

## 2 MODELLO FLUIDODINAMICO DEL PBL

Il modello fluidodinamico dell'atmosfera e del *PBL* è un insieme di relazioni matematiche che descrivono l'evoluzione nello spazio e nel tempo dello stato dell'atmosfera in un dato dominio di indagine. Inizialmente il dominio considerato sarà del tutto generico e non terrà conto del fatto che nei vari strati dell'atmosfera, e soprattutto nella troposfera, hanno luogo fenomeni meteorologici caratterizzati da scale spaziali e temporali molto diverse tra loro. Se il dominio di indagine presenta una dimensione orizzontale dell'ordine delle decine di migliaia di chilometri, in sostanza tutta o la gran parte del volume dell'atmosfera, ciò che si evidenzierà saranno soprattutto le evoluzioni a grande scala dell'atmosfera, cioè quei fenomeni aventi una scala orizzontale dell'ordine delle migliaia di chilometri e scale temporali tipiche dell'ordine dei mesi o dei giorni. In sostanza stiamo parlando dei *fenomeni sinottici* studiati dalla Climatologia e dalla Meteorologia Sinottica. Adottare un dominio d'indagine di questo tipo parrebbe, a prima vista, il modo più generale di porsi nei confronti dello studio dell'atmosfera, ma le limitazioni negli strumenti di calcolo, attualmente insuperabili, fanno sì che sia inevitabile perdere i *dettagli* a scale spaziali e temporali molto inferiori. In sostanza, se si adotta un dominio di indagine planetario, sarà possibile studiare le grandi circolazioni tropicali, le perturbazioni atlantiche in arrivo sull'Europa ma difficilmente si potrà, per esempio, ottenere una visione chiara e dettagliata dell'atmosfera al di sopra della città di Roma. Seguendo Atkinson (1981), una tale scala viene indicata solitamente col termine *Macroscala*, ulteriormente dettagliata sulla base delle scale spaziali e temporali caratteristiche dei fenomeni che si intendono studiare. Indicando con  $L_x$  la scala spaziale orizzontale e con  $\tau$  la scala temporale, si hanno approssimativamente le macroscale seguenti:

*macro- $\alpha$*  ( $L_x > 10000$  km e  $\tau > 1$  mese),  
*macro- $\beta$*  ( $10000 > L_x > 2000$  km e  $\tau$  dell'ordine del giorno),  
*macro- $\gamma$*  ( $2000 > L_x > 200$  km e  $\tau$  dell'ordine del giorno).

Se si diminuisce l'estensione orizzontale del dominio di indagine limitandosi a poche centinaia o decine di chilometri, si vedono emergere i dettagli di una struttura atmosferica molto più complessa con fronti, brezze e fenomeni orografici. E' a questo punto che emerge la natura caotica della parte bassa della troposfera (il *PBL*) e quindi la sua turbolenza. Questa è sicuramente la scala che più interessa alla Micrometeorologia, specialmente se in verticale non si va oltre la prima parte della troposfera. A tale scala viene dato il nome di *Mesoscala* e approssimativamente si possono individuare le mesoscale seguenti:

*meso- $\alpha$*  ( $2000 > L_x > 200$  km e  $\tau$  dell'ordine del giorno),  
*meso- $\beta$*  ( $200 > L_x > 20$  km e  $1$  mese  $> \tau > 1$  giorno),  
*meso- $\gamma$*  ( $20 > L_x > 2$  km e  $\tau$  dell'ordine dell'ora).

Da ultimo, si può pensare di abbassare ulteriormente la scala spaziale e temporale e a questo punto emergono fenomeni atmosferici ancora più irregolari e locali. Questa è la *microscala* che costituisce ad oggi la frontiera da raggiungere nelle normali applicazioni meteorologiche ed anche un affascinante argomento di ricerca.

Dato che il nostro interesse è focalizzato prevalentemente sulla mesoscala, il dominio di indagine tipico che si prenderà in considerazione sarà una porzione di atmosfera di dimensione orizzontale dell'ordine delle centinaia di chilometri e di dimensione verticale tale da contenere tutto il *PBL* ed una buona porzione della troposfera sovrastante, in sostanza uno strato verticale dell'ordine della decina di chilometri. Anche se in questo Capitolo non se ne parlerà esplicitamente, i calcoli veri verranno effettuati scomponendo il dominio di indagine in celle elementari

e frazionando il tempo di interesse in incrementi temporali (*time step*) opportuni e discreti. La *risoluzione spaziale* del modello sarà pari alla dimensione caratteristica della cella elementare, mentre la *risoluzione temporale* sarà pari al *time step*. Se per un modello a scala globale la cella elementare tipica ha dimensioni orizzontali tipiche di 400 km per 400 km, una dimensione verticale di 1 km ed una risoluzione temporale di 300 s, un tipico modello a mesoscala tratta celle elementari con dimensione orizzontale e verticale rispettivamente dell'ordine del chilometro, e del centinaio di metri e *time step* dell'ordine del secondo.

Senza preoccuparsi inizialmente né del tipo di dominio di indagine né della natura caotica evidenziata dall'atmosfera, le relazioni fluidodinamiche che descrivono l'atmosfera verranno dedotte impiegando le leggi fondamentali della Fisica Classica, cioè:

1. la legge di conservazione della massa,
2. la seconda legge di Newton e quindi la conservazione della quantità di moto,
3. la prima legge delle Termodinamica e quindi la conservazione del calore,
4. l'equazione di stato dei gas,
5. la conservazione dell'acqua presente in atmosfera nei vari stati di aggregazione,
6. la conservazione delle specie chimiche (gas, aerosol e particelle) presenti in aria.

Da tali leggi fisiche (di conservazione o di stato) verranno individuate delle relazioni di tipo preferenzialmente differenziale e *prognostico* per ogni grandezza fisica descrittrice dello stato del *PBL*. Va ricordato che una relazione di tipo prognostico è una relazione differenziale che lega la variazione temporale di una data variabile (per esempio una delle tre componenti cartesiane del vento) alla variazione spaziale della stessa e di altre variabili rilevanti e ad eventuali termini di sorgente. Il risultato cui si giungerà è un modello matematico in grado di descrivere, almeno teoricamente, le *variazioni istantanee* nello spazio e nel tempo delle grandezze fisiche che descrivono il *PBL*. Tale modello è fisicamente corretto ma non lineare, caratterizzato da una natura altamente caotica e, quindi, del tutto inapplicabile nella pratica. Tra l'altro, il sistema di riferimento spaziale adottato per la loro deduzione è un sistema di riferimento cartesiano ortogonale non inerziale, solidale alla superficie terrestre. Un tale sistema è certamente scomodo per la macroscale ma è sicuramente ideale per la mesoscale. Si rimanda a Dutton (1995) e Holton (2004) per lo studio delle relazioni fluidodinamiche di conservazione espresse in coordinate sferiche, più adatte alla macroscale.

Nei paragrafi che seguono viene presentata in modo sistematico ma sintetico quanto qui illustrato. Per una discussione dettagliata sull'argomento si rimanda a Matveev(1965), Wallace e Hobbs (1977), Holton (2004), Dutton (1995), e Pielke (2002). Riferimenti più specifici alle problematiche del *PBL* sono Arya (1987), Blackadar (1997), Nieuwstadt e van Dop (1982), Stull (1988), Garratt (1992), Sorbjan (1989) e Wyngaard (2010).

## 2.1 ALCUNI STRUMENTI MATEMATICI DI BASE

Prima di entrare nel vivo della descrizione è opportuno richiamare alcune nozioni di base dell'Analisi Matematica, indispensabili per la comprensione del seguito. Si suppone che al lettore siano familiari i concetti di limite, derivata ed integrale, mentre in *Appendice A* sono raccolti per comodità i concetti principali relativi alla teoria dei vettori, agli operatori vettoriali ed alla notazione sintetica tensoriale.

### 2.1.1 LO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR E LA PREDIZIONE NUMERICA

Si consideri un generico punto  $P(x,y,z)$  del dominio di indagine riferito ad un sistema inerziale di coordinate e sia  $f$  il valore assunto in quel punto da una generica variabile scalare (per esempio la temperatura dell'aria). Il quesito che ci si pone è se sia possibile ottenere il valore di  $f$  in

un intorno di  $P$  piccolo a piacere e, di fatto, infinitesimo. Ricordiamo che, visto il basso numero di Knudsen che caratterizza l'atmosfera, l'approccio continuo è più che legittimo.

Per semplicità, inizialmente si consideri uno spazio monodimensionale descritto dalla sola coordinata  $x$ . Se la funzione  $f(x)$  è nota in un punto  $x_0$ , il *Teorema di Taylor* garantisce che, se  $f$  è differenziabile almeno  $n+1$  volte, il valore di  $f$  in un intorno di  $x_0$ , per esempio in  $x = x_0 + \delta x$ , è dato da:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \cdot \delta x + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} \cdot \frac{\delta x^2}{2} + \dots + \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x_0} \cdot \frac{\delta x^n}{n!} + O(\delta x^{n+1}) \quad [2.1]$$

In sostanza, il Teorema di Taylor garantisce che è possibile approssimare il valore di  $f$  in un intorno sufficientemente piccolo di  $x_0$ , impiegando solo ciò che si conosce di  $f$  in  $x_0$ . L'errore che si commette con tale approssimazione è rappresentato dal termine  $O(\delta^{n+1})$ , proporzionale alla potenza  $n+1$ -esima della distanza  $\delta x$  tra  $x_0$  e  $x$ . Adottando un'opportuna unità di misura, è sempre possibile avere  $\delta x < 1$ , quindi, al di là della precisa natura di  $O(\delta^{n+1})$ , la sua proporzionalità con  $\delta x^{n+1}$  fa sì che al tendere di  $n$  all'infinito  $O(\delta^{n+1})$  tenda a zero. In sostanza, maggiore è l'informazione di  $f$  in  $x_0$  (e quindi maggiore è il numero di derivate di cui si dispone), minore è l'errore che si commette approssimando  $f(x+\delta x)$  con lo sviluppo di Taylor.

Se si considera uno spazio  $N$ -dimensionale ed un punto  $P(x_1, x_2, \dots, x_N)$  in tale spazio, la funzione  $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$  ammette, ipotizzando sempre che sia differenziabile rispetto alle  $N$  variabili fino all'ordine  $n+1$ , lo sviluppo di Taylor seguente:

$$\begin{aligned} f(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_N + \delta x_N) = \\ f(x_1, x_2, \dots, x_N) + \\ + \sum_{m=1}^n \frac{[\delta x_1 (\partial/\partial x_1) + \dots + \delta x_N (\partial/\partial x_N)]^m f}{m!} + O(\delta x_1^{m+1}, \delta x_2^{m+1}, \dots, \delta x_N^{m+1}) \end{aligned} \quad [2.2]$$

Come vedremo successivamente, sarà normale applicare una delle relazioni di bilancio della Meccanica Classica (massa, quantità di moto, ecc.) al fluido in un generico punto  $P$  dello spazio. Per fare ciò, il metodo standard è quello di considerare un volume di controllo di dimensione infinitesima centrato in  $P$ , ipotizzando di conoscere il valore delle variabili coinvolte dalla relazione di bilancio in quel punto. Ovviamente non si ipotizza che siano disponibili altre informazioni su tali variabili e lo sviluppo in serie di Taylor, che ben si coniuga col concetto di volume di controllo infinitesimo, è l'unico strumento utilizzabile. In effetti è solo impiegando questa tecnica che possiamo definire il valore di tali variabili agli spigoli del volume di controllo (supposto a forma di parallelepipedo) noto il valore delle stesse al punto  $P$ .

Il Teorema di Taylor applicato alle variabili meteorologiche consente di fare ulteriori considerazioni. Per semplicità si consideri ancora una volta uno spazio monodimensionale con coordinata  $x$  ed una grandezza scalare  $f(x)$ . Se essa è nota, assieme alla propria derivata prima, in un punto  $x_0$  e se  $x$  è un punto sufficientemente prossimo a  $x_0$  tale che  $\delta x = x - x_0$  sia piccolo, l'errore commesso approssimando  $f(x)$  con ciò che è noto in  $x_0$  mediante lo sviluppo di Taylor arrestata al primo ordine:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \delta x \quad [2.3a]$$

sarà ancora inferiore, essendo proporzionale a  $\delta x^2$ . Questa considerazione sarà fondamentale in molti degli sviluppi successivi e si fonda anche sul fatto che:

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \quad [2.3b]$$

Una seconda osservazione importante si ha considerando la grandezza  $f$  in un punto  $(x,y,z)$  del dominio di calcolo al tempo  $t$  (una tale grandezza potrebbe essere una delle componenti cartesiane del vento, la temperatura, ecc.) e cercando una relazione approssimata per  $f$  al tempo  $t+\Delta t$ , dove l'incremento temporale sia piccolo. Impiegando la conoscenza nel punto  $(x,y,z,t)$  di  $f$  e della sua derivata parziale rispetto al tempo, lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine dà:

$$f(x,t+\delta t) \approx f(x,t) + \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_t \cdot \Delta t \quad [2.4]$$

Questo è lo *scheletro* di ogni approssimazione numerica che consenta di determinare la variazione nel tempo di  $f$ . Se il modello fluidodinamico differenziale del *PBL* è in grado di fornire in ogni punto di interesse del dominio di indagine e ad un certo istante  $t$  la *tendenza* di  $f$ , cioè il suo tasso di variazione nel tempo, la (2.4) può fornire, almeno in linea di principio, il valore di  $f$  negli istanti successivi, quindi è in grado di fornire una *prognosi*, cioè una predizione. All'atto pratico le cose sono più complicate e raffinate come si vedrà nel seguito, senza però che venga meno la logica di fondo del ragionamento fatto.

### Esercizio 2.1

Se in un punto del *PBL* al tempo  $t$  la temperatura vale  $20^\circ\text{C}$  e il suo tasso attuale di variazione risulta pari a  $2^\circ\text{C}\cdot\text{h}^{-1}$ , si realizzi una previsione di temperatura dopo  $15'$ .

Dato che l'incremento temporale  $\delta t$  risulta pari a  $0.25$  h, per la (4.4) si ha che:

$$T(t+\delta t) \approx T(t) + \left( \frac{dT}{dt} \right)_t \cdot \delta t = 20 + 2 \cdot 0.25 = 20.5^\circ\text{C}$$

#### 2.1.2 LA DERIVATA MATERIALE O TOTALE

Si è visto che si può descrivere il *PBL* sia in termini Euleriani che in termini Lagrangiani. Tenendo presente ciò, si consideri nello spazio un *volume di controllo* di dimensioni  $\delta x$ ,  $\delta y$  e  $\delta z$  (e quindi di volume  $V = \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$ ) localizzato ad un istante  $t_0$  come mostrato in Fig.2.1. Si ipotizzi, poi, che il sistema di coordinate usato sia inerziale e si consideri, inoltre, una grandezza fisica scalare  $f$  caratterizzante il *PBL* (per semplicità uno scalare, come la temperatura).

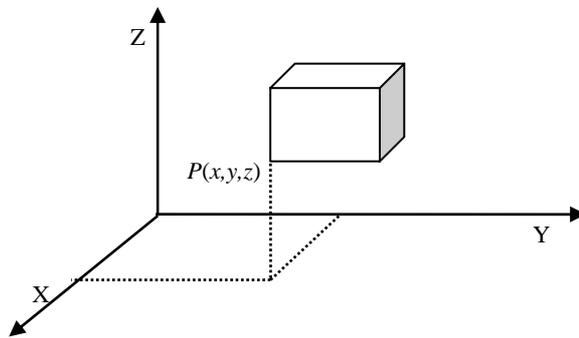


Fig.2.1: volume di controllo nello spazio al tempo  $t_0$ .

Dal punto di vista Euleriano, tale grandezza può variare nel tempo, pur riferendosi sempre al volume di controllo considerato. Considerazioni analoghe negli altri volumi di controllo che compongono il dominio di indagine portano a ritenere che, in generale,  $f$  sia funzione sia dello spazio che del tempo, cioè  $f(x,y,z,t)$ . Nel volume di controllo, rappresentativo del punto  $P(x,y,z)$ , il tasso di variazione nel tempo di  $f$  è dato dalla derivata parziale  $\partial f / \partial t$  mentre la variabilità *locale*

nello spazio è data dalle derivate parziali  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial f/\partial y$  e  $\partial f/\partial z$ . La conoscenza delle quattro derivate parziali in ogni punto  $P$  ad ogni istante temporale  $t$  garantisce la completa conoscenza prognostica dell'intero campo  $f$ .

La visione Lagrangiana risulta molto differente. Se a  $t_0$  si considera una *particella* del tutto coincidente col volume di controllo di Fig.2.1, nei tempi successivi  $t_1, t_2, \dots$  la particella si muoverà nello spazio, mantenendo l'identità materiale che possedeva al tempo  $t_0$  e percorrendo una traiettoria nello spazio completamente definita dalle funzioni  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  che descrivono la variazione nel tempo dello spigolo  $P$ . Da ciò si deduce che le componenti cartesiane della *velocità della particella*  $\mathbf{u}$  (qui e in tutto il seguito con una variabile in grassetto si indica una grandezza vettoriale) al tempo  $t$  sono date da:

$$\mathbf{u} = \left( \frac{dx}{dt} \right)_t \quad \mathbf{v} = \left( \frac{dy}{dt} \right)_t \quad \mathbf{w} = \left( \frac{dz}{dt} \right)_t \quad [2.5]$$

Ma come varia nel tempo la grandezza  $f$  che a  $t_0$  valeva  $f(x, y, z, t_0)$ ? Dopo un intervallo di tempo  $\delta t$ ,  $f$  sarà variata di:

$$\delta f = f(x[t_0 + \delta t], y[t_0 + \delta t], z[t_0 + \delta t]) - f(x[t_0], y[t_0], z[t_0]) \quad [2.6a]$$

Utilizzando lo sviluppo di Taylor arrestata al primo ordine si ha che:

$$\begin{aligned} \delta f = & \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \delta t + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot [x(t_0 + \delta t) - x(t_0)] + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot [y(t_0 + \delta t) - y(t_0)] + \\ & + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot [z(t_0 + \delta t) - z(t_0)] + O(\delta t^2) \end{aligned} \quad [2.6b]$$

da cui, per  $\delta t \rightarrow 0$ , il *tasso di variazione* dello scalare  $f$  caratteristico della particella risulta pari a:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta t} \quad [2.7a]$$

quindi la (2.6b), per  $\delta t \rightarrow 0$ , si riduce alla *Relazione di Eulero*:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{w} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u}_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad [2.7b]$$

in cui  $df/dt$  prende il nome di *derivata materiale* o anche di *derivata direzionale o totale* e rappresenta il tasso di variazione di  $f$  nella particella in movimento. Nella relazione precedente sono state impiegate sia la notazione cartesiana che quella tensoriale. Introducendo l'operatore vettoriale gradiente (indicato con il simbolo **grad**( $\cdot$ ) o col simbolo  $\nabla$ ) ed il prodotto scalare  $\bullet$  tra due vettori, la (2.7b) diventa:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \bullet \nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{grad}(f) \quad [2.7c]$$

La visione Lagrangiana, quindi, è focalizzata sull'analisi del comportamento delle caratteristiche di una particella in movimento ed il tasso di variazione di una sua generica proprietà  $f$  è completamente descritto dalla sua derivata materiale, nonché dalla traiettoria della particella. Se la grandezza si conserva durante il moto,  $df/dt = 0$ .

Al contrario, la visione Euleriana è focalizzata su un punto ben preciso dello spazio (e quindi su un volume di controllo), pertanto la descrizione della variazione di  $f$  deve essere fatta impiegando le tre derivate parziali spaziali (per catturare la variazione spaziale del campo) e la derivata parziale temporale (per catturare la variazione temporale del campo).

Il risultato fondamentale fin qui raggiunto è una relazione analitica, forte ed univoca, tra la de-

scrizione Lagrangiana e quella Euleriana, utilissima nel seguito. Spesso si vedrà che usare la descrizione Lagrangiana risulta concettualmente più semplice, anche se alla fine per gli usi pratici è inderogabile giungere ad una descrizione Euleriana. La relazione di Eulero (2.7b) è l'arma di uso generale che verrà utilizzata a questo scopo. Va, inoltre, ricordato che tale relazione può anche essere riscritta come:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dt} + A_f \quad [2.7d]$$

dove con  $A_f$  si è indicato l'operatore:

$$A_f = - \left( u \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad [2.7e]$$

detto comunemente *termine avvevivo* o *avvezione* o *trasporto*.

Naturalmente si poteva giungere alla (2.7b) in modo analiticamente molto più spiccio, ma con molti sottintesi fisici, considerando che:

- $f$  è una funzione di quattro variabili,  $f(x, y, z, t)$
- il suo differenziale esatto è pari a:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz \quad [2.7f]$$

- dividendo per  $dt$  ed utilizzando le (2.5), la sua derivata totale è quindi la (2.7b).

Da ultimo è interessante presentare un'applicazione di tutto ciò, che chiarirà immediatamente la logica che spesso si seguirà nel seguito. Si consideri una particella, studiata in un sistema inerziale, su cui agisca una forza  $\mathbf{F}$  per unità di massa le cui componenti cartesiane siano  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$ . Se ne voglia determinare l'accelerazione applicando la seconda legge di Newton. Dato che consideriamo una particella e non un volume di controllo, useremo una logica Lagrangiana. Pertanto, tale particella ad ogni generico istante  $t$  occuperà una diversa posizione nello spazio (descriverà, quindi, una traiettoria a partire da una ben precisa posizione iniziale) e possiederà un'ave-locità  $\mathbf{U}$  di componenti  $(u, v, w)$ . Per la Seconda Legge di Newton si ha che:

$$\frac{du}{dt} = F_x \quad \frac{dv}{dt} = F_y \quad \frac{dw}{dt} = F_z \quad [2.8a]$$

Generalizzando ad una qualunque particella ed operando in un sistema inerziale, queste sono le relazioni differenziali che descrivono, dal punto di vista Lagrangiano, il moto dell'atmosfera. Da esse, impiegando la relazione di Eulero, si deducono immediatamente le analoghe leggi riferite ad una descrizione Euleriana:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} &= F_y \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} &= F_z \end{aligned} \quad [2.8b]$$

Esse costituiscono il modello matematico del campo di moto dell'atmosfera da un punto di vista Euleriano, scritte rispetto ad un sistema inerziale. La prima osservazione che emerge è che le (2.8b) altro non sono che le equazioni di Navier-Stokes scritte in un sistema inerziale senza esplicitare i termini forzanti, equazioni che si studieranno estesamente nel seguito. Oltre a ciò, si nota la stretta interdipendenza tra le tre equazioni in cui compaiono sempre contemporaneamente le tre componenti del vento. Da ultimo, il sistema in esame *non è lineare* visto che nelle sue

equazioni compaiono i prodotti tra le componenti del vento e le rispettive derivate parziali. In sostanza, se  $(u_1, v_1, w_1)$  e  $(u_2, v_2, w_2)$  sono due soluzioni del sistema (2.8b), la combinazione lineare delle due non è una possibile soluzione di (2.8b). Questa non linearità è una delle condizioni richieste perché un sistema dinamico presenti caratteristiche caotiche (come rivedrà nel seguito) e quindi ci si può aspettare che l'atmosfera possieda tali caratteristiche, come in effetti è del tutto evidente dal punto di vista sperimentale.

### Esercizio 2.2

Si consideri un pallone aerostatico in movimento che segue il vento che spira da Est verso Ovest con una velocità pari a  $u=10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Si supponga che il tasso di variazione della concentrazione di un generico gas lungo la traiettoria percorsa dal pallone sia  $dN/dt = 10^8 \text{ molecole}\cdot\text{cm}^{-3}\cdot\text{s}^{-1}$ . Se il gradiente di concentrazione locale W-E è pari a  $\partial N/\partial x = 10^{10} \text{ molecole}\cdot\text{cm}^{-3}\cdot\text{km}^{-1}$  (la concentrazione aumenta da Ovest a Est), determinare il tasso di variazione di concentrazione ad un punto fisso  $A$  su cui è transitato il pallone.

Dalla relazione di Eulero si ha che:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{dN}{dt} - u \frac{\partial N}{\partial x}$$

quindi

$$\frac{\partial N}{\partial t} = 10^8 \left( \frac{\text{molecole}}{\text{cm}^3 \cdot \text{s}} \right) + 10 \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \cdot 10^{10} \cdot 10^{-3} \left( \frac{\text{molecole}}{\text{cm}^3 \cdot \text{m}} \right) = 2 \cdot 10^8 \left( \frac{\text{molecole}}{\text{cm}^3 \cdot \text{s}} \right)$$

Così il trasporto ( $u\partial N/\partial x$ ) da Est spiega la metà del tasso di variazione della concentrazione del gas nel punto  $A$  e la trasformazione lungo la traiettoria  $dN/dt$  (trasformazione chimica, deposizione secca o deposizione umida) l'altra metà.

### 2.1.3 LA PARTICELLA ED I CAMPI LAGRANGIANI

Il punto di partenza della visione fluidodinamica Lagrangiana è la particella di fluido. Tale concetto è un concetto continuo e rappresenta un punto, sempre individuabile, che si muove nel dominio di calcolo con la velocità locale del fluido. Più precisamente, se il campo di moto Euleriano nel dominio di indagine non è uniforme e stazionario, ma varia da punto a punto e da istante a istante, la particella Lagrangiana, descrivendo una traiettoria nel dominio, varierà continuamente la propria velocità e al generico istante  $t$ , quando raggiungerà la posizione  $\mathbf{X}_p(t)$ , la sua velocità sarà identica a quella prevista dal campo di moto Euleriano in tale posizione e a quell'istante. Se indichiamo con  $\mathbf{X}_p$  (vettore) la posizione assunta nel dominio dalla particella al tempo  $t$ , per la sua stessa natura dobbiamo considerare il fatto che tale particella ad un *tempo di riferimento* (iniziale)  $t_0$  si trovava nella posizione  $\mathbf{Y}$ . Per ricordare ciò, la posizione della particella viene indicata come:

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{X}_p(\mathbf{Y}, t) \quad [2.9a]$$

Matematicamente  $\mathbf{X}_p$  è una funzione (dello spazio e del tempo) che definisce la *traiettoria* della particella ed è definita completamente da due equazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_p(\mathbf{Y}, t_0) &= \mathbf{Y} \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X}_p(\mathbf{Y}, t) &= \mathbf{U}[\mathbf{X}_p(\mathbf{Y}, t), t] \end{aligned} \quad [2.9b]$$

La prima equazione esprime il fatto che all'istante di riferimento la particella si trova nella posizione  $\mathbf{Y}$ , mentre la seconda esprime il fatto che la velocità della particella eguaglia la velocità (Euleriana) locale  $\mathbf{U}$  del fluido. Da questa equazione si deduce che, una volta noto  $\mathbf{U}$ , nel senso

che si conosce la sua distribuzione nello spazio e nel tempo, è possibile risalire alla posizione iniziale di ognuna delle particelle del fluido, nota la sua posizione ad un istante  $t$ . In pratica ogni particella ha come unico elemento caratteristico la posizione  $\mathbf{Y}$  occupata all'istante di riferimento  $t_0$ .

Ovviamente è possibile definire anche dei campi lagrangiani. Limitiamo l'attenzione a due esempi significativi: il campo di densità (campo scalare) ed il campo di velocità (campo vettoriale). Siano rispettivamente  $\rho(\mathbf{X},t)$  e  $\mathbf{U}(\mathbf{X},t)$  i rispettivi campi Euleriani, cioè il valore di densità e velocità che misureremmo in un posizione  $\mathbf{X}$  dello spazio al tempo  $t$ . Le controparti Lagrangiane le indichiamo come  $\rho_p(\mathbf{X},t)$  e  $\mathbf{U}_p(\mathbf{X},t)$ . All'istante  $t$ ,  $\mathbf{X}_p = \mathbf{X}$ . Da quanto detto è evidente che:

$$\begin{aligned} \rho_p(\mathbf{Y},t) &= \rho[\mathbf{X}_p(\mathbf{Y},t),t] \\ \mathbf{U}_p(\mathbf{Y},t) &= \mathbf{U}[\mathbf{X}_p(\mathbf{Y},t),t] \end{aligned} \quad [2.9c]$$

Considerando ora la densità Lagrangiana, cerchiamo di esprimerla in termini della controparte Euleriana. E' facile vedere che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_p(\mathbf{Y},t) &= \frac{\partial}{\partial t} \rho_p[\mathbf{X}_p(\mathbf{Y},t),t] = \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x},t) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}_p(\mathbf{Y},t)} + \frac{\partial}{\partial t} X_{pi}(\mathbf{Y},t) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \rho(\mathbf{x},t) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}_p(\mathbf{Y},t)} \end{aligned} \quad [2.9d]$$

Ricordando che una particella possiede la medesima velocità locale del fluido, si ha che:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_p(\mathbf{Y},t) = \left( \left. \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x},t) + U_i(\mathbf{x},t) \frac{\partial}{\partial x_i} \rho(\mathbf{x},t) \right) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}_p(\mathbf{Y},t)} = \frac{d}{dt} \rho(\mathbf{x},t) \quad [2.9e]$$

Quindi l'evoluzione nel tempo di un campo lagrangiano scalare altro non è che la derivata materiale della controparte euleriana.

Analogamente si opera per il campo vettoriale di velocità lagrangiana, ottenendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}_p(\mathbf{Y},t) = \frac{d}{dt} \mathbf{U}(\mathbf{x},t) \quad [2.9f]$$

dove la derivata materiale di una grandezza vettoriale è un vettore che ha come componenti le derivate materiali delle rispettive componenti della grandezza in esame.

#### 2.1.4 LE PECULIARITÀ DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO NON INERZIALE

Finora si è sempre considerato un sistema inerziale. Anche se teoricamente non ci sono controindicazioni in proposito, dal punto di vista pratico è opportuno riferire ogni ragionamento ad un sistema di riferimento in qualche maniera solidale con la terra in rotazione attorno al proprio asse con velocità di rotazione  $\boldsymbol{\Omega}$  (la velocità di rotazione è un vettore) il cui modulo è pari a:

$$|\boldsymbol{\Omega}| = \Omega \cong \frac{2\pi}{86164s} = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad [2.10]$$

Si noti che 86164 s è il tempo effettivo impiegato dal pianeta Terra per compiere una rivoluzione completa attorno al proprio asse rispetto ad un sistema di riferimento inerziale (quello delle stelle fisse). E' quindi il *giorno siderale*, pari a 23 h, 56' e 4", di poco inferiore al *giorno convenzionale*. Un tale sistema è chiaramente non inerziale. Per il momento, tra tutti i possibili sistemi di riferimento non inerziali, si consideri quello (Fig.2.2) la cui origine è posta al centro della terra e l'asse  $z$  coincide con l'asse di rotazione terrestre, positivo in direzione del Polo Nord.

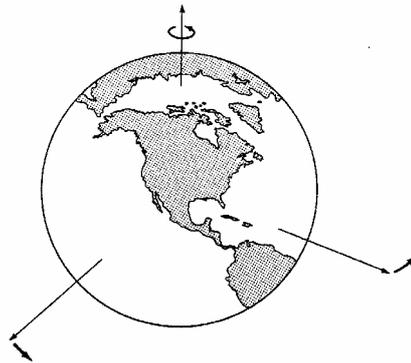


Fig.2.2: sistema cartesiano di assi fisso rispetto alla terra e rotante con essa

Se si considerano contemporaneamente sia un sistema di riferimento inerziale che uno non inerziale, rotante rispetto al primo, tra la velocità assoluta  $\mathbf{v}_a$  di un punto materiale in movimento (cioè riferita al sistema inerziale) e la velocità relativa  $\mathbf{v}$  (nel sistema rotante) verrà la relazione vettoriale seguente:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v} + \mathbf{v}_r \quad [2.11]$$

dove  $\mathbf{v}_r$  è la velocità di rotazione dovuta alla rotazione del sistema non inerziale (in questo caso quello di Fig.2.2). Il quesito che ci si pone è come trasformare una derivata materiale relativa ad una particella quando si passa da un sistema inerziale ad un sistema non inerziale, rotante con velocità angolare costante. Seguendo Dutton (1995), si può affermare (e dimostrare) che:

- se si considera uno scalare  $\Phi$ , la derivata materiale  $d\Phi/dt$  è identica nei due sistemi di riferimento;
- se si considera una grandezza vettoriale  $\mathbf{A}$ , la relazione che intercorre tra la derivata materiale nel sistema inerziale  $(d\mathbf{A}/dt)_a$  e quella nel sistema rotante (a velocità costante  $\boldsymbol{\Omega}$ )  $d\mathbf{A}/dt$  è la seguente:

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_a = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \quad [2.12a]$$

dove con  $\times$  si è indicato il prodotto vettoriale. In sostanza è comodo generalizzare questa relazione, ricordando che, in un sistema non inerziale, rotante con velocità angolare costante  $\boldsymbol{\Omega}$ , l'operatore  $(d/dt)_a$  nel sistema inerziale si trasforma come segue:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_a = \frac{d}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \quad [2.12b]$$

## 2.2 IL MODELLO PER LE VARIABILI ISTANTANEE

Nel seguito viene individuato, a partire dalle leggi di conservazione della Fisica, un modello teorico completo che descrive in termini Euleriani l'evoluzione spazio-temporale del valore istantaneo delle grandezze che descrivono lo stato e la dinamica dell'atmosfera. Per limitare un'eccessiva complessità nell'esposizione, le varie relazioni verranno dedotte introducendo spesso delle semplificazioni. Chi fosse interessato a tutti i dettagli faccia riferimento a Landau e Lifshitz (1987) e a Dutton (1995).

### 2.2.1 LA CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Dato che in atmosfera la massa non si crea e non si distrugge, è necessario che essa si conservi. Da questo ovvio principio fisico si deduce la prima delle relazioni differenziali del modello fluidodinamico del PBL. Tale relazione verrà dedotta seguendo la logica Euleriana, anche se non è difficile ottenerne una deduzione Lagrangiana (Holton 2004). Prima, però, di farci assorbire dagli aspetti matematici del problema, è opportuno addentrarci un po', almeno in termini qualitativi, negli aspetti fisici del problema. Ancora una volta immaginiamo che il fluido (l'aria, nel nostro caso), sia costituito da particelle di piccole dimensioni. Ognuna di queste particelle avrà una superficie esterna, che ne delimita il volume, e nel suo interno risiederà un numero elevatissimo di molecole. Esse non sono in quiete, ma in continua agitazione termica e alcune attraverseranno questa superficie, abbandonando la particella *madre* e finendo nelle particelle vicine. D'altro canto, attraverso la superficie esterna della particella che stiamo considerando entreranno anche molecole provenienti dalle particelle vicine. Insomma, all'interno del fluido si instaura una *diffusione molecolare*. Tuttavia, se ci riferiamo alla scala temporale del continuo, grande rispetto a quella tipica dell'agitazione termica, il bilancio medio di massa è nullo. In sostanza, in media il numero delle molecole che abbandonano una data particella è pari a quello delle molecole che vi entrano dall'esterno.

La tecnica che useremo per dedurre dal principio di conservazione della massa le relative implicazioni sul moto dell'atmosfera consiste nell'individuare un volume di controllo Euleriano localizzato in una generica posizione entro il dominio di calcolo. Tale volume di controllo (Fig.2.3) sarà un volume cubico con le facce orientate secondo gli assi di riferimento. La sua scelta è totalmente arbitraria ed è facile dimostrare che essa non influenza in alcun modo le deduzioni che ne deriveranno. In effetti si potrebbe prendere a riferimento un volume di controllo di forma qualsiasi ed un esempio di come si possano condurre i calcoli in questo caso è dato in Sorbjan (1989). Tuttavia i vari ragionamenti analitici che ne conseguono risultano eccessivamente *formali* e richiedono la conoscenza della Teoria dei Campi Vettoriali e l'applicazione del Teorema di Gauss. Privilegiando l'aspetto didattico, si è preferito considerare un volume di controllo più semplice, a forma di parallelepipedo, che ci consente di evitare la maggior parte delle complicazioni formali, pur giungendo a conclusioni corrette.

La massa di tale volume altro non è che il prodotto del volume stesso per la densità dell'aria  $\rho$  caratteristica del punto in cui è collocato. E' un'evidenza in fluidodinamica ed anche in fisica dell'atmosfera il fatto che la densità inevitabilmente varia da punto a punto ed anche nel tempo, cioè  $\rho$  è un campo, funzione dello spazio e del tempo. Il volume di controllo, in generale, si può trovare in un punto dello spazio in cui il flusso d'aria entrante attraverso la sua superficie esterna è maggiore di quello uscente, o viceversa. Ad un dato istante, quindi, la variazione netta di densità ad un punto (che corrisponde al centro del volume di controllo) dipenderà dalla variazione totale del flusso d'aria entrante e uscente.

#### 2.2.1.1 La formulazione di base

Si consideri un volume di controllo (Fig.2.3), centrato attorno al punto  $P(x,y,z)$ , di dimensioni  $\delta x$ ,  $\delta y$  e  $\delta z$  sufficientemente piccole e con volume  $V$  pari a  $V = \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$ . La conservazione della massa in un contesto Euleriano afferma che *il flusso di massa entrante nel volume di controllo deve essere esattamente bilanciato dal flusso di massa uscente e dal tasso di accumulazione della massa entro il volume stesso.*

Si consideri inizialmente la direzione  $x$ . Sia  $\rho$  la densità dell'aria e  $u$  la componente  $x$  del moto relativamente alla faccia di sinistra;  $\rho \cdot u|_1 \cdot \delta y \cdot \delta z$  sarà quindi il flusso di materia che attraversa tale superficie. Per esprimere l'analogo flusso per la faccia di destra (sempre in direzione  $x$ ) è opportuno far uso dello sviluppo di Taylor secondo cui:

$$\rho u|_2 = \rho u|_1 + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \Big|_1 \delta x + O(\delta x^2) \quad [2.13a]$$

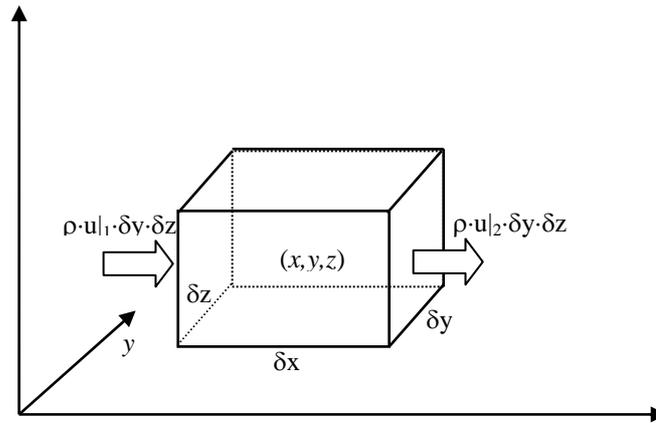


Fig.2.3: bilancio di massa per un volume di controllo euleriano

Quindi il flusso netto di massa in direzione  $x$  risulta pari a:

$$-\frac{\partial \rho u}{\partial t} \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z + O(\delta x^2) \quad [2.13b]$$

Analogamente si ragiona per le direzioni  $y$  e  $z$ . D'altro canto, indipendentemente dai flussi di massa entranti ed uscenti dal volume di controllo, un incremento di massa nel volume può essere ottenuto solo con una variazione della densità dell'aria. Pertanto la variazione complessiva di massa nel volume di controllo sarà pari a  $V \cdot \partial \rho / \partial t$

Sulla base di tutto ciò, si può affermare che ad ogni istante la *conservazione della massa per il volume di controllo* sarà data da:

$$-\left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z + O(\delta x^2, \delta y^2, \delta z^2) = V \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad [2.13c]$$

Facendo tendere  $\delta x$ ,  $\delta y$  e  $\delta z$  a zero, gli errori di approssimazione introdotti dallo sviluppo di Taylor tendono anch'essi a zero e quindi la (2.13c) prende la forma seguente, detta l'equazione di continuità:

$$-\left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad [2.14a]$$

che rappresenta matematicamente il principio di conservazione della massa. Tale relazione, differenziale e prognostica, lega tra loro le tre componenti del vento e la densità dell'aria. La relazione così ottenuta è scritta in *forma di flusso*, visto che le componenti della velocità sono moltiplicate per la densità dell'aria e quindi rappresentano il flusso di materia.

La (2.14a) è scritta in termini cartesiani; tuttavia, indicando con  $\mathbf{u}$  il vettore vento, con  $u_j$  le sue generiche componenti cartesiane e con  $x_j$  le generiche coordinate, la (2.14a) può anche essere riscritta in notazione vettoriale e in notazione tensoriale come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad [2.14b]$$

Si nota immediatamente dalla (2.14a), ma soprattutto dalla prima delle (2.14b), che, per il principio della conservazione della materia, la variazione temporale della densità dell'aria è totalmente bilanciata dalla *divergenza* del flusso di materia  $\rho \mathbf{u}$ . Si ricordi che l'operatore divergenza

di un vettore  $\mathbf{A}$  (con componenti cartesiane  $A_x$ ,  $A_y$  e  $A_z$ ) è definito rispettivamente in notazione vettoriale, cartesiana e tensoriale, come:

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}) = \nabla \cdot \mathbf{A} = u \frac{\partial A_x}{\partial x} + v \frac{\partial A_y}{\partial y} + w \frac{\partial A_z}{\partial z} = u_j \frac{\partial A_j}{\partial x_j} \quad [2.14c]$$

Maggiori dettagli sulla notazione vettoriale e tensoriale sono riportati in *Appendice A*.

### 2.2.1.2 Alcune semplificazioni

Le relazioni (2.14a e b) rappresentano *esattamente* il principio della conservazione della massa. Sono però possibili alcune semplificazioni, tutte basate sull'analisi di scala dei vari termini che le compongono e decisamente congruenti con le dimensioni del dominio di indagine a mesoscala prescelto. Per maggiori dettagli si rimanda a Holton (2004) e Pielke (2002).

Per prima cosa si riscrive la (2.14b) nel modo seguente, utilizzando le proprietà delle derivate:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \cdot u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad [2.14d]$$

In genere la distribuzione di pressione e densità dell'aria nello spazio e nel tempo a mesoscala non si discosta molto dalle caratteristiche dell'atmosfera standard a riposo introdotte al Cap.1 e riassunte nell'equazione idrostatica (1.22). Partendo da queste constatazioni, è possibile definire (Holton, 2004) una pressione standard  $p_0(z)$  variabile solo in verticale (e non in orizzontale e nel tempo), definibile come la media temporale della media orizzontale della pressione ad una certa quota  $z$ . In pratica  $p_0(z)$  è il *valore di background sinottico* della pressione. In corrispondenza a  $p_0(z)$  si definisce una densità standard  $\rho_0(z)$  (*valore di background della densità dell'aria*) in maniera tale che  $p_0(z)$  e  $\rho_0(z)$  rispettino *esattamente* l'equazione idrostatica. Pertanto, assumendo questa ipotesi di lavoro, il campo spazio-temporale di pressione e densità dell'aria potrà essere visto come la sovrapposizione tra i rispettivi valori di *background*  $p_0$  e  $\rho_0$  e le *perturbazioni a mesoscala*  $p''$  e  $\rho''$  (*ipotesi idrostatica*) in modo tale che:

$$\begin{aligned} p(x, y, z, t) &= p_0(z) + p''(x, y, z, t) \\ \rho(x, y, z, t) &= \rho_0(z) + \rho''(x, y, z, t) \end{aligned} \quad [2.15a]$$

Quando l'atmosfera è a riposo,  $p''$  e  $\rho''$  non potranno che essere identicamente nulli. Questa definizione è molto restrittiva, ma estremamente semplice a usarsi. Pielke (2002) impiega, invece, una definizione di  $p_0$  (e quindi di  $\rho_0$ ) più generale: ognuna delle due grandezze, in questo caso, risulta essere la media orizzontale ad una certa quota calcolata su distanze orizzontali tipiche dei fenomeni sinottici (dell'ordine di  $10^6$  m). In questo caso  $p_0$  e  $\rho_0$  variano con gradienti molto piccoli ma non nulli sia in orizzontale che nel tempo, mentre in verticale deve sempre valere l'equazione idrostatica. Per semplicità, nel seguito si utilizzerà prevalentemente la definizione espressa dalle (2.15a).

Consideriamo ora l'equazione di continuità (2.14d). Utilizzando l'approssimazione idrostatica:

$$\frac{1}{\rho_0 + \rho''} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \rho'') + u_j \frac{\partial \rho_0}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho''}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad [2.15b]$$

In equilibrio idrostatico,  $\rho_0$  dipende solo dalla coordinata  $z$  e quindi le derivate orizzontali si annullano. Pertanto:

$$\underbrace{\frac{1}{\rho_0 + \rho''} \cdot \left[ \frac{\partial \rho''}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho''}{\partial x_j} \right]}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\frac{w}{\rho_0 + \rho''} \cdot \frac{\partial \rho_0}{\partial z}}_{\mathbf{B}} + \underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{\mathbf{C}} = 0 \quad [2.15c]$$

Per procedere nelle approssimazioni, è opportuno effettuare un'analisi di scala dei vari termini presenti. Seguendo Holton (2004), sulla base delle evidenze sinottiche sperimentali è possibile stabilire le seguenti *scale*:

- una lunghezza di scala orizzontale  $L \sim 10^6$  m
- una velocità di scala orizzontale  $U \sim 10$  m·s<sup>-1</sup>
- una velocità di scala verticale  $W \sim 10^{-2}$  m·s<sup>-1</sup>

Si consideri il termine **A** della (2.15c); dall'analisi di scala si ha che:

$$\frac{1}{\rho_0 + \rho''} \cdot \left[ \frac{\partial \rho''}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho''}{\partial x_j} \right] \approx \frac{\rho''}{\rho_0} \cdot \frac{U}{L} \cong 10^{-7} s^{-1}$$

Per analizzare il termine **B** della (2.15c), per prima cosa si nota che:

$$\frac{w}{\rho_0 + \rho''} \cdot \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \approx \frac{W}{H} \cong \frac{10^{-2}}{H}$$

dove  $H$  è una lunghezza di scala verticale caratteristica da stimare. Se si considera il parametro  $H_\alpha$ , denominato *density scale depth* e definito approssimativamente come:

$$H_\alpha \approx \frac{\partial(\ln \rho_0)}{\partial z}$$

si ha che, nelle situazioni reali a mesoscala,  $H_\alpha$  ha un valore dell'ordine di 8 km (Pielke 2002). Se  $H$  è dello stesso ordine di grandezza di  $H_\alpha$  il termine **B** vale:

$$\frac{w}{\rho_0 + \rho''} \cdot \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \approx \frac{W}{H} \cong 10^{-6} s^{-1}$$

Per trattare il termine **C** della (2.15c), lo si espande nelle tre componenti cartesiane. A livello sinottico, mentre la componente verticale è trascurabile,  $\partial u/\partial x$  e  $\partial v/\partial y$  tendono ad assumere valori dello stesso ordine di grandezza ma di segno opposto e quindi tendono a bilanciarsi. Inoltre si ha che:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \approx \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \approx 10^{-1} \frac{U}{L}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \approx 10^{-1} \frac{U}{L} \cong 10^{-6} s^{-1}$$

mentre

$$\frac{\partial w}{\partial z} \approx \frac{W}{H_\alpha} \cong 10^{-6} s^{-1}$$

Alla fine, questa analisi porta ad affermare che se  $H$  è dello stesso ordine di grandezza di  $H_\alpha$ , i termini **B** e **C** sono di un ordine di grandezza superiori al termine **A** che, quindi, può essere trascurato. Questa assunzione (*assunzione anelastica*) fa sì che l'equazione di continuità si riduca alla forma seguente:

$$\frac{w}{\rho_0 + \rho''} \cdot \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad [2.16a]$$

cioè

$$u_j \frac{\partial \rho_0}{\partial x_j} + \rho_0 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho_0 u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 v}{\partial y} + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0 \quad [2.16b]$$

che si ottiene considerando che, agli effetti pratici,  $\rho_0^{-1} \approx (\rho_0 + \rho'')^{-1}$ . La (2.16b) viene normalmente indicata come forma anelastica dell'equazione di continuità o deep continuity equation.

Se, invece,  $H \ll H_\alpha$  (*ipotesi di incomprimibilità*), l'ordine di grandezza del termine **B** risulta inferiore a quello del termine **C**. In questo caso la (2.15c) si semplifica ulteriormente, trascurando i termini **A** e **B** (e quindi eliminando la presenza della densità di *background*), e si riduce a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad [2.16c]$$

relazione che afferma il fatto che la divergenza del campo di moto (vento) deve essere nulla. Questa equazione è indicata come la forma incomprimibile dell'equazione di continuità (shallow continuity equation).

Questi ragionamenti sono basati sull'approssimazione idrostatica espressa dalle (2.15a). Se si adottasse l'altra definizione data per  $p_0$  e  $\rho_0$  si giungerebbe alle stesse conclusioni come dimostrato in Pielke(2002).

Le condizioni a mesoscala spesso presentano caratteristiche tali da consentire di impiegare la forma incomprimibile dell'equazione di continuità che, tra l'altro, ha il grande vantaggio di essere estremamente semplice. Tuttavia la forma anelastica, che consente alla densità di background di variare con la quota, è di uso ben più generale anche se introduce inevitabilmente complicazioni analitiche e numeriche.

La (2.14a) o la (2.14b), a seconda della formulazione adottata, sono *equazioni prognostiche* e rappresentano la prima delle relazioni differenziali che forniscono il tasso di variazione della densità dell'aria in tutto il dominio di indagine. Viceversa, le semplificazioni qui introdotte, cioè la (2.16b) e la (2.16c), sono delle *equazioni diagnostiche* che, in parole povere, più che fornire una legge che la densità dell'aria deve seguire, determinano una sorta di vincolo che deve essere rispettato. Nel primo caso l'equazione anelastica stabilisce un vincolo, nello spazio e nel tempo, per il flusso di materia, mentre la forma incomprimibile dell'equazione di continuità stabilisce un legame forte tra le diverse componenti del vettore di velocità in un punto.

### Esercizio 2.3

Sia dato un volume di controllo con gli spigoli, paralleli agli assi cartesiani, di dimensione  $\Delta x = \Delta y = 500\text{m}$  e  $\Delta z = 20\text{m}$ . La componente  $x$  del moto sulla faccia W sia  $u_1 = 3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  e sulla faccia E  $u_2 = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , la componente  $y$  del moto sia  $v_1 = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  sulla faccia S e  $v_2 = 2.5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  sulla faccia N e quella verticale sia  $w_1 = 0.1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  sulla faccia inferiore. Se si adotta l'approssimazione di incomprimibilità, quale deve essere il valore della componente verticale del moto sulla faccia superiore  $w_2$ ?

Per risolvere il problema si discretizzi la (4.15b) nel modo suggerito dal problema, cioè:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta y} + \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u_2 - u_1}{\Delta x} + \frac{v_2 - v_1}{\Delta y} + \frac{w_2 - w_1}{\Delta z} \cong 0$$

da cui

$$w_2 \cong w_1 - \Delta z \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta y} \right) = 0.1 - 20 \cdot \left( \frac{2-3}{500} + \frac{2.5-2}{500} \right) = 0.12 \text{ms}^{-1}$$

Pertanto, una divergenza negativa in orizzontale ha generato una divergenza positiva in verticale, cioè un aumento della componente verticale del moto con la quota.

### 2.2.2 LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Il punto di partenza di quanto verrà di seguito sviluppato è la *seconda legge di Newton* secondo cui un punto materiale, cui venga applicata una forza, reagisce acquisendo un'accelerazione inversamente proporzionale alla propria massa. In un sistema di riferimento inerziale, indicando con  $\mathbf{F}$  il vettore della forza applicata, con  $m$  la massa associata al punto materiale e con  $\mathbf{a}$  l'accelerazione acquisita (grandezza vettoriale), si ha che:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \quad [2.17a]$$

L'impiego di questo principio di conservazione ci consentirà di individuare le relazioni prognostiche per le tre componenti della velocità del vento, cioè di individuare il campo vettoriale Euleroiano  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  dove  $\mathbf{x}$  è un punto qualsiasi del dominio di indagine e  $t$  è il tempo. In questo caso, il modo più semplice per procedere è quello di adottare un approccio Lagrangiano, cioè considerare il moto nello spazio di una *particella*. I ragionamenti sviluppati al punto 2.1.2 vengono ora qui completati e definiti.

#### 2.2.2.1 La formulazione di base

Se si considera un volume di controllo di dimensioni infinitesime, è possibile assimilare il suo comportamento meccanico a quello di un punto materiale di pari massa e quindi applicare la (2.17a). Per comodità, senza togliere nulla alla generalità del ragionamento, si consideri, al posto della forza applicata, l'equivalente forza specifica  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}/m$  e, detto  $\mathbf{V}_n$  il vettore velocità Lagrangiana della particella, la relazione precedente diventa:

$$\left( \frac{d\mathbf{V}_n}{dt} \right)_n = \mathbf{F}' \quad [2.17b]$$

dove  $(d/dt)_n$  è la derivata materiale riferita ad un sistema inerziale. Di fatto, questa è la relazione prognostica del moto che governa l'atmosfera, una volta esplicitate le forzanti meccaniche. Naturalmente c'è una complicazione importante: essa vale solo in un sistema di riferimento inerziale. Sarebbe irrealistico mantenere un tale sistema di riferimento, mentre è sicuramente più comodo adottarne uno non inerziale solidale con la terra che ruota con velocità angolare  $\boldsymbol{\Omega}$  costante (Fig.2.2).

Ricordando quanto detto al punto 2.1.4, è possibile trasformare la (2.17b) in una relazione equivalente valida in un sistema di riferimento rotante. In primo luogo si ricordi che tra la velocità  $\mathbf{V}_n$ , rilevata in un sistema inerziale, e la velocità  $\mathbf{V}$ , rilevata nel sistema rotante con velocità angolare costante  $\boldsymbol{\Omega}$ , sussiste la relazione:

$$\mathbf{V}_n = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} \quad [2.17c]$$

dove  $\mathbf{R}$  è il vettore posizione della particella rispetto dal centro della terra. Inoltre, utilizzando le (2.12a) e (2.12b), che indicano come trasformare la derivata materiale in un sistema di riferimento non inerziale e rotante, la (2.17b) diventa:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2 \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = \mathbf{F}' \quad [2.18]$$

come si può facilmente dimostrare. Considerando tale equazione, si può notare che:

- il primo termine rappresenta la derivata materiale della velocità della particella come vista dal sistema rotante;
- il secondo termine è un'accelerazione apparente generata dalla rotazione terrestre, detta *accelerazione di Coriolis*, attiva solo quando la particella è in moto relativo rispetto alla terra;
- il terzo termine è l'accelerazione centripeta, sempre presente anche quando la particella è a riposo.

Perché la (2.18) risulti una relazione totalmente definita (ovviamente in termini di derivata materiale) è necessario esplicitare le forzanti in essa presenti.

#### La forzante derivante dalla pressione

La prima forzante esterna presa in considerazione è quella che deriva dalla variabilità nello spazio e nel tempo della pressione atmosferica. Considerando un generico volume di controllo (Fig.2.4), è necessario scrivere una relazione che esprima la forza specifica (per unità di massa) che ad esso si applica per effetto della pressione esterna. Considerando inizialmente, come in figura, solo la direzione  $x$ , la differenza di pressione che s'instaura tra le due facce del volume perpendicolari a tale asse ( $P_1$  sulla faccia Ovest e  $P_2$  sulla faccia Est) può essere espressa, impiegando un'espansione di Taylor arrestata al primo ordine, come:

$$P_2 - P_1 = \frac{\partial p}{\partial x} \delta x + O(\delta x^2) \quad [2.19a]$$

e quindi la forza per unità di massa, diretta ovviamente in senso opposto al gradiente di pressione, è:

$$f_{PGx} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + O(\delta x^2) \quad [2.19b]$$

Se  $\delta x \rightarrow 0$  si ha che:

$$f_{PGx} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + O(\delta x^2) \right] = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad [2.19c]$$

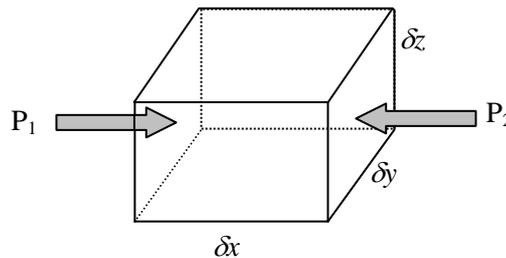


Fig.2.4: volume di controllo soggetta ad un gradiente di pressione lungo  $x$

Ragionamenti analoghi possono essere fatti per le direzioni  $y$  e  $z$  e quindi, complessivamente, il vettore forza per unità di massa dovuto alle differenze spaziali di pressioni (cioè al gradiente di pressione) risulta dato da:

$$\mathbf{f}_{PG} = -\frac{1}{\rho} \cdot \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \right] = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad [2.19d]$$

#### La forzante derivante dalla gravità

La seconda forzante è la forza di gravità esercitata dalla terra sulla particella, su cui viene applicata una forza  $\mathbf{G}$ . E' consuetudine, vista la geometria del sistema, combinare tale forza con la forza apparente centripeta, ottenendo la forzante di *gravità modificata* espressa in termini vettore-

riali come:

$$\mathbf{f}_{GR} = -g\mathbf{k} = \mathbf{G} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \quad [2.20a]$$

dove  $g$  è l'usuale accelerazione di gravità. Questa forzante è diretta sempre secondo la verticale. Per completezza, è opportuno ricordare che  $g$  è funzione sia della latitudine  $\Phi$  che della quota secondo la relazione:

$$g = \left[ \left( R_e \Omega^2 \cos \Phi \cdot \sin \Phi \right)^2 + \left( g^* - R_e \Omega^2 \cos^2 \Phi \right)^2 \right]^{1/2} \quad [2.20b]$$

$$g^* = \frac{GM_e}{(R_e + z)^2}$$

dove  $z(\text{m})$  è la quota sul livello del mare,  $M_e$  ( $5.98 \cdot 10^{24}$  kg) è la massa della Terra,  $R_e$  ( $6.37 \cdot 10^6$  m) è il suo raggio medio e  $G$  ( $6.672 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup> kg<sup>-1</sup> s<sup>-2</sup>) è la costante universale della gravità.

#### La forzante viscosa

L'ultima forzante è una *forzante interna* che tiene conto della dissipazione di quantità di moto di un fluido viscoso in movimento dovuta al moto molecolare, come già si è visto al punto 1.2.2. Senza entrare in dettaglio (agli interessati si raccomanda il paragrafo 6.8 di Dutton, 1995), indicando con  $\nu$  il coefficiente di viscosità cinematica dell'aria, questa forzante risulta pari a:

$$\mathbf{f}_{VS} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad [2.21a]$$

dove:

$$F_i = \nu \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad [2.21b]$$

In atmosfera, quando si trattano fenomeni a mesoscala e si studia il comportamento medio del *PBL*, si può facilmente verificare che tale forzante risulta del tutto ininfluenza e pertanto può essere totalmente ignorata. A rigore ciò è vero solo lontano dai bordi rigidi del dominio di indagine (nel caso del *PBL*, lontano dal suolo), dove, al contrario, gioca un ruolo essenziale. Anche se è vero che nelle relazioni operative che descrivono il *PBL* le forzanti viscosive restano ai margini dell'attenzione (o addirittura vengono ignorate), tuttavia implicitamente continuano a giocare un ruolo primario. Infatti sono l'unica causa di irreversibilità e di dissipatività del sistema e governano, assieme ai moti turbolenti, i meccanismi di scambio energetico che hanno luogo alle scale spaziali inferiori.

#### Le leggi finali della conservazione della quantità di moto

Complessivamente, la forzante  $\mathbf{F}'$  nella (2.17) risulta essere la somma vettoriale:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{f}_{PG} + \mathbf{f}_{GR} + \mathbf{f}_{VS} \quad [2.22]$$

Ricordando la relazione di Eulero per la derivata materiale, la (2.18) si trasforma nelle relazioni seguenti (la prima scritta in notazione vettoriale e la seconda in notazione tensoriale) note come equazioni di Navier-Stokes che descrivono nello spazio e nel tempo il moto dell'atmosfera:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} - \frac{1}{\rho} \nabla p - g\mathbf{k} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{V} \quad [2.23a]$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} - g\delta_{i3} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad [2.23b]$$

La (2.23b) è scritta in notazione tensoriale e richiede qualche spiegazione (si veda anche l'Appendice A). Col simbolo  $\delta_{ij}$  si è indicata la *Delta di Kronecker* che vale 1 quando  $i = j$  e 0 altrimenti. Quindi l'espressione  $\delta_{i3}$  significa che tale termine sarà nullo quando si considerano le

componenti orizzontali del moto (cioè quando  $i = 1$  e  $2$ ) e varrà  $-g$  per la sola componente verticale. Col simbolo  $\varepsilon_{ijk}$ , invece, si è indicato l'*alternating unit tensor* il cui valore dipende dai tre parametri che lo caratterizzano. In particolare, vale 1 se la sequenza  $ijk$  vale 123, 231, 312, vale -1 se la sequenza vale 321, 213, 132 e 0 in tutti gli altri casi.

### 2.2.2.2 Alcune semplificazioni

Fin qui si è adottato un generico sistema di riferimento non inerziale rotante con la terra. Per comodità operativa, dovendo considerare un dominio a mesoscala, è conveniente a questo punto chiarire definitivamente quale sistema di riferimento convenga adottare. Lasciando ad altri settori della Meteorologia sistemi di riferimento differenti (per esempio le coordinate sferiche, sistema di riferimento estremamente comodo per modelli a scala sinottica), per la studio della mesoscala e del *PBL* è conveniente adottare un sistema di coordinate tangenziali come quelle raffigurate in Fig.2.5.

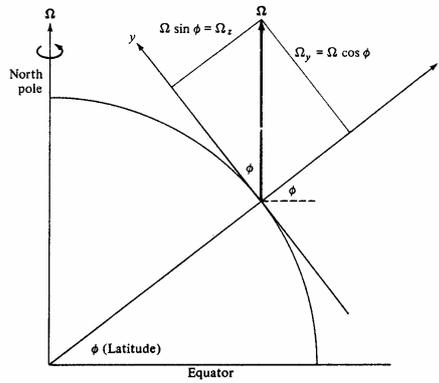


Fig.2.5: sistema di coordinate tangenziali

Tale sistema:

1. colloca l'origine degli assi in corrispondenza di un punto  $P_0$  posto alla superficie terrestre alla generica latitudine  $\Phi$ ,
2. l'asse  $z$  ha origine in  $P_0$ , ha la direzione della congiungente  $P_0$  col centro della terra ed è diretto verso l'atmosfera,
3. gli assi  $x$  e  $y$  giacciono sul piano tangente la superficie terrestre in  $P_0$  e sono diretti rispettivamente verso Est e verso Nord.

Questo sistema di coordinate è il riferimento naturale per un osservatore al suolo. Il suo utilizzo è giustificato solo se il dominio di indagine è relativamente limitato in latitudine e longitudine, in modo tale che gli effetti della curvatura terrestre siano poco significativi, condizioni rispettate da un tipico dominio di indagine per un'analisi a mesoscala o per lo studio del solo *PBL*.

Rispetto ad un tale sistema, il vettore  $\mathbf{\Omega}$  presenta le componenti:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= 0 \\ \Omega_y &= |\mathbf{\Omega}| \cdot \cos \Phi \\ \Omega_z &= |\mathbf{\Omega}| \cdot \sin \Phi \end{aligned} \quad [2.24a]$$

e quindi:

$$\begin{aligned} -2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} &= -2\mathbf{\Omega} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ u & v & w \end{vmatrix} = \\ &= -2\mathbf{\Omega} \cdot [(w \cdot \cos \Phi - v \cdot \sin \Phi) \cdot \mathbf{i} + u \cdot \sin \Phi \cdot \mathbf{j} - u \cdot \cos \Phi \cdot \mathbf{k}] \end{aligned} \quad [2.24b]$$

E' consuetudine, per semplificare la scrittura delle equazioni di moto, definire come *parametro di Coriolis*  $f$  la grandezza  $f = 2\Omega \cdot \sin\Phi$  che alle medie latitudini vale circa  $10^{-4}$ . Dato, poi, che a mesoscala la componente verticale del moto  $w$  risulta piccola (circa due ordini di grandezza inferiore a quelle orizzontali), il termine  $2\Omega \cdot w \cdot \cos\Phi$  risulta del tutto trascurabile rispetto a  $2\Omega \cdot u \cdot \sin\Phi$ .

In conclusione, le equazioni di moto possono essere riscritte in notazione cartesiana nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + v \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + f^* u + v \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad [2.25b]$$

dove con  $f^*$  si è indicato sinteticamente il termine  $2\Omega u \cos\Phi$ , che, però, risulta sostanzialmente trascurabile rispetto ai termini di pressione e di gravità. Durante tutta l'esposizione si è impiegata estesamente la notazione tensoriale. Se al lettore tale relazione non fosse chiara, si invita nuovamente alla lettura dell'Appendice A.

#### Esercizio 2.4

Consideriamo due isobare costituite da due linee parallele in direzione N-S. La distanza che le separa è pari a 100 km, il valore dell'isobara a W è pari a 1012 mb e quella ad E è 1008 mb. Assumendo per la densità dell'aria il valore  $\rho = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , trovare l'ordine di grandezza della forza specifica di gradiente orizzontale.

In primo luogo, la forza specifica lungo l'asse  $y$  deve essere nulla, visto che le isobare sono rette parallele a tale asse. La forza specifica lungo  $x$ , invece, risulta pari a:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cong \frac{1}{1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} \cdot \left( \frac{1012 \text{ mb} - 1008 \text{ mb}}{10^5 \text{ m}} \right) \cdot 100 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{s}^{-2}}{\text{mb}} = 0.0033 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

che è molto più piccola della forza specifica dovuta alla gravità. Ricordando che il contributo dovuto all'accelerazione di Coriolis è  $fu$  e  $fv$  e che  $u$  e  $v$  sono dell'ordine di  $10 \text{ ms}^{-1}$  e  $f$  dell'ordine di  $10^{-4}$ , la forza di gradiente orizzontale è dello stesso ordine di grandezza della forza di Coriolis.

#### Esercizio 2.5

Si stima la forza di gradiente verticale per unità di massa ipotizzando che al livello del suolo la pressione sia pari a 1013 mb e a 100 m sia di 1000 mb. Si ipotizzi, poi, che la densità media dell'aria a 50 m sia pari a  $1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Con questi dati, la forza specifica di gradiente verticale può essere approssimata da:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \cong \frac{1}{1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} \cdot \left( \frac{1013 \text{ mb} - 1000 \text{ mb}}{100 \text{ m}} \right) \cdot 100 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{s}^{-2}}{\text{mb}} = 10.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

che è 3000 volte più grande della componente orizzontale della forza di gradiente e del tutto paragonabile alla gravità.

### 2.2.3 L'EQUAZIONE DI STATO DEI GAS

Il sistema di quattro equazioni differenziali costituito dall'equazione di continuità e dalle equazioni di Navier-Stokes contiene 5 incognite ( $\rho, p, u, v, w$ ), quindi non è matematicamente chiuso. D'altro canto, finora sono state considerate solo relazioni fisiche di tipo meccanico, senza considerare in alcun modo le leggi della termodinamica.

La prima legge termodinamica che si prende in considerazione è l'equazione di stato di un gas perfetto di cui si è trattato al *Cap.1*. La sua espressione (1.6a) varrebbe rigorosamente solo nel caso in cui in atmosfera fosse assente l'umidità, tuttavia, in sua presenza, l'equazione di stato assume una forma leggermente diversa, come si è visto. Dato che il contenuto di vapore acqueo può essere descritto dall'umidità specifica  $q$  e dalla tensione di vapore  $e$ , sotto l'ipotesi che l'aria ed il vapore acqueo siano gas ideali, si ha che:

$$p = p_d + e = \rho_d R_d T + \rho_v R_v T = \rho R_d T (1 + 0.61q) \quad [2.26a]$$

dove con  $p_d$  si è indicata la pressione parziale dell'aria secca e  $R_v = 1.61 R_d$ . Definendo temperatura virtuale (1.18b) la temperatura che deve avere una quantità di aria secca ad una certa pressione  $p$  perché la sua densità sia la stessa di una particella d'aria con umidità specifica  $q$  alla stessa pressione, la forma dell'equazione di stato risulta essere la seguente:

$$p = \rho \cdot R_d T_v \quad [2.26b]$$

### 2.2.4 LA PRIMA LEGGE DELLA TERMODINAMICA

La seconda considerazione termodinamica che dobbiamo invocare per chiudere il sistema di equazioni precedenti è la conservazione dell'energia, vista la comparsa della temperatura e della pressione nell'equazione di stato dei gas. La trattazione completa e rigorosa dell'argomento è complessa e analiticamente laboriosa e si rimanda chi fosse interessato a Landau e Lifshitz (1987) e a Dutton (1995). Qui di seguito si è preferito realizzare una presentazione decisamente semplice, anche se parziale, dell'argomento.

Lo stato termodinamico di un sistema (e quindi di una generica particella d'aria in moto) è completamente definito una volta noti due dei tre parametri seguenti: la pressione  $p$ , il volume  $V$  (o la densità  $\rho$ ) e la temperatura virtuale  $T_v$ . Se il sistema subisce una trasformazione, la quantità di calore  $dQ$  scambiata attraverso le pareti della particella e la variazione di volume  $dV$  dovuta ad una pressione  $p$  sono legate alla variazione di energia interna  $dU$  dalla prima legge della termodinamica:

$$dU = dQ - pdV \quad [2.27a]$$

In altre parole, il sistema scambia energia con l'esterno o acquistando una quantità di calore  $dQ$  oppure compiendo del lavoro  $pdV$ . Come mostrato al punto 1.1.9.1, la (2.27a) può essere riscritta per una particella di aria umida, congruentemente con la (1.29), come:

$$dQ = c_p dT_v - \alpha dp \quad [2.27b]$$

dove si è sostituita la densità con il volume specifico  $\alpha$  definito come il reciproco della densità. Dividendo tutto per  $dt$  ed evidenziando il tasso di variazione della temperatura potenziale, si ottiene:

$$\frac{dT_v}{dt} = \frac{1}{c_p} \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{\rho c_p} \cdot \frac{dp}{dt} \quad [2.28a]$$

Si consideri ora la definizione di temperatura potenziale virtuale  $\theta_v$ :

$$\theta_v = T_v \left( \frac{1000}{p} \right)^{R/c_p} = T_v \left( \frac{1000}{p} \right)^k \quad [2.28b]$$

Differenziandola rispetto al tempo si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_v}{dt} &= \frac{dT_v}{dt} \cdot \left( \frac{1000}{p} \right)^k + T_v k \cdot \left( \frac{1000}{p} \right)^{k-1} \left( -\frac{1000}{p^2} \right) \cdot \frac{dp}{dt} = \\ &= \frac{\theta_v}{T_v} \cdot \frac{dT_v}{dt} - \frac{k\theta_v}{p} \cdot \frac{dp}{dt} \end{aligned} \quad [2.28c]$$

Dato che, esprimendo la pressione mediante la legge dei gas perfetti, si ha:

$$\frac{k}{p} = \frac{R_d}{C_p} \cdot \frac{1}{\rho R_d T_v} = \frac{1}{\rho C_p T_v} \quad [2.28d]$$

la (2.28c) può essere riscritta come:

$$\frac{d\theta_v}{dt} = \frac{\theta_v}{T_v} \cdot \left( \frac{dT_v}{dt} - \frac{1}{\rho C_p} \cdot \frac{dp}{dt} \right) \quad [2.28e]$$

Sostituendo la (2.28a) nella (2.28e) si nota come scompaia il tasso di variazione della pressione. Il risultato ottenuto è:

$$\frac{d\theta_v}{dt} = \frac{\theta_v}{T_v} \cdot \frac{1}{C_p} \cdot \frac{dQ}{dt} \quad [2.28f]$$

Questa relazione esprime il fatto che la variazione della temperatura potenziale virtuale di una particella Lagrangiana dipende dal tasso di calore scambiato attraverso le pareti della stessa. Per ottenere l'analoga relazione Euleriana basta sostituire alla derivata materiale della temperatura potenziale virtuale la sua controparte Euleriana, ottenendo:

$$\frac{\partial \theta_v}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta_v}{\partial x_j} = \frac{\theta_v}{T_v} \cdot \frac{1}{C_p} \cdot \frac{dQ}{dt} = S_\theta \quad [2.28g]$$

che è l'equazione che descrive l'evoluzione nello spazio e nel tempo della temperatura potenziale virtuale in funzione del campo di moto presente e delle trasformazioni termodinamiche avvenute. In questa relazione è presente il termine di sorgente  $S_\theta$  di cui si tratterà nel seguito. Per ora è sufficiente premettere che tale termine risulta la somma dei seguenti processi:

- trasformazioni di fase dell'acqua atmosferica,
- reazioni chimiche esotermiche ed endotermiche,
- convergenza/divergenza di flussi radiativi
- dissipazione di energia cinetica per i moti molecolari.

In assenza di nuvole e di precipitazioni e trascurando le reazioni chimiche e la dissipazione di energia cinetica per i moti molecolari, il termine di sorgente si riduce alla convergenza/divergenza dei flussi radiativi, studiata in dettaglio in un capitolo successivo.

Conviene, a questo punto, fare alcune considerazioni fisiche tratte da Monin e Yaglom (2007a). Per prima cosa, se si estrea semplicemente dal termine di sorgente la parte da addebitare alla diffusività molecolare e si introduce la *diffusività termica molecolare*  $\nu_\theta = K_d/(\rho C_p)$  ( $K_d$  è la conducibilità termica descritta dalle relazioni 1.8), l'equazione prognostica per la temperatura potenziale scritta in notazione vettoriale e tensoriale è:

$$\frac{\partial \theta_v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_v = \frac{\theta_v}{C_p T_v} \cdot \frac{dQ}{dt} + \nu_\theta \nabla^2 \theta_v = S_\theta + \nu_\theta \nabla^2 \theta_v \quad [2.29a]$$

$$\frac{\partial \theta_v}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta_v}{\partial x_j} = S_\theta + \nu_\theta \frac{\partial^2 \theta_v}{\partial x_j^2} \quad [2.29b]$$

A 15°C e 1013 mb,  $\nu_\theta$  vale  $2.06 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Ciò che è interessante, in primo luogo, è che il termine legato alla diffusività termica molecolare dipenda dai gradienti di temperatura (come, del resto, era già stato affermato dalla 1.8b). Osserviamo, per un momento la (2.29b) in cui si ipotizza che il termine di sorgente  $S_\theta$  ed il termine di diffusività termica molecolare siano entrambi nulli. In questo caso la (2.29b) affermerebbe che la derivata materiale della temperatura è nulla e quindi che l'entalpia (e quindi la temperatura) di ogni particella risulterebbe conservata. Immaginiamo ora che ciò sia vero, a meno della diffusività termica molecolare. Se così fosse, la dispersione di calore avverrebbe per trasporto e diffusione molecolare e, in effetti, così è e cerchiamo di capirne i meccanismi.

Bisogna, in primo luogo, ricordare che il trasporto di calore avviene entro l'atmosfera, caratterizzata da un elevatissimo numero di Reynolds  $Re$  e quindi turbolenta. In questo caso, la propagazione di calore causata dal trasporto in un fluido turbolento delle particelle in movimento (cioè la *diffusione turbolenta*) normalmente è più rapido rispetto alla propagazione causata dai moti molecolari (*diffusione molecolare*). In effetti, a causa della diffusione turbolenta il fumo di una sigaretta è disperso in una stanza in pochi secondi, mentre la sola diffusione molecolare giungerebbe allo stesso effetto solo dopo vari giorni. Ciò vuol dire che dobbiamo ignorare la diffusione molecolare? La risposta è decisamente no!

Il trasporto di calore da parte delle particelle in movimento porta ad una situazione in cui il volume occupato inizialmente dalla particella calda col procedere del tempo è esteso in certe direzioni e compresso in altre, perdendo progressivamente la propria forma originaria ed assumendo col tempo forme sempre più complesse ed irregolari. Dato che questo ragionamento vale anche per miscele di sostanze diverse disperse in un fluido turbolento, questo fenomeno è stato facilmente verificato e riprodotto in laboratorio. Nella parte superiore della Fig. 2.6 è stato disegnato ciò. Come si vede, la particella originaria di forma regolare, col procedere del tempo (qui è mostrata la situazione in due istanti successivi) perde la sua regolarità dando luogo a strutture sempre più complesse. Pur cambiando di forma col tempo, il volume totale della particella non cambia, nonostante la deformazione.

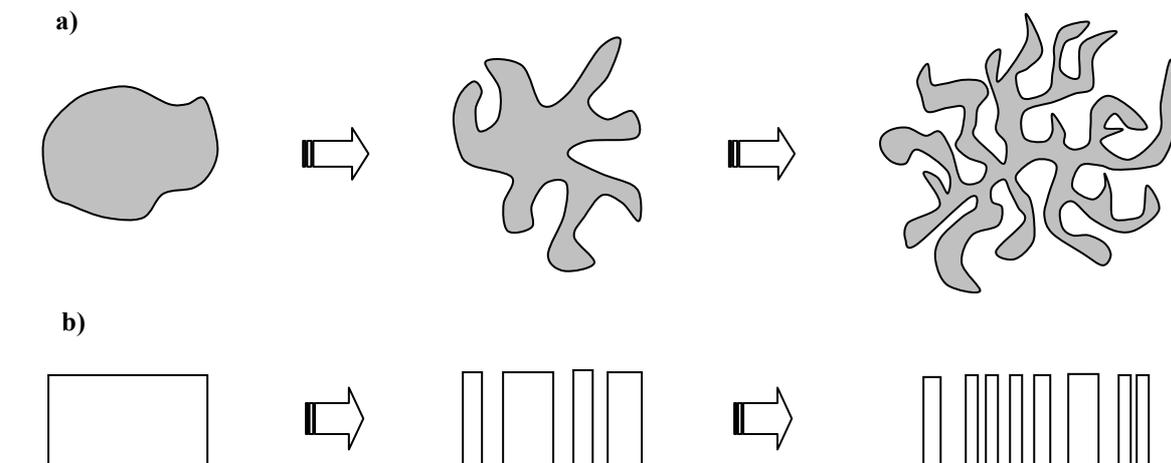


Fig. 2.6: a) variazione nella forma del volume occupato da una particella calda a causa della diffusione turbolenta; b) distribuzione schematica della temperatura media lungo una retta che interseca la particella.

Come risultato, se si trascurasse la diffusione termica molecolare, si avrebbero distribuzioni di temperatura decisamente irregolari (si veda la parte b della figura) o pari a 0 o pari a  $\theta_0$  (temperatura media iniziale della particella). In conclusione, la diffusione turbolenta, da sola, porterebbe alla formazione nel fluido di strati altamente distorti ed irregolari cui sarebbero associate rapide variazioni termiche. La regolarizzazione della distribuzione di temperatura è realizzata dalla diffusività termica molecolare che consente alla particella di inglobare molecole provenienti da particelle circostanti a diversa temperatura e quindi di costruire un'infinità di strutture a temperatura intermedia, permettendo al campo di essere meno irregolare. Questo effetto di regolarizzazione della diffusività termica molecolare è tanto più efficace quanto maggiore è  $v_0$ .

### Esercizio 2.6

Si consideri un volume di controllo di forma cubica con gli spigoli paralleli agli assi coordinati e di lunghezza 20 m. Per tale volume di controllo il flusso di calore proveniente da Est pari a  $3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ , il flusso di calore proveniente da Ovest  $4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  e il prodotto  $\rho C_p$  nelle situazioni in cui si viene a trovare il volume di controllo è pari a  $1231 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{m}^{-3}$ . Sono nulli i flussi di calore provenienti da ogni altra direzione e nel volume di controllo non agiscono sorgenti di calore. Calcolare il termine avvertivo dell'equazione della temperatura relativamente a tale volume ed il tasso di variazione della temperatura potenziale virtuale.

Per prima cosa si consideri l'espressione seguente, scritta in notazione tensoriale:

$$\frac{\partial u_j \theta_v}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial \theta_v}{\partial x_j} + \theta_v \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

che è il risultato dell'applicazione delle normali regole di derivazione. Se, però, si impiega l'equazione di continuità nella forma incomprimibile, si ha che:

$$\frac{\partial u_j \theta_v}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial \theta_v}{\partial x_j}$$

In sostanza, la relazione precedente afferma che il termine avvertivo dell'equazione della temperatura potenziale virtuale può essere scritto in *forma di flusso*. In effetti il termine  $\partial(u_j \theta_v) / \partial x_j$  è la variazione del flusso di calore nella direzione  $x_j$  diviso  $\rho C_p$ , cioè la variazione spaziale del flusso cinematico di calore.

Nel caso in esame, l'equazione della temperatura potenziale virtuale si riduce a:

$$\frac{\partial \theta_v}{\partial t} + \frac{\partial u \theta_v}{\partial x} = 0$$

Considerando i dati del problema, il termine avvertivo, opportunamente discretizzato, diventa:

$$\frac{\partial u \theta_v}{\partial x} \cong \frac{u_E \theta_E - u_W \theta_W}{\Delta x}$$

dove  $u_E$  e  $\theta_E$  sono la velocità del vento e la temperatura potenziale sulla faccia Est del volume di controllo e  $u_W$  e  $\theta_W$  le analoghe grandezze sulla faccia Ovest. Dato che il flusso di calore  $Q_E$  (uscente dalla faccia Est) e  $Q_W$  (entrante nella faccia Ovest) sono:

$$\begin{aligned} Q_E &= \rho C_p u_E \theta_E = -4 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \\ Q_W &= \rho C_p u_W \theta_W = +3 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \end{aligned}$$

si ha che:

$$\frac{\partial u \theta_v}{\partial x} \cong \frac{u_E \theta_E - u_W \theta_W}{\Delta x} = \frac{(-4 - 3) \cdot \text{W} \cdot \text{m}^{-2}}{20 \text{ m} \cdot 1231 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{m}^{-3}} = -2.843 \cdot 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{s}^{-1}$$

Come si vede il calore *entra* nel volume di controllo e ciò dovrebbe comportare un incremento della temperatura potenziale virtuale interna. In effetti si vede immediatamente che il tasso di variazione di temperatura potenziale virtuale nel volume di controllo è pari a  $+2.843 \cdot 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### 2.2.5 LA CONSERVAZIONE DELL'UMIDITÀ

Dato che nella conservazione del calore è presente il termine di sorgente che tiene conto, tra l'altro, della trasformazione di fase dell'acqua presente nell'aria umida, per chiudere il sistema di equazioni non basta solo la definizione di temperatura potenziale virtuale, ma occorre anche la relazione di bilancio dell'acqua in atmosfera.

L'acqua in atmosfera è presente sia come vapore che come liquido e solido. Se con  $q_v$  si indica l'umidità specifica dell'aria, cioè la massa di vapor d'acqua per unità di massa dell'aria umida e si ragiona in maniera del tutto analoga a quanto fatto al punto 2.2.1 per la conservazione della massa si giunge facilmente ad una relazione che ne esprime il bilancio, relazione che scritta in notazione tensoriale risulta pari a:

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} + u_j \frac{\partial q_v}{\partial x_j} = S_{qv} + v_q \frac{\partial^2 q}{\partial x_j^2} \quad [2.30a]$$

in cui si è tenuto conto anche del termine di diffusione molecolare. Con  $S_{qv}$  si è indicato il termine netto di sorgente per il vapor d'acqua, mentre con  $v_q$  è stata indicata la diffusività del vapor d'acqua che a  $15^\circ\text{C}$  e  $1013 \text{ mb}$  vale  $2.49 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Dato che in atmosfera l'acqua può essere presente anche in fase liquida (la cui umidità specifica è  $q_L$ ) e in fase solida (la cui umidità specifica è  $q_S$ ), è necessario affiancare alla (2.30a) le analoghe equazioni di bilancio relative alle altre due fasi, ottenendo:

$$\frac{\partial q_L}{\partial t} + u_j \frac{\partial q_L}{\partial x_j} = S_{qL} \quad [2.30b]$$

$$\frac{\partial q_S}{\partial t} + u_j \frac{\partial q_S}{\partial x_j} = S_{qS} \quad [2.30c]$$

dove  $S_{qL}$  e  $S_{qS}$  sono i termini di sorgente rispettivamente per l'acqua in fase liquida e solida. Si noti come in queste relazioni sia assente il termine di diffusività molecolare, del tutto irrilevante in questo caso.

### 2.2.6 LA CONSERVAZIONE DI UNA SPECIE CHIMICA

Se si indica con  $\chi_m$  la densità molecolare di una generica specie chimica presente in una particella di aria, con la medesima metodologia sviluppata per la conservazione della massa si giunge alla relazione Lagrangiana che ne esprime la conservazione:

$$\frac{d\chi_m}{dt} = S_{\chi_m} + v_m \frac{\partial^2 \chi_m}{\partial x_j^2} \quad [2.31a]$$

In questa equazione con  $S_{\chi_m}$  si è indicato il generico termine di sorgente che include sia emissioni vere e proprie di inquinanti, sia la *deposizione* della specie al suolo, sia anche l'apporto o la perdita della specie in esame derivante da trasformazioni chimiche con altre specie presenti. Va poi notato che l'ultimo termine di destra rappresenta la diffusione molecolare della specie  $m$ . In essa è presente la diffusività molecolare  $v_m$ , propria della sostanza in esame, che varia non solo da sostanza a sostanza, ma anche con la temperatura e la pressione. Maggiori dettagli pos-

sono essere trovati in Jacobson (2005, pagg. 528-529).

Vale la pena sottolineare subito due circostanze importanti:

- in realtà si dovranno scrivere tante equazioni del tipo (2.31a) quante sono le sostanze considerate (o meglio presenti in aria);
- se tra tali sostanze si vengono ad instaurare reazioni chimiche che le coinvolgono reciprocamente, le loro equazioni di conservazione costituiranno un sistema di equazioni legate tra loro proprio dalla chimica che le coinvolge attraverso il termine di sorgente;
- l'accoppiamento evidente tra le *grandezze meteorologiche* fin qui trattate e la concentrazione di sostanze chimiche esiste all'apparenza solo nel fatto che la particella è in moto nello spazio. In realtà sarebbero da considerare anche le influenze della presenza delle sostanze sui parametri meteorologici. Uno di essi è l'alterazione della trasparenza dell'atmosfera che, a sua volta, altera i flussi radiativi. Per ragioni di semplicità operativa, normalmente è solo questo aspetto che viene trattato e spesso anche in maniera approssimata. Di fatto, in un modello meteorologico, soprattutto se a mesoscala, si realizza un effettivo disaccoppiamento tra la dinamica meteorologica e la dispersione delle sostanze in aria.

Tenuto conto della definizione di derivata materiale, la (4.31a) in notazione tensoriale diventa:

$$\frac{\partial \chi_m}{\partial t} + u_j \frac{\partial \chi_m}{\partial x_j} = S_{\chi_m} + v_m \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_j^2} \quad [2.31b]$$

## 2.3 ALCUNI CONSIDERAZIONI FINALI

Nei paragrafi precedenti sono stati applicati i principi di conservazione della Meccanica Classica al moto dell'atmosfera, ottenendo, come risultato, un sistema di equazioni (prevalentemente differenziali alle derivate parziali) che costituiscono il *modello fluidodinamico dell'atmosfera*. E' probabile che il quadro che si è delineato risulti piuttosto confuso, per cui, riassumendo, si ha che:

- l'applicazione della legge di conservazione della massa ha condotto ad una relazione differenziale prognostica per il campo di densità  $\rho(x,y,z,t)$  espresso in forma tensoriale come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad [2.32a]$$

- l'applicazione della legge di conservazione della quantità di moto ha condotto a tre relazioni differenziali prognostiche per le tre componenti del vento che definiscono univocamente il campo vettoriale di velocità dell'atmosfera. Tali espressioni, in forma tensoriale, sono:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + f \varepsilon_{ij3} u_j + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad [2.32b]$$

- l'applicazione della conservazione dell'energia ha condotto all'equazione differenziale prognostica per il campo di temperatura potenziale virtuale dell'atmosfera espressa come:

$$\frac{\partial \theta_v}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta_v}{\partial x_j} = S_\theta + \nu_\theta \frac{\partial^2 \theta_v}{\partial x_j^2} \quad [2.32c]$$

- la presenza di acqua in atmosfera sia in forma vapore che in forma liquida e solida ha richiesto l'applicazione del principio di conservazione della massa, separatamente per i tre stati di aggregazione, giungendo alle equazioni differenziali prognostiche seguenti:

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} + u_j \frac{\partial q_v}{\partial x_j} = S_{qv} + v_q \frac{\partial^2 q}{\partial x_j^2} \quad [2.32d]$$

$$\frac{\partial q_L}{\partial t} + u_j \frac{\partial q_L}{\partial x_j} = S_{qL} \quad [2.32e]$$

$$\frac{\partial q_S}{\partial t} + u_j \frac{\partial q_S}{\partial x_j} = S_{qS} \quad [2.32f]$$

- in atmosfera vale la legge di stato dei gas, espressa come:

$$p = \rho \cdot R_d T_v \quad [2.32g] .$$

- dato che in atmosfera sono presenti in misura variabile altre sostanze chimiche che, in prima approssimazione, non alterano lo stato complessivo dell'atmosfera, se è necessario considerarle singolarmente (come è il caso quando si studia la dispersione degli inquinanti in aria) allora l'applicazione della legge di conservazione a ciascuna di esse conduce ad un'equazione differenziale prognostica del tipo:

$$\frac{\partial \chi_m}{\partial t} + u_j \frac{\partial \chi_m}{\partial x_j} = S_{\chi_m} + v_m \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_j^2} \quad [2.32h]$$

Si avranno quindi tante equazioni prognostiche quante sono le specie chimiche prese in considerazione. Tuttavia vale la pena ricordare che esse godono (almeno in prima approssimazione, quasi sempre valida nel *PBL*) di una particolarità interessante: esse indicano una dipendenza stretta della concentrazione delle specie dai campi *meteorologici* (velocità, temperatura, umidità, densità, pressione), anche se non è vero il viceversa. Di fatto tali equazioni risultano sostanzialmente separate da quelle *meteorologiche*. Nella discussione che seguirà esse non verranno direttamente ed esplicitamente coinvolte.

Va sottolineato, poi, che tutte le equazioni prognostiche del modello fluidodinamico contengono un termine legato alle proprietà molecolari del fluido (viscosità, diffusività molecolare, ecc.). Il loro peso in tali equazioni è estremamente ridotto, soprattutto entro il *PBL*, e ciò sarà la ragione per cui frequentemente essi verranno ignorati nelle applicazioni pratiche, anche se tali termini rivestono un'importanza estrema quando ci si avvicina alle frontiere solide del dominio di indagine (l'interfaccia aria-suolo, aria-mare, ecc.), dove deve valere la *no-slip condition*.

Il sistema di equazioni differenziali *meteorologiche* individuato (le equazioni 2.32 a-f) costituisce un sistema chiuso, dato che consta di nove equazioni differenziali nelle nove variabili ( $\rho, u, v, w, p, \theta_v, q_v, q_L, q_S$ ) e tale sistema dà conto di tutti i fenomeni atmosferici; in particolare, tutta la complessità della turbolenza dovrebbe essere contenuta in questo modello. Vanno, però, fatte alcune osservazioni.

In primo luogo, il modello considera le variabili istantanee e le equazioni individuate ci dicono semplicemente che per tali variabili valgono le leggi della Fluidodinamica. In teoria, un sistema di equazioni differenziali chiuso, una volta definite opportune condizioni iniziali ed al contorno, dovrebbe essere risolvibile, ma finora non è nota alcuna soluzione analitica di questo sistema in situazioni reali. Quelle presentate nei vari testi di fluidodinamica si riferiscono a situazioni estremamente ideali e a fluidi molto viscosi in regime laminare, quindi di nessun interesse geofisico. Si rimanda chi fosse interessato a ciò all'esposizione fatta in Monin Yaglom (2007a). Gli esempi, poi, proposti in precedenza ed alla fine del capitolo non contraddicono questa osserva-

zione: essi sono solo un supporto didattico semplificato alla comprensione.

Se si abbandonasse l'idea di una risoluzione analitica e si propendesse per una soluzione numerica, la difficoltà non diminuirebbe, come si vedrà nel seguito. In effetti vale la pena sottolineare una circostanza importante. Si immagini pure di possedere le tecniche di risoluzione numerica necessarie per affrontare questo sistema di equazioni: esiste un uomo (o più uomini) in grado di indicare con assoluta certezza quali siano le condizioni iniziali ed al contorno di un sistema così complesso com'è l'atmosfera, che nel *PBL* si presenta all'osservazione con marcati tratti stocastici? Si tratterebbe di dare, per esempio, ad un dato istante iniziale i campi *istantanei certi* delle diverse variabili in un dominio spaziale reale. La non linearità di molti dei termini presenti nelle equazioni di bilancio fa sospettare che piccoli errori nella determinazione delle condizioni iniziali ed al contorno possano avere effetti drammatici sui risultati ottenibili integrando il sistema. In effetti il comportamento *caotico* delle equazioni di bilancio è stato ampiamente evidenziato nelle sperimentazioni numeriche (Sorbjan, 1989).

Pur supponendo di poter superare queste difficoltà, la risoluzione di tale sistema è proibitiva anche da un punto di vista numerico. Infatti, la difficoltà sta nel fatto che risolvere in maniera corretta tale sistema di equazioni differenziali significa *risolvere* tutte le scale spazio-temporali caratteristiche della turbolenza del *PBL*. Dato che, come vedremo, lo spettro tipico della turbolenza si estende per oltre cinque decenni, è immediato constatare quanto questo problema sia ben al di là delle capacità degli strumenti di calcolo attualmente disponibili. Pertanto il modello istantaneo, pur avendo il pregio teorico di descrivere in modo naturale, esauriente e corretto l'evoluzione spazio-temporale del *PBL*, risulta totalmente inapplicabile allo stato attuale della tecnologia. Ciò ci spinge a ricercare un modello matematico alternativo che sia compatibile con gli strumenti di calcoli attuali e con la strumentazione di misura disponibile.

Per cercare di evidenziare alcune di queste problematiche, mettendo le basi per le discussioni che seguiranno, nei punti seguenti vengono presentate, anche se in maniera estremamente semplificata, alcune considerazioni di fondamentale importanza.

### 2.3.1 LA NON LINEARITÀ DELLE EQUAZIONI PROGNOSTICHE

Le relazioni precedenti, oltre che essere *dissipative* (è presente in tutte le relazioni prognostiche, tranne in quella che esprime la conservazione della massa dell'aria e nella legge dei gas, un termine dipendente dalla viscosità) sono non lineari e la loro non linearità è soprattutto concentrata nel termine avvevativo. Oltre che costituire una notevole complicazione analitica, i termini non lineari ridistribuiscono l'energia tra le varie scale del moto, senza alterare il bilancio globale di energia (Frisch, 1995). Dimostrare tale affermazione non è semplice e si rimanda a Monin e Yaglom (2007,b) per i dettagli.

L'effetto della non linearità lo si può apprezzare anche impiegando un semplice esempio. Invece di considerare l'intero apparato sopra descritto, mettiamoci in una situazione altamente idealizzata in cui il campo di moto sia monodimensionale, inviscido (cioè è assente il termine dipendente dalla viscosità), in un sistema di riferimento inerziale e senza forzanti esterne. In sostanza la velocità del fluido  $U$  sarà uno scalare, funzione solo del tempo, che ubbidisce alla relazione non lineare:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad [2.33a]$$

Immaginiamo, poi, che ad tempo iniziale  $t_0$  il campo di velocità sia descritto dalla funzione:

$$U(x, t_0) = B \cos(kx) = B \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \quad [2.33b]$$

dove  $L$  è la dimensione del dominio di interesse ed  $x$  è la posizione nel dominio considerata a partire da un'origine arbitraria. Proviamo ora a risolvere la (2.33a). Un modo semplice è quello di considerare un tempo  $t > t_0$ , tale che  $t - t_0$  sia molto piccolo. In questo caso:

$$U(x, t) \cong U(x, t_0) + (t - t_0) \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t_0} + \dots \quad [2.33c]$$

cioè:

$$\frac{U(x, t) - U(x, t_0)}{(t - t_0)} \cong \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t_0} \quad [2.33d]$$

Pertanto, dalla (2.33a) è immediato constatare che:

$$\frac{U(x, t) - U(x, t_0)}{(t - t_0)} \cong -U \cdot \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{t_0} \quad [2.33e]$$

quindi:

$$U(x, t) \cong U(x, t_0) - (t - t_0) \cdot \left( U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{t_0} + \dots \quad [2.33f]$$

Utilizzando la (2.33b) si avrà, quindi, che:

$$U(x, t) = B \cos(kx) + (t - t_0) \cdot B^2 k \sin(2kx) + \dots \quad [2.33g]$$

Questo è il campo di velocità dopo un *time-step*. La non linearità della (2.33a) ha comportato che il sistema, descritto all'istante iniziale da un'armonica sinusoidale monocromatica, evolvendo da  $t_0$  a  $t$  *corrompe* questa armonica sovrapponendo ad essa armoniche multiple della frequenza di base (nell'approssimazione adottata è visibile l'armonica a frequenza  $2k$ ). È intuitivo rendersi conto che l'energia, inizialmente posseduta dall'armonica monocromatica, con l'evolvere del tempo si *ridistribuisce* ad armoniche a maggior frequenza. Se la (2.33b) fosse vista come un vortice con dimensione caratteristica  $L$ , con l'evolvere del tempo a tale vortice si affiancherebbero altri vortici (sicuramente degradando quello iniziale monocromatico) con dimensioni frazionarie (quello indicato nella 2.33g ha dimensione caratteristica  $L/2$ ). In sostanza abbiamo una *cascata di vortici* che è l'analogo della *cascata energetica (energy cascade)* ipotizzata da Kolmogorov e di cui si tratterà nel seguito.

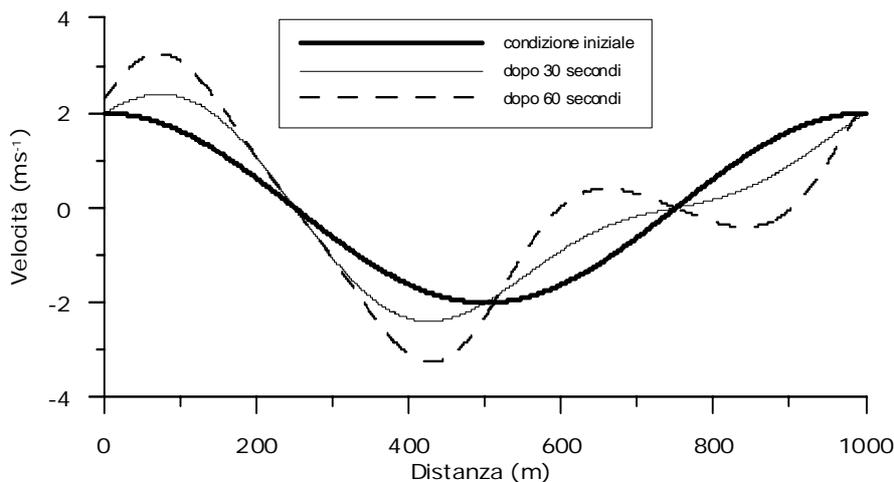


Fig. 2.7: evoluzione del modello semplificato (2.33a) in due *time-step*

Da ultimo è interessante notare come il campo, inizialmente regolare (*smooth*), evolvendo nel tempo abbandoni progressivamente tale regolarità, visto che alla cosinusoide originaria si vengono a sovrapporre armoniche che perturbano il segnale originario rendendolo sempre più irre-

golare. In effetti, il modello si può costruire anche per ottenere il campo di velocità dopo due *time-step*. Non si riportano le equazioni relative per la loro complessità. Comunque, impiegando questo modello per due *time-step* con  $B = 2 \text{ ms}^{-1}$ ,  $L = 1000 \text{ m}$ ,  $t-t_0 = 30 \text{ s}$ , si ottiene quanto riportato in Fig. 2.7, in cui sono evidenziati sia il campo di moto iniziale che i campi di moto ottenuti dopo il primo ed il secondo *time-step*. Quanto mostrato conferma le osservazioni fatte.

Dopo un certo tempo numero di *time-step* che renderanno ancora più irregolare il campo, chi sarà più in grado di decidere se il segnale (altamente irregolare) così ottenuto sia una sovrapposizione di armoniche o piuttosto un segnale totalmente stocastico?

Ancora più interessante è riproporre questo esempio didattico, prendendo, però, come riferimento un moto bidimensionale. In questo caso, sotto le medesime ipotesi, si ha che le equazioni che lo governano sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad [2.34a]$$

Se, per semplicità, ipotizziamo che all'istante iniziale  $t_0$  le due componenti della velocità non siano correlate tra loro e che ciascuna sia descritta dalle semplici leggi seguenti:

$$\begin{aligned} U(x, y, t_0) &= B \cos(kx) \cdot \cos ly \\ U(x, y, t_0) &= B' \cos(k'x) \cdot \cos(l'y) \end{aligned} \quad [2.34b]$$

rifacendo il procedimento presentato per il caso monodimensionale si otterrebbe dopo un *time-step*:

$$\begin{aligned} U(x, y, t) &= B \cos kx \cdot \cos ly + \\ &+ (t-t_0) \cdot \left[ B^2 k \sin kx \cdot \cos kx \cdot \cos^2 ly + BB'l \cos kx \cdot \cos k'x \cdot \sin ly \cdot \cos l'y + \dots \right] \end{aligned} \quad [2.34c]$$

$$\begin{aligned} V(x, y, t) &= B' \cos(k'x) \cos(l'y) + \\ &+ (t-t_0) \cdot \left[ BB'k' \sin k'x \cdot \cos kx \cdot \cos ly \cdot \cos l'y + B'^2 l' \cos^2 k'x \cdot \sin l'y \cdot \cos l'y + \dots \right] \end{aligned}$$

Ciò che è interessante notare, non visibile nell'esempio precedente, è il fatto che la presenza del termine non lineare nelle (2.34a) non solo produce armoniche a maggior frequenza, che si sovrappongono all'armonica monocromatica iniziale, ma induce anche un accoppiamento tra le armoniche presenti nelle due componenti cartesiane della velocità, accoppiamento non esistente all'istante iniziale.

### 2.3.2 FORTE SENSIBILITÀ ALLE CONDIZIONI INIZIALI

Una delle caratteristiche peculiari delle equazioni prognostiche che descrivono i moti atmosferici è la loro forte sensibilità alle condizioni iniziali. Non è facile dimostrare matematicamente tale affermazione e, di fatto, ci è arrivato per un caso fortuito Lorenz (1959) studiando proprio l'evoluzione dell'atmosfera con un modello semplificato. Limitandoci ad evidenziare la sensibilità intrinseca delle equazioni fluidodinamiche a piccole variazioni nelle condizioni iniziali senza addentrarci in eccessive complicazioni matematiche, è opportuno riproporre un semplice modello proposto da Frisch (1995), per illustrare la forte sensibilità delle equazioni fluidodinamiche alle condizioni iniziali.

A tale scopo, Frisch ha introdotto un modello ultrasemplificato del moto di un fluido, cui ha dato il nome di *Poor man's Navier-Stokes equation* che parte da una forma semplificata del tipo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p] + \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \quad [2.35a]$$

dove  $\mathbf{F}$  è una forzante esterna. Operando una drastica semplificazione e discretizzazione nel tempo (indicata dal pedice  $n$  che indica l'istante  $t_n$  e dal pedice  $n+1$  che indica l'istante  $t_{n+1}$ ), Frisch è giunto a:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\underbrace{[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p]}_{=-2u} + \underbrace{\nabla^2 \mathbf{u}}_{-u_n} + \underbrace{\mathbf{F}}_{+1} \quad [2.35b]$$

cioè:

$$u_{n+1} = 1 - 2u_n^2 \quad [2.35c]$$

L'interessante di questa procedura sta nel fatto che l'operazione di discretizzazione, comune a tutti i metodi di risoluzione numerica di equazioni differenziali, ha trasformato un problema differenziale in un problema algebrico particolare. Più precisamente, la (2.35c) è quello che i matematici chiamano una *mappa discreta*, cioè una relazione tra il valore di una variabile  $u_n$  all'istante  $t_n$  ed il valore  $u_{n+1}$  di questa variabile all'istante  $t_{n+1}$ . Quindi questa equazione è una *mappa non lineare* di tipo molto particolare. La Teoria del Caos tratta questo argomento in maniera molto approfondita. Qui ci concentriamo solo su un aspetto che tale mappa presenta. Se eseguiamo due esperimenti numerici distinti con due condizioni iniziali di pochissimo differenti:

$$u_0 = 0.10000$$

$$u_0 = 0.10001$$

che differiscono dello 0.01% ed utilizziamo la (2.35c) otteniamo quanto riportato in Fig 2.8. A dispetto della semplicità della mappa, la non linearità in essa presente determina un segnale di output decisamente irregolare che, a prima vista, appare del tutto casuale. Ma non solo. Come si vede dalla figura, i due segnali che si vengono a generare in corrispondenza di due condizioni iniziali di pochissimo differenti, dopo un transitorio iniziale di circa 15 passi, differiscono profondamente. Quindi, questa mappa, che cattura almeno una parte delle non linearità delle equazioni fluidodinamiche, evidenzia una esasperata dipendenza dalle perturbazioni di lieve entità nelle condizioni iniziali facendoci ritenere, a ragione, che le medesime caratteristiche appartengano anche al modello fluidodinamico dell'atmosfera.

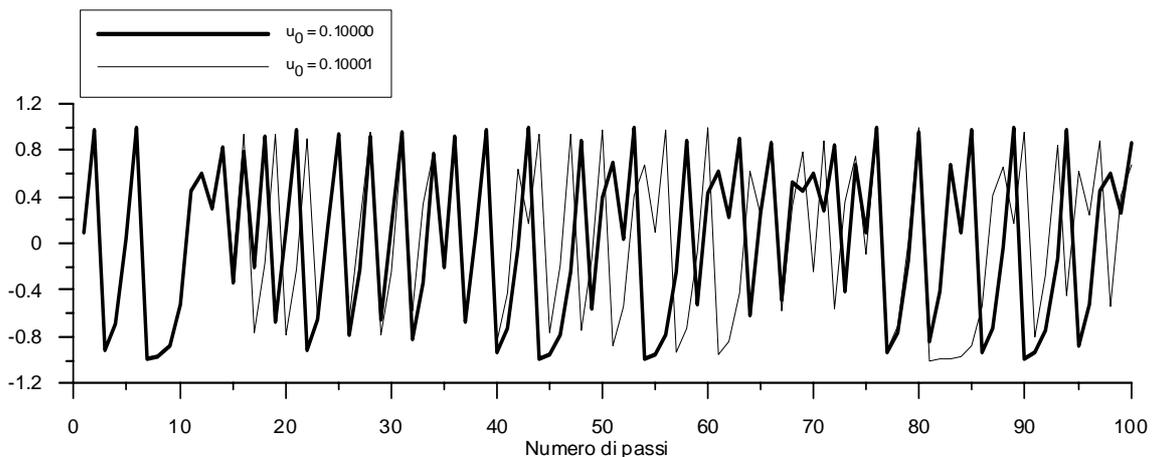


Fig. 2.8: output della Poor man's NS equation relative a due condizioni iniziali differenti per lo 0.01%.

### 2.3.3 CARATTERISTICHE CAOTICHE DEL MODELLO DI ATMOSFERA

A prima vista non si riesce ad individuare alcuna ragione logica per cui le variabili che descrivono lo stato del *PBL* (le variabili meteorologiche, quindi) non abbiano caratteristiche completamente deterministiche. In sostanza, siamo fedeli (e a ragione) all'affermazione di Albert Einstein : *Dio non gioca a dadi*. Eppure, le osservazioni sperimentali (per esempio quelle mostrate in Fig.2.9, che si riferiscono all'andamento temporale delle tre componenti cartesiane del vento e della temperatura potenziale in un'ora diurna e soleggiata misurate a 3 metri dal suolo) mostrano tali e tante irregolarità da instillare qualche dubbio in proposito. In realtà, proprio questo problema è stata la causa scatenante del lavoro fatto da molti studiosi, fra cui svetta quello di Edward N. Lorenz, che può essere così riassunto:

- l'atmosfera, ed in special modo il *PBL*, è un sistema deterministico altamente complesso, descritto correttamente da un insieme di relazioni matematiche totalmente deterministiche che esprimono le leggi di conservazione della Fisica Classica. Tali relazioni sono di tipo differenziale ed *altamente non lineari*;
- la non linearità di tali relazioni fa sì che le variabili del sistema, che ubbidiscono rigorosamente a tale modello fluidodinamico, presentino variazioni nello spazio e nel tempo talmente irregolari da *apparire* semplici realizzazioni di processi stocastici, cioè completamente casuali.

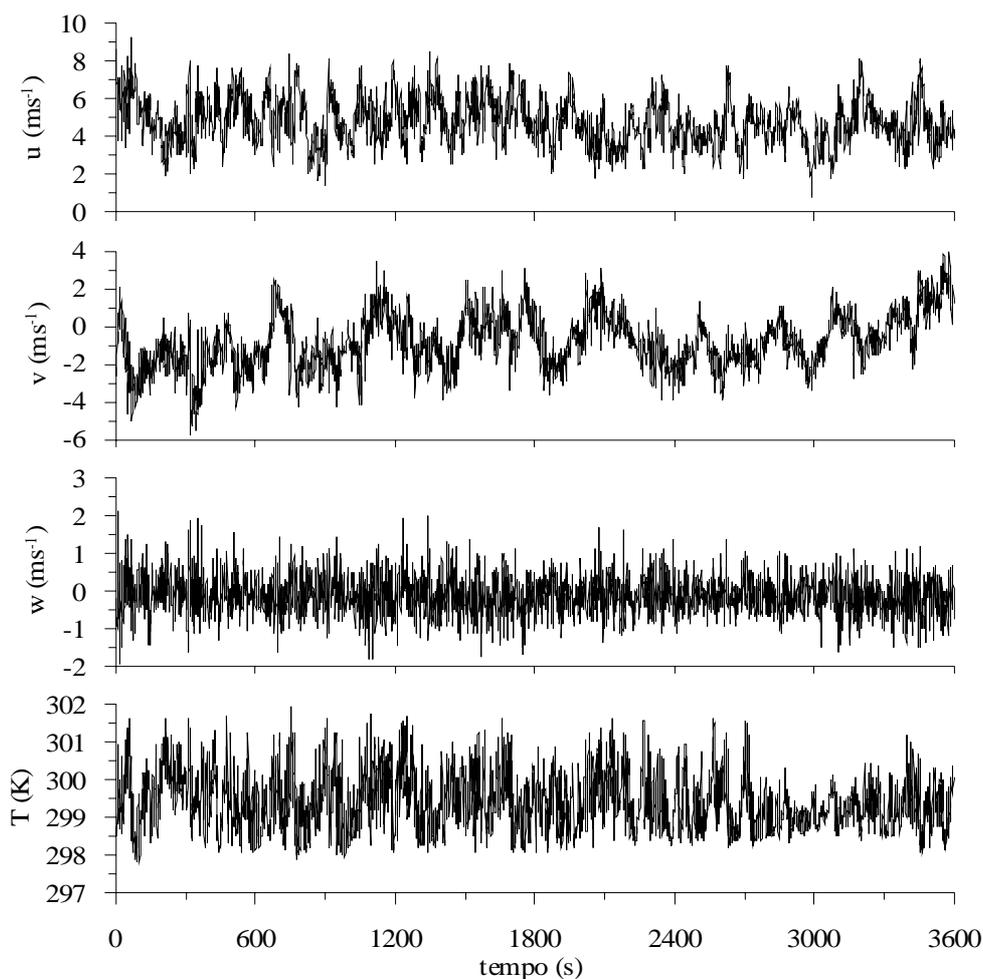


Fig. 2.9: andamenti temporali delle tre componenti cartesiane del vento e della temperatura potenziale in un'ora diurna e soleggiata a 3 metri dal suolo.

E' opportuno ora riassumere alcuni concetti già esposti in precedenza (Pope, 2003). Si ipotizzi di stabilire un insieme ben definito di condizioni per un esperimento di tipo fluidodinamico (per esempio il flusso di un liquido in un condotto) e di poter ripetere ogni volta che si voglia tale esperimento. Focalizziamoci sulla misura, in un ben preciso punto del condotto, della velocità longitudinale del fluido dopo un determinato tempo dall'inizio dell'esperimento e sia  $A$  il valore assunto dalla velocità secondo le leggi deterministiche della fluidodinamica. Se effettivamente ad ogni ripetizione dell'esperimento la velocità assume il valore  $A$ , il moto del fluido considerato è totalmente deterministico. Se, invece, ad ogni ripetizione dell'esperimento la velocità non assume il valore atteso  $A$  ma presenta valori più o meno differenti, si è di fronte ad una situazione sperimentale che non si può definire deterministica. Perché capita ciò?

In primo luogo, è ben difficile, se non impossibile, mantenere le condizioni sperimentali invariate da esperimento a esperimento. In effetti sono inevitabili perturbazioni, normalmente molto piccole, nelle condizioni sperimentali: si pensi, per esempio a piccole variazioni nella temperatura del fluido, a piccole vibrazioni dell'apparato sperimentale o a variazioni nella rugosità delle superfici su cui scorre il fluido. Nel caso dell'aria del *PBL*, se si immaginano le masse d'aria che scorrono su una superficie con vegetazione erbacea, si capisce subito come la rugosità di questa superficie vari continuamente visto che l'erba si piega nella direzione del vento, oscillando attorno ad una inclinazione di equilibrio. Se in natura nulla si può fare per rendere immutabili le condizioni al contorno di un esperimento, nelle attività di laboratorio si può fare molto per limitare le differenze tra esperimento ed esperimento, anche se mai possono essere eliminate. Anche le condizioni iniziali non possono essere definite con una precisione assoluta. Tutto ciò porta a dire che, mentre effettuando un calcolo fedele alla fluidodinamica, si utilizzano informazioni certe (deterministiche), nel realizzare un esperimento o nell'evolversi di un fenomeno naturale ciò che determina lo stato di moto del fluido viene in continuazione perturbato. Tali perturbazioni normalmente sono di lieve entità e ciò farebbe pensare che la loro influenza debba essere poco rilevante.

In realtà le leggi della fluidodinamica che sovrintendono al moto dell'aria in atmosfera sono altamente non lineari ed estremamente sensibili alle perturbazioni. Si rese conto di ciò, in maniera del tutto fortuita, il meteorologo Lorenz durante l'utilizzo di un modello di previsione meteorologica semplificato. Da allora il fenomeno venne studiato con maggior attenzione finché Lorenz pubblicò un celebre articolo (Lorenz, 1963) in cui studiava nel dettaglio un problema di convezione atmosferica e metteva in risalto le caratteristiche caotiche delle leggi che governano l'atmosfera. L'interesse suscitato dall'argomento raggiunse il culmine quando Lorenz presentò il 29 dicembre 1972 al *13° Meeting dell'American Association for Advancement of Science* dedicato al *Global Atmospheric Research Program* la memoria celebre dal titolo provocatorio: "*Does the flap of a butterfly's wings in Brasil set off a tornado in Texas?*". Da qui è nata la teoria del Caos come scienza matematica, teoria che tuttora si sta sviluppando.

Senza approfondire alcunché, ma per renderci conto almeno superficialmente della natura caotica dell'atmosfera, conviene considerare al posto delle complesse leggi della fluidodinamica una sua semplificazione già adottata da Lorenz per lo studio della convettività e descritta dal seguente sistema di equazioni differenziali, le equazioni di Lorenz (Lorenz, 1993):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma \cdot (y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta z + xy \end{aligned} \quad [2.36]$$

in cui con  $x$ ,  $y$  e  $z$  sono indicate le variabili di stato del sistema, mentre  $\sigma$ ,  $\rho$  e  $\beta$  sono parametri. La soluzione di tale sistema fornisce l'andamento temporale delle tre variabili. Ad ogni istante  $t$  la soluzione definisce un punto nello spazio delle soluzioni (*spazio delle fasi*), punto che nel tempo definisce una *traiettoria*. Essa è rigorosamente deterministica, visto che è descritta da re-

lazioni deterministiche, non si interseca mai e si va a concentrare attorno a due regioni specifiche dello spazio (*attrattori*). Per analizzare un caso concreto, si integri numericamente la (2.36) con le condizioni iniziali ( $t = 0$ ):

$$[x(0), y(0), z(0)] = [0.1, 0.1, 0.1]$$

e si ipotizzi, inoltre, che  $\sigma$ ,  $\rho$  e  $\beta$  valgano rispettivamente 10, 8/3 e 28. Anche se la traiettoria risultante potrebbe essere graficata tridimensionalmente, per semplicità in Fig. 2.10 ne viene data la proiezione sul piano ( $x, z$ ). Ecco la celebre *farfalla di Lorenz*!

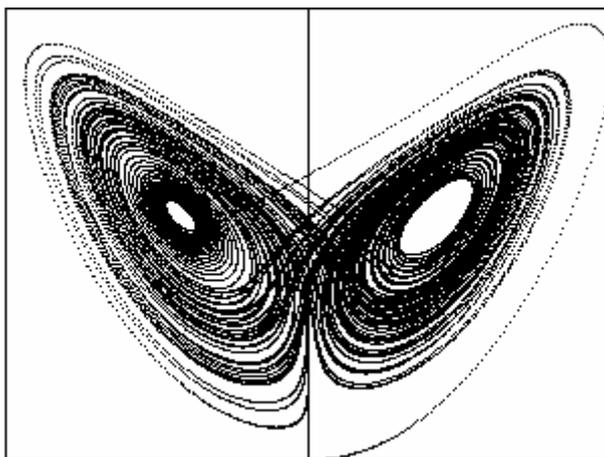


Fig. 2.10: la farfalla di Lorenz proiettata sul piano ( $x, z$ ).

Analizziamo ora l'andamento nel tempo delle variabili di stato, in particolare la variabile  $x$ . Tale andamento è riportato nella parte superiore della Fig. 2.11. L'andamento è curioso: dopo un transitorio iniziale di durata inferiore a 20s,  $x(t)$  inizia ad oscillare in maniera inusuale. Questo andamento, prodotto da un modello rigorosamente deterministico, presenta marcati tratti stocastici. Ciò che interessa è verificare come si modifica in presenza di perturbazioni. Rispetto a perturbazioni delle condizioni iniziali, il comportamento del sistema di Lorenz è simile a quello visto al punto precedente. Infatti, se si introduce una perturbazione alla sola condizione iniziale per la variabile  $x$  e si sostituisce al valore 0.1 il valore  $0.1 + 10^{-6}$ , cioè 0.100001, ciò che si ottiene è la seconda curva di Fig. 2.11, indicata come  $\underline{x}(t)$ . Le caratteristiche dinamiche della curva sono le stesse, ma i valori sono diversi. In effetti la curva inferiore della Fig. 2.11 evidenzia la differenza tra  $\underline{x}(t)$  e  $x(t)$ . Fino a circa 35 secondi dall'istante iniziale non ci sono differenze e in questo intervallo temporale la piccola perturbazione nelle condizioni iniziali è ininfluente. Successivamente ed improvvisamente l'influenza si manifesta ed i valori riportati evidenziano differenze sostanziali. Questo semplice esempio evidenzia come un sistema deterministico, decisamente più semplice del modello fluidodinamico del PBL, presenti un'acuta sensibilità alle condizioni iniziali e quindi, in un certo senso, non consenta effettivamente delle predizioni deterministiche.

Di fatto, se si ripete molte volte l'integrazione numerica delle equazioni di Lorenz con piccolissime perturbazioni nelle condizioni iniziali di volta in volta diverse, ciò che si ottiene è una serie di andamenti di  $x$ , sostanzialmente identici nei primi 30 secondi e successivamente molto diversi. Se si considera un dato istante  $t$ , quando i vari andamenti differiscono, il valore assunto da  $x$  sarà apparentemente del tutto casuale, anche se ottenuto da un modello completamente deterministico. Un sistema fisico di tal genere viene denominato *sistema caotico*.

C'è un'ulteriore osservazione da fare. L'insieme dei parametri  $\sigma$ ,  $\rho$  e  $\beta$  definiscono, in qualche modo, le proprietà strutturali del sistema e quindi una ben precisa soluzione (che è una traiettoria nello spazio delle fasi). Se li variamo, otterremo una *famiglia di soluzioni* cui, in generale, corrisponderanno comportamenti differenti del sistema (cioè traiettorie diverse nello spazio del-

le fasi). Una cosa interessante succede se il parametro  $\rho$  delle equazioni di Lorenz invece di valere 28, come in precedenza, valesse 20. In questo caso l'andamento  $x(t)$  e  $\underline{x}(t)$  coinciderebbero, cioè le piccole perturbazioni iniziali sarebbero ininfluenti. Tale andamento è riportato nella Fig.2.12. Come si vede, il comportamento è regolare e deterministico (in pratica un'oscillazione smorzata), decisamente insensibile alle perturbazioni nelle condizioni iniziali. Si può vedere come il *valore critico* di  $\rho$  sia circa 24.74. (*punto di biforcazione*). Sotto tale valore il sistema si comporta come in Fig.2.12 ed è insensibile a perturbazioni nelle condizioni iniziali, mentre sopra si comporta come in Fig.2.11 ed è estremamente sensibile ad ogni perturbazione. In sostanza, tale parametro determina il *regime dinamico* del sistema, ruolo svolto in atmosfera dal numero di Reynolds.

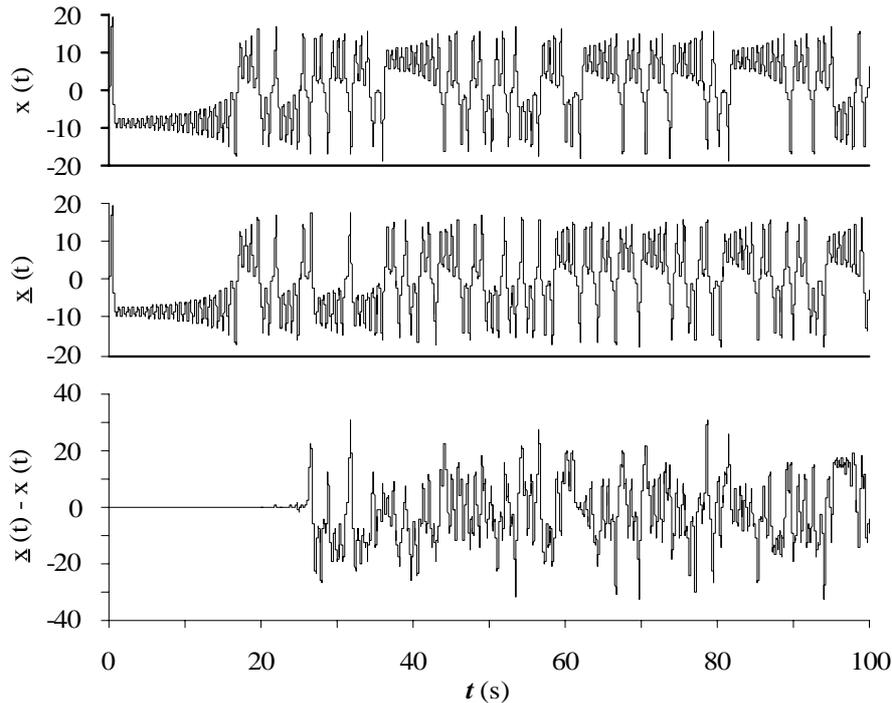


Fig.2.11: andamento nel tempo della variabile  $x$  delle equazioni di Lorenz

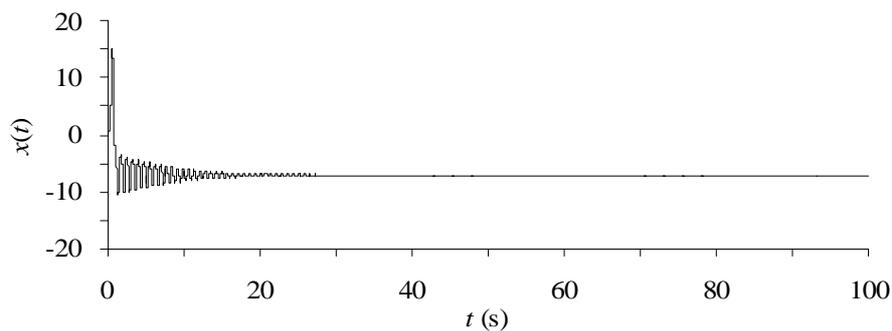


Fig.2.12: andamento nel tempo  $x$  delle equazioni di Lorenz col parametro  $\rho = 20$

Un ulteriore esempio che Lorenz presenta nel suo libro di introduzione fenomenologica alla Teoria del Caos (Lorenz 1993), è quello di uno sciatore che ripercorra parecchie volte una pista di discesa caratterizzata da una quantità elevatissima di cunette. Se lo sciatore, durante la discesa, esegue sempre la stessa sequenza di azioni (presenta, quindi, una condotta completamente deterministica), ci si potrebbe aspettare che la traiettoria percorsa e, soprattutto, il punto di arrivo siano sempre gli stessi. Tuttavia, se la pista è estremamente accidentata ed il punto di partenza dello sciatore varia di volta in volta di pochissimo, il risultato è che il punto di arrivo può varia-

re enormemente. In effetti Lorenz ha presentato nell'appendice di questa trattazione fenomenologica del caos un modello matematico di tutto ciò che, nonostante l'incredulità e scetticismo iniziale dei lettori, dimostra pienamente una tale affermazione. La pista dello sciatore e lo sciatore stesso costituiscono un sistema caotico che risponde a piccole variazioni del suo stato iniziale (il punto di partenza dello sciatore) con stati finali molto distanti gli uni dagli altri.

Un sistema deterministico che presenta le stesse caratteristiche del sistema di Lorenz è chiamato *sistema caotico*. Come afferma Lorenz (1993), *un sistema caotico è deterministico*, ma le variabili che lo caratterizzano *appaiono* talmente irregolari da mascherare completamente questo determinismo di fondo facendole *sembrare* a tutti gli effetti delle *variabili stocastiche*.

### 2.3.4 L'INTERPRETAZIONE STATISTICA DEL MODELLO DI ATMOSFERA

Convinti, ormai, della natura caotica dei moti atmosferici, è lecito domandarsi se questa visione possa essere *operativa*, cioè possa condurci ad un modello che ci consenta di ottenere risultati pratici, come prevedere le condizioni del tempo (tema caro alla meteorologia classica), descrivere la dispersione degli inquinanti in aria o quantificare lo scambio di CO<sub>2</sub> dalla vegetazione all'atmosfera. Purtroppo la risposta a questo quesito è totalmente negativa! La teoria del caos è intrigante, affascinante ed elegante ma, ad oggi, non conduce lontano. Ma è poi così importante? In fondo, della natura atomica della materia siamo ben consci, ma quando è possibile, evitiamo di usare la meccanica quantistica e ci rifugiamo nella più tranquillizzante meccanica classica. In sostanza, pur sapendo quale sia il modello fisico più realistico allo stato attuale delle conoscenze, operativamente ci limitiamo ad adottarne uno più semplice, finché non uscimo dal suo campo di applicabilità.

Come la meccanica classica appare lo strumento più adatto per descrivere il movimento di un'automobile (anche se a rigore dovremmo seguire il moto di tutti gli atomi che la compongono, integrando una spaventosa versione dell'equazione di Schrödinger), così cerchiamo di individuare un modello più naturale, immediato e tranquillizzante per descrivere le variabili atmosferiche così come ci appaiono dalle rilevazioni sperimentali. Per fare ciò, riprendiamo in considerazione l'andamento nel tempo di una qualsiasi delle variabili meteorologiche nel *PBL*, come per esempio una delle componenti del vento (o la temperatura) illustrate in *Fig. 2.9*. Ciò che ci colpisce analizzando uno di questi segnali (per esempio la componente *u* del vento) sono alcune caratteristiche che ora illustriamo.

#### Irregolarità degli andamenti nel tempo e nello spazio delle variabili meteorologiche

In primo luogo, come anticipato al Cap.1, il segnale appare altamente irregolare, disorganizzato e in esso sono individuabili una *gran varietà di scale differenti* (temporali, in questo caso) *sovrapposte* le une alle altre. Ciò altro non è che la dimostrazione della presenza di strutture coerenti residenti nel *PBL* di varia estensione ed intensità ed in continua evoluzione. Come sarà detto in seguito, tali strutture, nelle situazioni convettive, nascono caratterizzate da grandi dimensioni ed evolvono disgregandosi progressivamente in strutture sempre più piccole e numerose. E' quindi un inarrestabile processo a cascata che coinvolge l'intero *PBL*. L'andamento nel tempo delle tre componenti cartesiane della velocità del vento e della temperatura potenziale *presentano un andamento irregolare* anche se sappiamo che ciò è il risultato della natura caotica dell'atmosfera. Tuttavia, a prima vista, tali andamenti potrebbero essere visti come delle realizzazioni consecutive di variabili totalmente stocastiche e quindi del tutto imprevedibili. Si comincia a delineare, quindi, un possibile modello operativo basato sulla teoria dei processi stocastici che sappiamo essere decisamente operativo (si ricordi, per esempio la Teoria Cinetica dei gas).

#### Inpredicibilità di comportamenti delle variabili meteorologiche

In una giornata soleggiata poniamo due termometri a risposta rapida nei pressi del suolo, uno in una posizione e l'altro posto 20 m sottovento al precedente e registriamo contemporaneamente

la temperatura dei due sensori per un periodo di 100 s. Ciò che registriamo è quanto visibile in Fig. 2.13. Entrambi i segnali sono irregolari, ma se consideriamo contemporaneamente le misure fornite dai due sensori, vediamo immediatamente quanto esse siano differenti. L'aspetto generale è il medesimo, ma i dettagli sono differenti. La logica vorrebbe che, dato che i due sensori si trovano praticamente nello stesso punto, i segnali da essi registrati dovrebbero essere sostanzialmente coincidenti, come lo dovrebbero essere pure le principali caratteristiche del segnale, come per esempio le pendenze. In pratica, se notiamo che ad un certo istante la temperatura del primo termometro mostra un andamento crescente, ci dovremmo aspettare che ciò succeda anche per il segnale registrato dal secondo termometro, cosa che non succede in generale. In sostanza non è possibile dedurre (*predire*) l'andamento del secondo segnale dal primo, quindi i due segnali sono *impredicibili*, anche se sicuramente *parenti*.

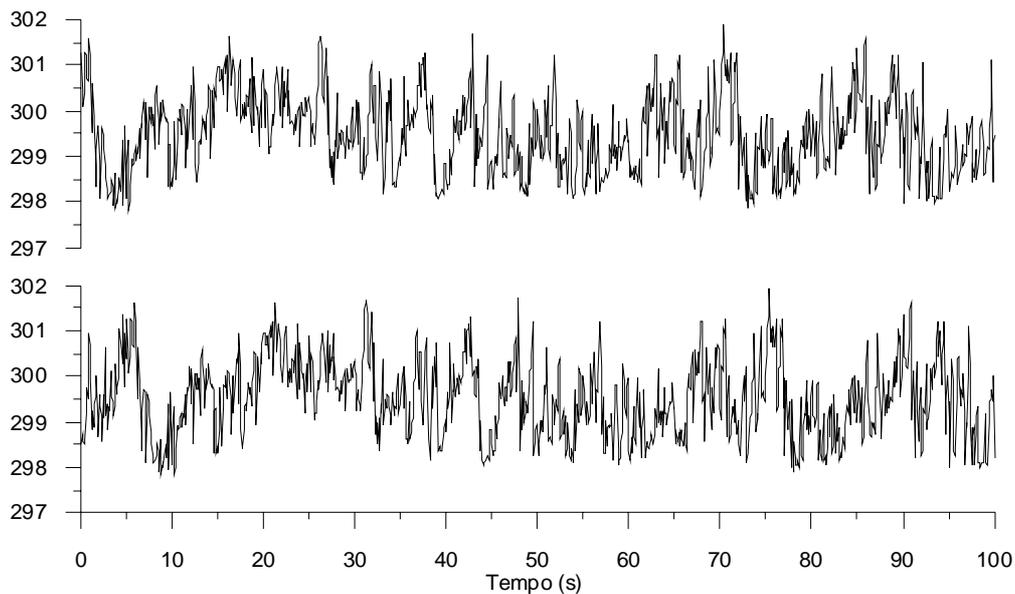


Fig. 2.13: andamento della temperatura a due punti di misura distanti 20 m sottovento

#### Riproducibilità di alcune proprietà collettive

Se analizziamo più nel dettaglio i due andamenti di temperatura di Fig. 2.13, ci accorgiamo che effettivamente questo grado di parentela può essere individuato e quantificato. Potremmo fare cose molto complicate, ma limitiamoci a poche osservazioni interessanti. In particolare proviamo a calcolarci i valori campionari della media, della varianza, della skewness e della kurtosis per i due segnali. I valori ottenuti sono riportati nella tabella seguente.

Parametro	Sensori 1	Sensori 2
Media	299.51	299.48
Varianza	0.73	0.72
Skewness	0.214	0.258
Kurtosis	-0.62	-0.60

I parametri calcolati per i due segnali sostanzialmente coincidono. Dato che le grandezze calcolate sono i principali parametri che definiscono statisticamente un segnale, possiamo concludere che i due segnali sono *statisticamente equivalenti*. In pratica la situazione trovata risulta del tutto analoga all'aver considerato due *realizzazioni* indipendenti di un processo stocastico.

Quanto riportato si riferisce a misure fatte in un intervallo di tempo limitato e in un solo punto del PBL (vicino al suolo). Considerazioni analoghe si possono ovviamente fare in punti differenti del PBL ed anche in tempi differenti. L'irregolarità insita negli andamenti temporali è in-

negabile e quanto riportato nella figura non è un caso isolato ma la normalità entro il *PBL*. Nel resto dell'atmosfera, invece, la turbolenza è minore (cioè le irregolarità sono meno marcate) ma comunque non totalmente assente. Dato che si è interessati ad una *visione globale* del *PBL* e del suo stato, ciò di cui si ha bisogno è un apparato matematico in grado di descrivere l'evoluzione spazio-temporale dei campi delle principali variabili meteorologiche.

### Modello statistico del PBL

Nella prima parte del Capitolo è stato presentato il modello fluidodinamica del *PBL*, inteso come l'insieme di relazioni matematiche (prevalentemente differenziali) che legano tra loro le variabili descrittive del *PBL* in modo che risultino soddisfatte le leggi di conservazione della massa, della quantità di moto, del calore e della conservazione delle specie chimiche (cosa evidentemente vera a prescindere dalle evidenze sperimentali). Queste relazioni devono essere indubbiamente vere. Ma vera è anche la natura caotica che contraddistingue questi fenomeni: in effetti questi fenomeni sono rigorosamente deterministici ma il loro *aspetto* è tipicamente stocastico.

Consci di tutto ciò, dal punto di vista operativo è opportuno considerare come *ipotesi di lavoro* (o meglio come modello operativo) il fatto che le *variabili meteorologiche* (le tre componenti del vettore vento, la temperatura potenziale, la pressione, ecc.) possono essere trattate come se fossero *realizzazioni di processi stocastici*. Fatta questa ipotesi, a questo punto è possibile procedere adottando le normali tecniche descrittive messe a punto per i *processi stocastici*. Come detto, ciò non corrisponde alla realtà fisica ma risulta essere solo una scelta di comodo che verrà impiegata come modello descrittivo dell'evoluzione del *PBL*. A questo proposito, vale la pena ricordare quanto affermato da Panofsky e Dutton (1983):

*i concetti probabilistici entrano nello studio della turbolenza del PBL perché le nostre capacità di calcolo e di analisi sono limitate, non perché ci sia nella turbolenza una casualità intrinseca.*

Se si adotta, quindi, per ragioni di comodo, una visione probabilistica:

- se si considera un punto generico del *PBL* ed un istante temporale qualsiasi, *non è possibile a priori definire esattamente il valore che assumeranno queste variabili*, ma è possibile *solo* individuare la *probabilità* con cui se ne può osservare un determinato valore;
- la *probabilità di osservazione* di un dato valore per una delle variabili considerate non è *a priori* indipendente dall'analoga probabilità di osservazione delle altre variabili. Le variabili meteorologiche *non* sono quindi *statisticamente indipendenti*, dato che tra loro devono comunque sempre valere le leggi di conservazione della fluidodinamica. Questa osservazione può essere considerata come *un vincolo deterministico* al problema stocastico che si sta considerando;
- quanto è visibile in un istante temporale, *a priori* non può essere indipendente da quanto si è visto agli istanti precedenti e da quanto si vedrà nei successivi, dato che le relazioni della fluidodinamica cui devono necessariamente ubbidire le variabili considerate sono, come si vedrà, relazioni differenziali sia nello spazio che nel tempo.

Da tutto ciò è evidente che ci aspetta l'impresa titanica di dover individuare *l'evoluzione spazio-temporale di variabili stocastiche tra loro dipendenti!* Ma da questo considerazione è partito il lavoro pionieristico di Osborne Reynolds che ancor oggi costituisce l'unica porta attraverso cui affrontare operativamente lo studio della turbolenza del *PBL*.

*Esercizi*

- 2.1 Una nave si muove verso N ad una velocità di  $10 \text{ km h}^{-1}$ . Alla superficie la pressione cresce verso N ad un tasso di  $5 \text{ Pa km}^{-1}$ . Qual è il tasso di variazione della pressione registrato in un'isola vicina se la pressione, a bordo della nave, diminuisce di  $100 \text{ Pa}$  ogni  $3 \text{ ore}$ ?
- 2.2 La temperatura in un punto  $50 \text{ km}$  a N di una stazione meteorologica è  $3^\circ\text{C}$  più fredda di quella registrata alla stessa stazione. Se il vento spira da NE alla velocità di  $20 \text{ m s}^{-1}$  e l'aria è stata riscaldata per radiazione al tasso di  $1 \text{ }^\circ\text{C h}^{-1}$ , qual è la variazione di temperatura registrata localmente alla stazione meteorologica?
- 2.3 Si consideri un volume di controllo di forma cubica con gli spigoli paralleli agli assi coordinati e lunghi  $20 \text{ m}$ . Sulla faccia W l'aria possiede una temperatura di  $20^\circ\text{C}$  e il vento sia pari a  $u_W = 10 \text{ m s}^{-1}$ . Sulla faccia E la temperatura è  $18^\circ\text{C}$  e  $u_E = 10 \text{ m s}^{-1}$ . Calcolare il termine avvevativo.
- 2.4 Ottenere l'equazione di continuità considerando un volume di controllo di forma qualsiasi. (Suggerimento: usare un bilancio di massa integrale, il teorema di Green e la considerazione che ciò che si ottiene deve essere valido per ogni volume considerato)
- 2.5 Si consideri l'equazione di continuità nella forma espressa dalla (2.14b). Si dimostri che una forma del tutto equivalente è:
- $$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$
- 2.6 Consideriamo una strada rettilinea larga  $25 \text{ metri}$  ed orientata nella direzione W-E. A metà di essa si apre una diramazione ad angolo retto rivolta verso S, larga  $8 \text{ metri}$ . Se l'aria fluisce lungo la strada da W a E e la sua velocità è di  $20 \text{ m s}^{-1}$  prima della diramazione e  $19 \text{ m s}^{-1}$  dopo, che velocità ha l'aria entro la diramazione? (suggerimento: assumere che il moto dell'aria sia bidimensionale).