assumerà la forma seguente:

Prima Ipotesi di Kolmogorov

In una situazione di turbolenza sviluppata con Re e Pe sufficientemente elevati, le caratteristiche statistiche per le differenze di velocità e di temperatura ad un arbitrario e finito insieme di punti di una regione V dello spazio di dimensione $l \ll L_0$ saranno invarianti a tutte le rotazioni e le traslazioni di questo insieme di punti, a

condizione che queste trasformazioni non portino questi punti oltre i confini di V e sono determinate solo dai parametri ε , ν , N_θ e χ .

Generalizziamo, ora, la Seconda Ipotesi di Kolmogorov alle differenze di temperatura. Per prima cosa notiamo che, per Pe sufficientemente elevato, la conducibilità termica molecolare, caratterizzata da χ , gioca un ruolo apprezzabile solo per disturbi a piccola scala. Ciò deriva dal fatto che il numero di Peclet è il rapporto tra i termini dell'equazione del calore che descrivono la convezione di calore e quelli che descrivono la conduzione termica molecolare. Perciò quest'ultima è importante solo per disturbi con $Pe \leq 1$. E' naturale supporre che Pe decresca monotonicamente al decrescere della lunghezza di scala dei disturbi. Quindi, per Pe sufficientemente elevati del flusso medio, dovrà esistere un sottointervallo dimensionale per la lunghezza di scala l caratteristica dei disturbi per cui $Pe \gg 1$. In questo sottointervallo, in cui l è sempre molto inferiore a L_0 , tutte le caratteristiche statistiche dovranno essere indipendenti da χ . Questo intervallo può essere chiamato *Convective Subrange*.

Se tentiamo di determinare l'ordine di grandezza del limite inferiore del *Convective Subrange* incontriamo una specifica difficoltà dovuta alla presenza di ε e di χ che hanno le stesse dimensioni (L^2T^{-1}). Pertanto, i parametri adimensionali che descriveranno la turbolenza a piccola scala in presenza di disomogeneità termiche sarà, in generale, funzione del *Numero di Prandtl* definito come $Pr = \nu/\chi$. In particolare il rapporto tra la lunghezza di scala dei piccoli disturbi che sono apprezzabilmente influenzati dalla conducibilità molecolare e la lunghezza di Kolmogorov η sarà anch'esso funzione di Pr . Perciò il *Convective Subrange* è determinato da:

$$L_0 \gg l \gg \lambda(Pr) \cdot \eta \quad [5.40]$$

dove $\lambda(Pr)$ è una funzione universale. Invece di η si potrebbe usare la cosiddetta *lunghezza di scala interna della temperatura* definita come:

$$\eta_\theta = \left(\chi^3 / \varepsilon\right)^{1/4} = \eta \cdot (Pr)^{-3/4} \quad [5.41]$$

tuttavia, la conclusione che per $l \gg \eta_\theta$ siamo necessariamente entro i limiti del *Convective Subrange* non è detto che sia giustificata, dato che la possibilità di ignorare la conducibilità molecolare rispetto alla convezione dipenderà dal campo di velocità che è influenzato dalla viscosità ν . Tuttavia, queste considerazioni sono importanti solo nei casi limite $\nu \ll \chi$ e $\nu \gg \chi$. Si può mostrare (Monin e Yaglom, 2007, pag. 433) che:

- se $\nu \ll \chi$, il *Convective Subrange* si estende solo alle scale $l \gg \eta_\theta$
- se $\nu \gg \chi$, il *Convective Subrange* si estende solo alle scale $l \gg (\nu\chi^2/\varepsilon)^{1/4} = (\eta\eta_\theta)^{1/3}$

Nelle situazioni più normali, quando $Pr \cong 1$ (e questo è il caso del *PBL* dove $Pr = 0.7$), η , η_θ , e $(\eta\eta_\theta)^{1/3}$ sono dello stesso ordine di grandezza e la funzione universale $\lambda(Pr)$ degenera in un coefficiente numerico dell'ordine dell'unità. Perciò, quando il numero di *Prandtl* è circa unitario, il limite superiore dei sottointervalli delle lunghezze di scala in cui la dissipazione molecolare e la conducibilità termica molecolare sono ancora importanti possono essere considerati coincidenti.

Consideriamo ora l'*Inertial-Convective Subrange* definito come:

$$L_0 \gg l \gg \eta_0 = \max(\eta, \eta_\theta) \quad [5.42]$$

che è l'intersezione dell'*Inertial* e del *Convective Subrange*. Per disturbi aventi una dimensione di scala appartenente a questo sottointervallo, possiamo ignorare l'effetto della viscosità e della conducibilità molecolare. In altre parole, possiamo formulare l'ipotesi seguente:

Seconda Ipotesi di Kolmogorov

In una situazione di turbolenza sviluppata con Re e Pe elevati, le caratteristiche statistiche per le differenze di velocità e di temperatura in un insieme finito di punti

tali che tutte le distanze r_k tra di essi soddisfa la disuguaglianza $L_0 \gg r_k \gg \eta_0 = \max(\eta, \eta_0)$ sono unicamente determinate dai valori dei parametri ε e N .

Le due ipotesi di Similarità conducono ad alcune semplici conseguenze per le proprietà statistiche della differenza spaziale di temperatura:

$$\Delta_r \theta = \theta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \theta(\mathbf{x}) \quad [5.43]$$

quando il moto turbolento ha elevati valori di Re e di Pe . In particolare, quando si considera l'*Universal Equilibrium Range* ($r_i \ll L_0$), la Funzione di Struttura spaziale della temperatura

$$D_{\theta\theta}(\mathbf{r}) = \overline{(\Delta_r \theta)^2} \quad [5.44]$$

dipende solo da $r = |\mathbf{r}|$, e sarà della forma:

$$D_{\theta\theta}(r) = N_\theta \varepsilon^{-1/2} \chi^{1/2} \cdot h\left(\frac{r}{\eta_\theta}; \frac{\nu}{\chi}\right) \quad [5.45]$$

dove la funzione $h(x, z)$ è una funzione universale di due variabili. Per distanze r sufficientemente piccole, $\Delta_r \theta$ può essere considerata una funzione pressoché lineare in r e così, se anche Pr è prossimo all'unità, si può dimostrare che:

$$D_{\theta\theta}(r) \approx \frac{N_\theta}{3\chi} r^2 \quad [5.46]$$

Questa relazione vale quando $r \ll \eta_0$.

Nel caso in cui la distanza r si colloca all'interno dell'*Inertial-convective Subrange* ($L_0 \gg r \gg \eta_0$), è possibile usare la Seconda Ipotesi di Kolmogorov che porta alla relazione:

$$D_{\theta\theta}(r) = C_\theta N_\theta \varepsilon^{-1/3} r^{2/3} \quad [5.47]$$

dove C_0 è una costante universale. Anche per la funzione di Struttura della temperatura si è giunti alla *legge dei due terzi* nel sottointervallo inerziale.

Oltre alla funzione di struttura, possiamo considerare quali siano le ripercussioni delle Ipotesi di Kolmogorov sullo spettro monodimensionale della temperatura $E_\theta(k)$. Considerazioni di analisi dimensionale conducono ad individuare per l'*Inertial-convective Subrange* la relazione seguente:

$$E_\theta(k) = B_\theta N \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3} \quad [5.48]$$

che è valida quando $1/L \ll k \ll 1/\eta_0$. B_θ è una costante universale e si può dimostrare che vale la relazione seguente:

$$B_1 \cong 0.25 C_\theta \quad [5.49]$$

Come si vede, anche per lo spettro della temperatura, nell'*Inertial-Convective Subrange* vale la legge dei cinque terzi.

In conclusione si sottolinea che tutte le relazioni di similarità sono valide per ogni altra variabile passiva come l'umidità e la concentrazione di inquinanti, a meno di costanti numeriche influenti.

5.7 LE IPOTESI DI KOLMOGOROV E LA VISIONE LAGRANGIANA DELLA TURBOLENZA

Fin qui abbiamo studiato le proprietà della turbolenza isotropa o localmente isotropa dal punto di vista Euleriano definendone un quadro ragionevolmente completo e ciò sarà utile per realizzare ed interpretare le misure in campo e per confrontarle con le previsioni e ricostruzioni modellistiche. Come si è visto, al modo Euleriano di procedere si contrappone la visione Lagrangiana del fenomeno e le due descrizioni sono totalmente intercambiabili. Tuttavia, nella micrometeorologia le metodologie di indagine di tipo Euleriano sono praticamente le uniche che si utilizzano in pratica.

Diversa è la situazione quando si vuole descrivere la dispersione di sostanze passive (sostanza inquinanti) in aria. In questo caso la visione Lagrangiana fornisce una descrizione più coerente ed anche concettualmente più semplice del fenomeno. Come vedremo, è stata sviluppata una classe di modelli di dispersione (i modelli Lagrangiani a particelle) che oggi rappresentano uno dei modi più realistici per trattare la dispersione degli inquinanti in aria, almeno di quelli poco reattivi chimicamente. Per fornire una base efficace alla teoria della dispersione Lagrangiana, nei punti che seguono viene presentata, in forma condensata, la teoria Lagrangiana della turbolenza in situazioni localmente isotrope, completando quanto è già stato presentato al punto 3.3.

5.7.1 CARATTERISTICHE STATISTICHE LAGRANGIANE DELLE DIFFERENZE DI VELOCITÀ

Consideriamo ora il fluido come un insieme di particelle in moto turbolento e trattiamolo dal punto di vista Lagrangiano. Dal punto di vista Euleriano, tale moto sia caratterizzato da un elevato numero di Reynolds. Consideriamo, ora, una generica particella in movimento, particella che ad un certo istante iniziale t_0 si trovava nella posizione \mathbf{x}_0 . Immaginiamo, poi di essere in situazioni stazionarie ed omogenee. La caratteristica principale del moto di tale particella è la differenza di velocità che essa presenta a due istanti temporali t_0 e $t_0 + \tau$, dove t_0 è un arbitrario istante iniziale. Se siamo in condizioni stazionarie ed omogenee, la scelta di un particolare t_0 è irrilevante. Tale grandezza, che ovviamente possiede caratteristiche stocastiche, può essere definita come:

$$\Delta_\tau \mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t_0) \quad [5.50a]$$

dove con \mathbf{V} si è indicata la velocità (vettoriale) Lagrangiana della particella che si trovava nella posizione \mathbf{x}_0 all'istante iniziale t_0 . Dall'istante t_0 all'istante t la particella si è mossa nello spazio fisico, descrivendo la traiettoria $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t)$. Dato che, come già abbiamo visto al punto 3.3, la particella ad ogni istante e in ogni punto dello spazio in cui viene a trovarsi possiede esattamente la velocità Euleriana presentata dal fluido in quel punto e in quell'istante, la relazione precedente può essere riscritta come:

$$\Delta_\tau \mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{u}[\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t), t] - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) \quad [5.50b]$$

dove $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ è la velocità Euleriana riscontrata nel fluido nel punto \mathbf{x} al tempo t .

Se $\tau = t - t_0$ è molto inferiore al tempo Lagrangiano di scala T (cioè l'intervallo di tempo durante il quale la variazione della velocità Lagrangiana $\mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t)$ della particella diventa comparabile con $|\mathbf{V}|$), allora:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t) \cong \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) \cdot (t - t_0) \quad [5.50c]$$

così che:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}_0 - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) \cdot (t - t_0) \cong 0 \quad [5.50d]$$

Perciò, quando:

$$\tau \ll T \quad \text{e} \quad \tau \ll T_0 = L/U$$

si può ritenere che $\Delta_\tau \mathbf{V}$ possieda caratteristiche statistiche isotrope, indipendenti da \mathbf{x}_0 , t_0 e $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0)$. Logica conseguenza di ciò è che possiamo applicare anche in questo contesto Lagrangiano le due Ipotesi di Kolmogorov. La condizione $\tau \ll T_0$ è necessaria altrimenti verrebbero meno le condizioni Euleriane di stazionarietà prescritte per il moto del fluido.

Per il *momento del secondo ordine* del vettore stocastico $\Delta_\tau \mathbf{V}$ abbiamo, grazie alla isotropia, che:

$$\overline{\Delta_\tau V_i \cdot \Delta_\tau V_j} = D^{(L)}(\tau) \cdot \delta_{ij} \quad [5.51]$$

dove $D^{(L)}(\tau)$ è la *Funzione di Struttura Lagrangiana* della velocità. La prima Ipotesi di Kolmogorov, poi, ci assicura anche la *Funzione di Struttura Lagrangiana* dipende solo dal tasso di dissipazione medio ε e dalla viscosità del fluido ν . Considerando le velocità di scala ed il tempo di scala di Kolmogorov τ_η , definite in precedenza, ed applicando considerazioni di analisi dimensionale si ottiene la relazione:

$$D^{(L)}(\tau) = v_\eta^2 \cdot \beta_L(\tau/\tau_\eta) \quad [5.52a]$$

dove $\beta_L(x)$ è una nuova funzione universale.

Quando $\tau \ll \tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$ (condizione che, in termini Lagrangiani, equivale a dire che si è nel *Dissipation Subrange*) il vettore $\Delta_\tau \mathbf{V}$, in ciascuna sua particolare realizzazione, è naturalmente proporzionale a τ (per la stessa ragione per cui $|\Delta_\tau \mathbf{u}| \approx r$ quando $r = |\mathbf{r}| \ll \eta$, come si è visto in precedenza) e quindi:

$$\begin{aligned} \beta_L(\tau/\tau_\eta) &= a_0 \cdot (\tau/\tau_\eta)^2 \\ D^{(L)}(\tau) &= a_0 \varepsilon^{3/2} \nu^{-1/2} \tau^2 \end{aligned} \quad [5.52b]$$

Se si confronta questa relazione con la (5.14b) che descrive l'andamento della Funzione di Struttura Euleriana, si nota che entrambe hanno una dipendenza quadratica la prima da τ e la seconda da r . Ciò è facilmente spiegabile col fatto che per tempi così piccoli, la velocità della particella poco si discosta dalla velocità Euleriana nel punto \mathbf{x}_0 al tempo t_0 e può essere considerata una costante nell'intervallo τ .

Se invece si ha che $\tau_\eta \ll \tau \ll T_0$, in termini Lagrangiani si è nell'*Inertial Subrange*. In questo caso vale la Seconda Ipotesi di Kolmogorov e quindi la Funzione di Struttura potrà dipendere dal tasso medio di dissipazione ε ma non dalla viscosità ν . Ciò comporta che, applicando l'analisi dimensionale, si abbia:

$$\begin{aligned} \beta_L(\tau/\tau_\eta) &= C_0 \cdot (\tau/\tau_\eta) \\ D^{(L)}(\tau) &= C_0 \varepsilon \tau \end{aligned} \quad [5.52c]$$

Questa è una relazione importantissima, su cui si basano i modelli di dispersione Lagrangiani a particelle, ed è l'*equivalente Lagrangiano della legge Euleriana dei due-terzi*.

Vista l'importanza pratica di questa relazione è stato dedicato un notevole sforzo per la determinazione della costante C_0 . Rimandando al Cap.7 una trattazione più dettagliata dell'argomento, si può dire che i valori ottenuti per tale costante differiscono profondamente da esperimento ad esperimento stabilendosi in un intervallo che va da 1.6 a 6.5. L'intervallo di incertezza è enorme, cosa non sorprendente se si considera quanto sia difficile realizzare esperimenti di tipo Lagrangiano. Una maniera più pratica per ottenere un valore di C_0 è la seguente: dato che, come vedremo, la relazione (5.52c) è il cardine di tutti i modelli di dispersione Lagrangiani a particelle, si realizza un esperimento (in laboratorio o in campo) controllato di dispersione e se ne descrivono i risultati con un modello di questo tipo. Il valore di C_0 che minimizza le differenze

quadratiche tra i risultati del modello e le misure sperimentali può essere considerato una stima affidabile ed operativa di C_0 . Effettivamente ciò è stato, fatto impiegando soprattutto gli esperimenti in laboratorio di Willis G.E., J.W. Deardorff (1974, 1976a e b, 1978, 1981). Il risultato ha condotto ad un valore di $C_0 = 3$, anche se si è notato una dipendenza dal livello di turbolenza del moto del fluido. Come detto, ritorneremo sull'argomento al Cap.7.

5.7.2 CONSIDERAZIONI SPETTRALI LAGRANGIANE

Oltre alla Funzione di Struttura, nella visione Lagrangiana è possibile introdurre anche le Funzioni di Auto-correlazione (si veda a tal proposito il punto 3.3.3). Se consideriamo una situazione statisticamente stazionaria, omogenea ed isotropa ed indichiamo con V una delle componenti cartesiane della velocità della particella, vediamo che il valor medio di V è nullo, mentre la relativa varianza non lo è e, per l'isotropia, uguale per ogni componente. Naturalmente, se consideriamo un tempo t generico, la Funzione di Auto-correlazione tra t e $t + \tau$ non dipenderà da t (per la stazionarietà e l'omogeneità) ma solo dal *time-lag* τ e sarà espressa come:

$$R^{(L)}(\tau) = \overline{V(t) \cdot V(t+\tau)} = \overline{V^2} \rho(\tau) \quad [5.53a]$$

dove $\rho(\tau)$ è la Funzione di Auto-correlazione normalizzata. Si ricordi che il *Tempo Lagrangiano di Scala* relativo a V è:

$$T_L = \int_0^{\infty} \rho(\tau) \cdot d\tau \quad [5.53b]$$

La rappresentazione spettrale della Funzione di Auto-correlazione è:

$$R^{(L)}(\tau) = \int_0^{\infty} E^{(L)}(\omega) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\omega \quad [5.54a]$$

in cui appare la funzione $E^{(L)}(\omega)$ che è la Trasformata di Fourier della Funzione di Auto-correlazione e che prende il nome di *Spettro Lagrangiano della velocità*. Tale funzione, a sua volta, è esprimibile mediante la funzione di Auto-correlazione come:

$$E^{(L)}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R^{(L)}(\tau) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\tau \quad [5.54b]$$

ed ha le dimensioni (L^2T^{-1}). Quando $\tau = 0$:

$$R^{(L)}(0) = \int_0^{\infty} E^{(L)}(\omega) \cdot d\omega \quad [5.54c]$$

E' facile mostrare che tra la funzione di struttura e la Funzione di Auto-correlazione sussiste la relazione seguente:

$$D^{(L)}(\tau) = \overline{V^2} - 2R^{(L)}(\tau) \quad [5.55a]$$

Da tutte queste relazioni è immediato constatare che la rappresentazione spettrale della Funzione di Struttura Lagrangiana è espressa dalla relazione seguente:

$$D^{(L)}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} (1 - \cos \omega\tau) \cdot E^{(L)}(\omega) \cdot d\omega \quad [5.55b]$$

Per La seconda ipotesi di Kolmogorov, quando τ è all'interno dell'*Inertial Subrange*, cioè

quando:

$$1/T_0 \ll \omega \ll 1/\tau_\eta$$

$E^{(L)}(\omega)$ dovrà dipendere da ω e da ε , ma non da v . Considerazioni dimensionali portano a dire che la relazione analitica dello *Spettro Lagrangiano della velocità* nell'*Inertial Subrange* sarà data da:

$$E^{(L)}(\omega) = B_0 \varepsilon \cdot \omega^{-2} \quad [5.56a]$$

Questa relazione è l'equivalente Lagrangiano della legge dei *cinque-terzi* valida per gli spettri Euleriani. La costante B_0 può essere legata al valore della costante C_0 e, come si può dimostrare considerando le relazioni (5.52c), (5.55b) e (5.56), tale relazione è:

$$B_0 = \frac{C_0}{\pi} \cong 0.32C_0 \quad [5.56b]$$

Il comportamento di $E^{(L)}(\omega)$ nell'*Inertial Subrange* è interessante. Infatti, se si ipotizza che la Funzione di Auto-correlazione normalizzata $\rho(\tau)$ ha la forma esponenziale seguente:

$$\rho(\tau) = \exp[-\tau/T_L] \quad [5.57a]$$

per ogni τ e quindi anche nell'*Inertial subrange*, si ottiene una sua rappresentazione spettrale pari a:

$$E^{(L)}(\omega) = \frac{\overline{2V^2 T_L}}{\pi(1 + \omega^2 T_L^2)} \quad [5.57b]$$

che, ad alte frequenze, quindi nell'*Inertial Subrange* mostra una dipendenza da ω identica a quanto ottenuto seguendo la Seconda Ipotesi di Kolmogorov e senza ipotizzare alcuna forma analitica specifica per la Funzione di Auto-correlazione. Ciò dimostra che l'approssimazione esponenziale della Funzione di Auto-correlazione Lagrangiana è consistente quanto previsto dalla Seconda Ipotesi di Kolmogorov.

5.7.3 CARATTERISTICHE DEL CAMPO DI ACCELERAZIONE

Una particella che percorre una traiettoria, inevitabilmente cambierà la propria velocità ad ogni istante, salvo che si muova in moto rettilineo uniforme, cosa decisamente poco probabile in una situazione turbolenta. Risulta, quindi, naturale chiedersi quali siano le proprietà statistiche dell'accelerazione. Rimandando a Monin e Yaglom (2007b, pag. 368) per una trattazione più completa, qui di seguito svilupperemo solo quei concetti che ci risulteranno utili per l'introduzione successiva dei modelli di dispersione Lagrangiani a particelle.

Data una particella, la sua accelerazione in un moto turbolento può essere così definita:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_0, t) = \lim_{(t-t_0) \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0)}{t - t_0} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta_\tau \mathbf{V}}{\tau} \quad [5.58]$$

Dato che le caratteristiche statistiche di $\Delta_\tau \mathbf{V}$ sono universale ed isotrope nel caso in cui τ è sufficientemente piccolo, le proprietà statistiche dell'accelerazione saranno anch'esse universali ed isotrope. Perciò, in una regione sufficientemente piccola dello spazio-tempo il campo $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0, t)$ sarà isotropo e le sue caratteristiche statistiche saranno stazionarie e dipenderanno solo dal tasso medio di dissipazione ε e dalla viscosità ν .

Consideriamo, ora, il tensore della correlazione temporale Lagrangiana del campo di accelerazione:

$$B_{0,ij}(\tau) = \overline{A_i(\mathbf{x}_0, t) \cdot A_j(\mathbf{x}_0, t + \tau)} \quad [5.59a]$$

Data l'isotropia, nell'*Universal Equilibrium Range* varrà ancora una volta la Prima Ipotesi di Kolmogorov e quindi questo tensore avrà la forma:

$$B_{0,ij}(\tau) = B_0(\tau) \cdot \delta_{ij}$$

$$B_0(\tau) = \frac{v_\eta^2}{\tau_\eta^2} f(\tau/\tau_\eta) = \varepsilon^{3/2} \nu^{-1/2} f(\varepsilon^{1/2} \nu^{-1/2} \tau) \quad [5.59b]$$

dove $f(x)$ è una funzione universale e $B_0(\tau)$ è la funzione di correlazione dell'accelerazione Lagrangiana. Dato che nell'*Universal Equilibrium Range* le proprietà statistiche dell'accelerazione devono dipendere solo dal tasso di dissipazione ε e dalla viscosità ν , l'analisi dimensionale ci porta a dire che il valore quadratico medio dell'accelerazione turbolenta sarà dato da:

$$\overline{A^2} = K \varepsilon^{3/2} \nu^{-1/2} \quad [5.60]$$

Da questa relazione si vede come l'accelerazione dipenda dalla viscosità. Per elevati valori del numero di Reynolds, la viscosità influenza solo i moti a piccola scala che corrispondono all'estremo superiore dell'intervallo delle frequenze nell'*Universal Equilibrium Range*. Perciò, si può concludere che l'accelerazione lagrangiana turbolenta è dominata largamente dai moti a scala molto piccola con $l \ll \eta$. Perciò, quando consideriamo il campo di accelerazione di una turbolenza localmente isotropa, possiamo trascurare l'effetto dei moti a grande scala anisotropi che hanno un ruolo dominante nella formazione del campo di velocità.

Nell'*Inertial Subrange* (cioè quando τ è molto maggiore di τ_η , dovendo essere valida la Seconda Ipotesi di Kolmogorov, $B_0(\tau)$ dovrà dipendere solo da ε e dovrà essere indipendente da ν , quindi l'analisi dimensionale ci conduce alla relazione seguente:

$$B_0(\tau) = D_0 \varepsilon / \tau \quad [5.61]$$

dove D_0 è una costante. Di conseguenza il coefficiente di correlazione tra $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0, t)$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0, t + \tau)$ sarà molto piccolo. Perciò l'accelerazione di una particella al tempo t e quella al tempo $t + \tau$, se τ è molto maggiore di τ_η saranno praticamente incorrelate. Questa conclusione, come vedremo, rivestirà un ruolo essenziale nei modelli La