

3 DESCRIZIONE STATISTICA DELLA TURBOLENZA

Nel Capitolo precedente è stato sviluppato nel dettaglio il modello fluidodinamico che descrive lo stato ed il moto delle masse d'aria dell'atmosfera. Il modello ottenuto, pur essendo esatto, non è utilizzabile in pratica per la non linearità intrinseca e per la natura caotica che lo caratterizza. Si è, inoltre, verificato che la natura caotica della turbolenza poteva essere descritta in maniera più tranquillizzante e, concettualmente, più semplice con un modello statistico che attribuiva ai campi delle variabili atmosferiche marcate caratteristiche stocastiche.

Alla luce di tutto ciò, per procedere si adotta la seguente ipotesi di lavoro: pur essendo consci che i campi meteorologici evolvono secondo leggi totalmente deterministiche, operativamente si ipotizza che essi siano dei processi stocastici tridimensionali (cioè dei campi stocastici) che possono essere descritti dalle leggi della Statistica. Questa non è la realtà dei fatti, ma un modello concettuale ed operativo *che funziona* e che ci condurrà a dominare la turbolenza del PBL.

In questo capitolo vengono presentati i dettagli di questa ipotesi di lavoro. Nella prima parte del capitolo verrà trattato il problema *nel dominio del tempo*; in pratica si considereranno le variabili meteorologiche così come le possiamo vedere nella vita quotidiana, cioè nella loro evoluzione nello spazio euclideo e nel tempo. La seconda parte, invece, sarà dedicata alla loro descrizione *nel dominio delle frequenze*. Questa descrizione è decisamente non usuale e vede ogni fenomeno atmosferico come una sovrapposizione di *armoniche*, cioè di andamenti periodici sinusoidali nello spazio e nel tempo di diversa ampiezza e frequenza. In questo modo risultano più evidenti le diverse scale spaziali e temporali del fenomeno e le interazioni tra scale diverse.

Tutta questa trattazione si riferisce ad una visione totalmente *euleriana* della turbolenza atmosferica, che è poi il metodo descrittivo più utilizzato per studiare il PBL. Tuttavia esiste anche una visione *lagrangiana* di ciò, che è di estrema importanza nella descrizione dei fenomeni di dispersione degli inquinanti in aria. Pur rimandando una trattazione sistematica di ciò, si concluderà questo capitolo con l'esposizione dei concetti principali della visione lagrangiana della turbolenza atmosferica.

I vari argomenti verranno trattati mantenendo una ragionevole completezza ed un buon livello di correttezza formale, anche se a volte si sarà costretti a sacrificare una parte del rigore a favore di una maggiore comprensione. Chi fosse interessato ad approfondire l'argomento può far riferimento ai classici testi di Monin e Yaglom (2007a,b), a Pope (2003) e a Panofsky e Dutton (1983). Ulteriore materiale sull'argomento può essere trovato in Bendat e Piersol (1986), testo caratterizzato da un'esemplare chiarezza espositiva unita alla rinuncia dichiarata di ogni complicazione formale non strettamente necessaria. Da ultimo va segnalato il libro di von Storch e Zwiers (1999) in cui è fornita una lucida e completa trattazione dell'analisi statistica applicata alla meteorologia ed alla climatologia.

3.1 ANALISI NEL DOMINIO DEL TEMPO

Il modo più naturale per trattare un problema fisico è di descriverne la variabilità nello spazio tridimensionale euclideo e nel tempo, anche se tale problema è descritto da variabili di tipo stocastico. Ci addentreremo in questa materia in maniera graduale. In primo luogo considereremo un punto nello spazio ed un istante temporale e studieremo le caratteristiche di una generica variabile meteorologica in questo contesto, vista come una variabile stocastica. Oltre a ciò, si prenderà in considerazione anche l'interdipendenza tra variabili stocastiche, cosa che è caratteri-

stica di tutte le variabili meteorologiche. In pratica, questa è la situazione in cui ci si trova quando viene realizzata una misura isolata di una variabile meteorologica (per esempio la temperatura) o di più variabili tra loro dipendenti (per esempio le componenti cartesiane del vento). Considereremo, quindi, ogni variabile meteorologica come una *variabile stocastica*. Successivamente si passerà a considerare cosa succederebbe a questa variabile, relativa ad un ben preciso punto dello spazio, se la seguissimo al variare del tempo. In questo caso la considereremo un *processo stocastico*. Infine, passeremo a studiare il caso generale di un campo meteorologico variabile nello spazio e nel tempo, considerandolo un *campo stocastico*.

3.1.1 LE VARIABILI METEOROLOGICHE E LE VARIABILI STOCASTICHE

Se si considera un generico punto del dominio spaziale di indagine (una porzione del *PBL*) ad un certo istante t , ci si può domandare quale possa essere il valore di una grandezza meteorologica (per esempio la temperatura potenziale T) in quel punto e in quell'istante. Nell'ipotesi adottata di completa casualità delle variabili meteorologiche, a priori non è possibile dire nulla sul valore assunto da T in quel punto, salvo che tale valore può essere *qualsiasi*. Se eseguiamo, però, una *misura ideale* che non perturba l'ambiente misurato (procedura cui diamo il nome di *campionamento*), otterremo per T ovviamente un ben preciso valore (diciamo θ). In termini statistici θ è una *realizzazione della variabile stocastica T* . Astraendo, possiamo ipotizzare che ogni variabile meteorologica si comporta come una variabile stocastica, cioè come un'entità *astratta* che può fornire sempre un valore (realizzazione) mediante un'operazione di campionamento.

Perché si è ottenuto θ come realizzazione di T e non un altro valore? La Statistica non è in grado di dirci nulla al riguardo, se non che θ è uno delle possibili realizzazioni attese per la variabile stocastica. Conviene soffermarci su questo punto. Una variabile stocastica, in generale (e quindi una variabile meteorologica), a priori potrebbe assumere un valore qualsiasi, purché tale valore abbia un significato fisico. Se, per esempio, considerassimo una delle componenti cartesiane della velocità del vento, a priori le sue possibili realizzazioni potrebbero risultare pari a qualsiasi numero reale da $-\infty$ a $+\infty$. La temperatura potenziale, invece, così come la pressione atmosferica, la radiazione solare globale e la pioggia (tanto per fare alcuni esempi concreti) potranno avere solo realizzazioni il cui valore non potrà che essere espresso da un numero reale non negativo. Si potrebbe obiettare che questa affermazione dipende da come è definito lo zero della scala delle temperature (o delle pressioni). In realtà, comunque si definisca lo zero della scala delle temperature o delle pressioni, l'intervallo in cui sono contenuti i possibili valori delle realizzazioni di queste variabili presenterà sempre un estremo inferiore finito ed uno superiore infinito. Pertanto, ciò che si deduce è che pur essendo qualsiasi il valore che a priori può assumere una realizzazione di una variabile stocastica, tale valore dovrà comunque appartenere ad un insieme di valori ben preciso, determinato dalla natura fisica della variabile. Tale insieme (che mostra una notevole somiglianza con l'intervallo di definizione di una funzione in Analisi) è detto *spazio campionario* o *spazio delle fasi*. Gli esempi precedenti hanno condotto all'individuazione di uno spazio delle fasi continuo, costituito o dall'insieme completo dei numeri reali o dall'insieme dei numeri reali non negativi. Tuttavia lo spazio delle fasi potrebbe essere costituito anche da un insieme finito di valori. A parte il caso del lancio di una moneta (che prevede uno spazio delle fasi contenente solo i due valori *vero, falso*) e quello del lancio di un dado (lo spazio delle fasi contiene i numeri interi da 1 a 6), in meteorologia abbiamo esempi significativi di variabili meteorologiche con spazio delle fasi discreto. Infatti, se si considera l'evento di presenza/assenza di precipitazione liquida, lo spazio delle fasi è costituito da due valori (*piove, non piove*), mentre se si considera la copertura del cielo e la si misura in ottavi di cielo coperto, lo spazio delle fasi sarà costituito dai numeri interi da 0 a 8. Nel seguito considereremo solo variabili stocastiche con spazio delle fasi continuo.

Ritornando ora all'esempio della temperatura potenziale, consideriamo il fatto seguente. Con

una buona dose di semplificazione e di astrazione, abbandonando un po' di rigore formale, potremmo ipotizzare di *ripetere* la misura della temperatura potenziale un numero infinito di volte. Di fatto si sta ipotizzando che sia possibile realizzare un *esperimento ideale* che produce un insieme di *campionamenti ideali* ottenuti tutti effettuando la medesima misura su un sistema fisico totalmente invariato. In sostanza si otterranno le realizzazioni $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \theta_j, \dots$ a priori tutte diverse tra loro e tali valori potranno essere considerati misure realizzate da infiniti sensori di dimensione infinitesima posti esattamente tutti nello stesso punto dello spazio ed operanti nel medesimo istante. Ciò che apparirebbe analizzando l'insieme delle realizzazioni è che tali misure non saranno necessariamente distribuite uniformemente tra $-\infty$ e $+\infty$, ma che di fatto esisterà una certa *verosimiglianza* connessa ad ogni possibile valore dello spazio delle fasi, dato che è più verosimile che si riscontrino alcuni valori piuttosto che altri. La verosimiglianza (*likelihood*) di ciascuna realizzazione o di un evento è un concetto astratto e sfuggente che deve essere convertito in un concetto quantitativo e misurabile e tale concetto è la *probabilità di un evento*.

3.1.1.1 La Probabilità

Ritornando al valore della temperatura potenziale in un punto dello spazio-tempo, consideriamo l'evento (A) costituito da una *realizzazione* θ di T che risulti inferiore ad un valore prefissato T_A . Per determinare la probabilità *campionaria* di questo evento (dedotta, cioè, dall'analisi delle realizzazioni ottenute effettuando vari campionamenti) si eseguano un numero elevatissimo M di campionamenti ideali cui corrispondono M realizzazioni θ_i ($i = 1, 2, \dots, M$) della variabile stocastica T . Sia N_A il numero di realizzazioni tali che $\theta_i < T_A$. Si definisce *probabilità campionaria dell'evento A* il rapporto:

$$P_A \{ \theta_i < T_A \} = \frac{N_A}{M} \quad [3.1]$$

Abbandonando ancora una volta il rigore matematico, è possibile dire che la *probabilità di un evento A* è data quantitativamente dalla (3.1) quando il numero di realizzazioni M tende all'infinito. La probabilità è quindi un *numero adimensionale* compreso tra 0 e 1: una probabilità 0 identifica un *evento impossibile*, mentre una probabilità 1 identifica un *evento certo*.

3.1.1.2 La funzione di distribuzione cumulata

A questo punto è possibile chiedersi quale sia la probabilità che T presenti valori inferiori ad un dato valore T_A . Una volta realizzato l'esperimento ideale un numero M di volte, estremamente elevato, la probabilità campionaria dell'evento $T < T_A$ si otterrà conoscendo il numero N_A di realizzazioni di T inferiori a T_A ed applicando la (3.1). Se T_A è arbitrario (in sostanza se mi domando quale sia questa probabilità per ogni possibile valore di T_A), la probabilità:

$$F(T_A) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{N_A}{M} \quad [3.2]$$

è una funzione di T_A che prende il nome di *funzione di distribuzione cumulata (CDF)*. Quanto detto per la temperatura potenziale vale per qualsiasi altra variabile stocastica.

Esercizio 3.1

Si consideri la temperatura potenziale virtuale riportata in Fig.2.8. Ipotizzando che i valori rilevati nell'arco dell'ora, e li riportati, siano le realizzazioni del processo stocastico stazionario (non variabile nel tempo, quindi) T in quel punto dell'atmosfera, si stimi la funzione di distribuzione cumulata campionaria.

I valori rilevati sono circa 36000 (uno ogni decimo di secondo). Come detto, ignoriamo la loro distribuzione nel tempo e consideriamoli tutti realizzazioni di una variabile stocastica in quel punto e in quell'istante (identificabile come l'inizio del periodo orario di misura). Il valore minimo e massimo rilevato è pari a 297.8 K ed a 301.9 K. Suddividendo l'intervallo

di temperatura 297 K ÷ 302 K (poco più ampio dall'intervallo massimo di variazione delle realizzazioni) in sotto-intervalli di ampiezza 0.1 K ed utilizzando la (3.2) con:

$$T_A = 297.05 + i \cdot 0.1 \quad i = 1, 2, \dots, 50$$

è facile ricostruire in termini discreti la funzione di distribuzione cumulata campionaria riportata in Fig. 3.1. Anche se la vera distribuzione cumulata richiederebbe infinite realizzazioni di T , quella trovata è una sua ottima stima.

Osservando la Fig.3.1 si nota subito come la conoscenza della funzione di densità cumulata consenta di ottenere informazioni preziose sulla variabile T . In effetti, anche se una generica realizzazione θ avrebbe potuto assumere qualsiasi valore reale, nella realtà c'è oltre il 50% di probabilità che essa valga non più di 299.4K (cioè circa la metà delle possibili realizzazioni avrà un valore inferiore o uguale a 299.4K). Comunque non ci potranno mai essere realizzazioni con valore inferiore a 297K (evento impossibile) e certamente ogni realizzazione sarà superiore o uguale a 302K (evento certo). Oltre a ciò, si nota come la CDF sia una funzione non decrescente, come è facile dimostrare in generale.

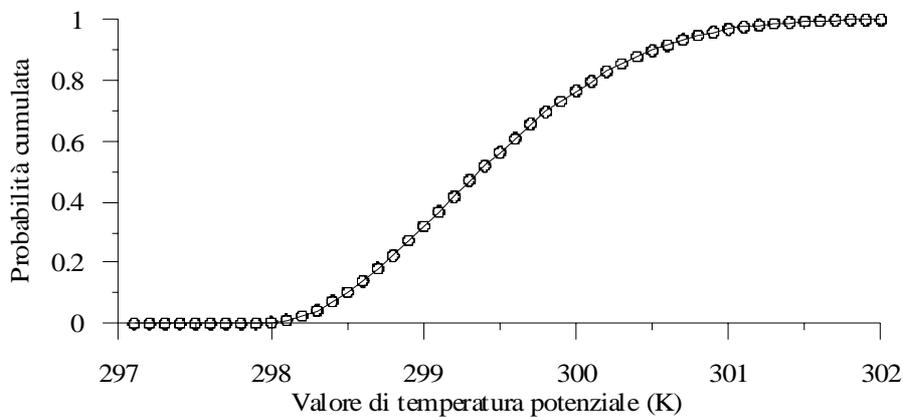


Fig.3.1: *probabilità campionaria cumulata per la temperatura potenziale relativa al campione di Fig.2.8*

Riassumendo e generalizzando, si può dire che la CDF di una generica variabile stocastica possiede le seguenti proprietà:

- $F(-\infty) = 0$, cioè l'evento è impossibile. Di fatto, questa condizione asserisce che non è possibile che una realizzazione della variabile stocastica stia al di fuori del proprio spazio delle fasi;
- $F(+\infty) = 1$, cioè l'evento è certo. Si afferma quindi che una qualsiasi realizzazione di questa variabile certamente assumerà un valore entro lo spazio delle fasi;
- $F(T_A) \geq F(T_B)$, se $T_A \geq T_B$, cioè la CDF è una funzione non decrescente;
- $F(T_A) - F(T_B) = P\{T_A > \theta \geq T_B\} \geq 0$.

Sulle caratteristiche analitiche della CDF in generale non si può dire molto. Potrebbe essere una funzione continua ed infinitamente derivabile, ma potrebbe anche non esserlo. Potrebbe anche avere forme strane come, per esempio, essere la somma di una funzione continua e derivabile con funzioni δ Delta di Dirac o con funzioni a gradino poste in vari punti dello spazio delle fasi. In questo caso si avrebbero notevoli complicazioni nella manipolazione analitica della CDF . Senza peccare in eccessivo ottimismo, nell'ambito della fisica del PBL il considerare continue e derivabili le CDF delle variabili meteorologiche è un'ipotesi decisamente aderente alla realtà dei fatti.

3.1.1.3 La funzione di densità di probabilità

Dalla definizione di *funzione di distribuzione cumulata* F si può ottenere un'ulteriore funzione di probabilità di estrema utilità, la *funzione di densità di probabilità PDF*. Per definirla (anche se in maniera ben poco rigorosa) si consideri ancora una volta la variabile stocastica T caratterizzata dalla propria *CDF* indicata come $F(\cdot)$. La probabilità che una sua realizzazione θ sia compresa nell'intervallo $T_A + \Delta T$ e T_A è pari a:

$$P\{T_A + \Delta T > \theta \geq T_A\} = F(T_A + \Delta T) - F(T_A) \quad [3.3a]$$

come risulta dall'ultima delle proprietà elencate per la *CDF*. Se poi ΔT tende a zero, si ha la definizione di *PDF* che indichiamo con il simbolo p :

$$p(T_A) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{P\{T_A + \Delta T > \theta \geq T_A\}}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{F(T_A + \Delta T) - F(T_A)}{\Delta T} \quad [3.3b]$$

Essa è quindi il rapporto tra la probabilità cumulata relativa all'intervallo ΔT e l'intervallo stesso e quindi è una *densità*. E' immediato constatare come la *PDF* non sia adimensionale, ma abbia la dimensione dell'inverso della dimensione propria della variabile stocastica considerata.

La *PDF* è l'essenza di una variabile stocastica. Infatti, una variabile X è una variabile stocastica se e solo se esiste una *PDF* associata tale che $p(x) \cdot dx$ eguaglia la probabilità che una sua realizzazione assuma un valore compreso tra x e $x + dx$. In tal caso si dice che la *variabile stocastica* X è *distribuita secondo la distribuzione* p . Oltre a ciò, dalla (3.3b) si vede che, se F è una funzione continua e derivabile, allora $p(x)$ ne è la derivata.

Non è possibile in generale individuare a priori quale possa essere la *PDF* di una variabile stocastica X . Se, però, si effettuano N campionamenti di tale variabile e se n_i è il numero di realizzazioni il cui valore è compreso tra $x_i - \Delta x/2$ e $x_i + \Delta x/2$, il rapporto $f_i = n_i/N$ rappresenta la frequenza campionaria con cui una realizzazione di X cade nell'intervallo finito considerato. Ci si aspetta, inoltre, che f_i si avvicini asintoticamente ad un numero specifico e che sia una funzione ad andamento regolare (*smooth*) dell'intervallo Δx . Si può dimostrare che, al tendere di N all'infinito, la *PDF* è data da:

$$p(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_i}{\Delta x} \quad [3.3c]$$

Si può anche dimostrare che questa procedura di stima campionaria di una *PDF* sia un buon stimatore della *PDF* vera.

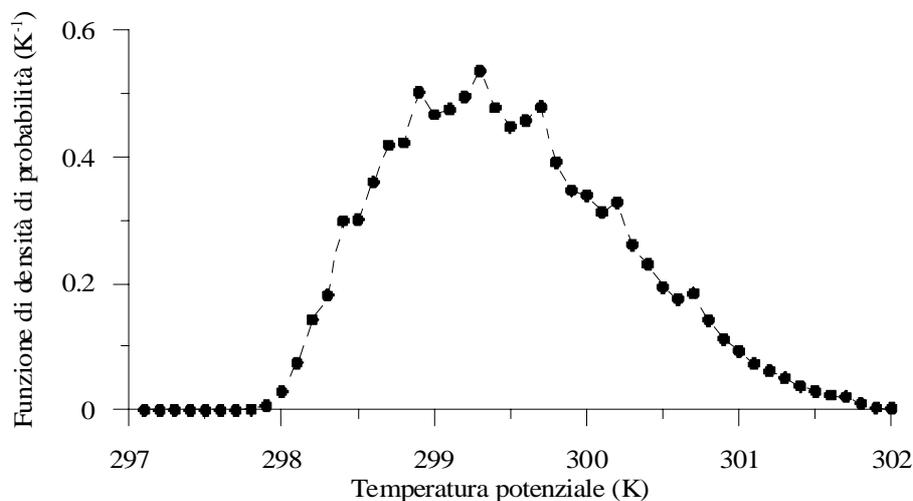


Fig.3.2: *funzione di densità di probabilità campionaria per la temperatura potenziale relativa al campione di Fig.2.8*

Esercizio 3.2

Sempre per la temperatura potenziale di Fig.2.8 si determini la relativa *PDF* campionaria.

E' evidente come risulti più semplice determinare la *PDF* una volta nota la corrispondente *CDF* determinata all'Esercizio 3.1. Pertanto, applicando la (3.3b) si ottiene quanto riportato nella Fig.3.2.

—

Dalla Fig.3.2 ci si accorge che, una volta individuata la *PDF*, le cose sono molto più chiare. Effettivamente una realizzazione di T può avere un valore qualsiasi, però è decisamente *più probabile* che tale valore rientri nell'intervallo $298 \div 301$ K e che sia vicina al valore 299.5 K.

E' immediato verificare come la *PDF* di una generica variabile stocastica sia caratterizzata dalle proprietà seguenti:

$$a) \quad p(x) = \frac{dF(x)}{dx},$$

$$b) \quad p(x) \geq 0,$$

$$c) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1, \quad [3.3c]$$

$$d) \quad \int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

La prima proprietà definisce la parentela operativa tra *CDF* e *PDF*, consentendo di passare da una funzione all'altra semplicemente. Evidentemente è stata scritta ipotizzando che F sia una funzione continua e derivabile, condizione normalmente soddisfatta in pratica dalle variabili meteorologiche.

La seconda proprietà deriva direttamente dalla prima. Se la *CDF* è una funzione non decrescente, la sua derivata, cioè la *PDF*, non può che essere non negativa.

La terza proprietà è la solita *condizione di normalizzazione* della statistica che, in parole povere, asserisce con molto buon senso che qualche valore questa benedetta variabile dovrà pur averlo.

La quarta proprietà è ancora una volta una relazione analitica tra *CDF* e *PDF*, ma questa volta di tipo integrale e decisamente più operativo.

Quanto detto non è rigoroso dal punto di vista formale. Proprio perché non possiamo essere certi che le proprietà analitiche della *CDF* siano tali da consentire le operazioni di derivata e di integrale nel senso convenzionale del termine (l'integrale di Riemann, per essere chiari), sarebbe necessario operare in maniera differente. In particolare, la probabilità che una realizzazione della variabile stocastica T abbia valore compreso tra T_* e $T_* + dT$ può essere indicata come:

$$dF(T_*) = F(T_* + dT) - F(T_*) \quad [3.3d]$$

A questo punto, l'ultima delle condizioni (3.3c) può essere scritta come:

$$\int_{T_B}^{T_A} dF(T) = F(T_A) - F(T_B) \quad [3.3d]$$

in cui il segno di integrale indica ora l'integrale di Riemann-Stieltjes: in Appendice B vengono

presentate sinteticamente sia la sua definizione che le caratteristiche salienti.

La Statistica dimostra che la conoscenza della PDF di una variabile stocastica comporta la conoscenza completa del comportamento della stessa. In pratica, se conoscessimo in ogni istante ed in ogni punto del PBL la PDF di ogni variabile meteorologica di interesse, non avremmo più nulla da cercare, perché conosceremmo in ogni istante ed in ogni punto lo stato dell'atmosfera. Ma non è un'impresa semplice!

Concludiamo, ora, con una curiosità importante. Consideriamo la funzione generalizzata Delta di Dirac $\delta(x-x_0)$ che può essere definita come:

$$\begin{cases} \delta(x-x_0) = 0, & \text{se } x \neq x_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) \cdot dx = 1 \end{cases} \quad [3.4a]$$

oppure, se $f(\cdot)$ è una funzione generica:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x-x_0) \cdot dx = f(x_0) \quad [3.4b]$$

In Appendice B sono presentate le altre caratteristiche di questa funzione. Se confrontiamo la (3.4a) con le caratteristiche proprie di una PDF, ci accorgiamo che la Delta di Dirac le soddisfa tutte. Se ipotizziamo che una generica variabile stocastica X sia distribuita secondo una Delta di Dirac, è necessario che:

$$P\{x \in [a, b]\} = \int_a^b \delta(x-x_0) \cdot dx = \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 \in [a, b] \\ 0, & \text{se } x_0 \notin [a, b] \end{cases} \quad [3.4c]$$

In parole povere, la probabilità di trovare una realizzazione di X in un generico intervallo è 1 o 0 a seconda che tale intervallo contenga o meno x_0 . Chiaramente ciò implica che il valore di X deve essere esattamente x_0 e che quindi la variabile X non è una variabile deterministica. A questo punto potremmo azzardarci ad affermare che ogni variabile deterministica è una variabile stocastica distribuita secondo una Delta di Dirac.

3.1.1.4 La media, la varianza ed i momenti

L'individuazione della PDF di una variabile stocastica consente di evidenziare quali siano i valori più probabili di una sua eventuale realizzazione. Da qui ad individuare un *valore caratteristico* per le sue realizzazioni ed il modo con cui tali realizzazioni si distribuiscono attorno a questo valore caratteristico il passo è breve. In pratica, ciò che si sta cercando è un metodo alternativo per descrivere la PDF: invece di darle la forma funzionale, si cerca di definire una serie di *indicatori* (indicatori statistici) che ne descrivono completamente le caratteristiche. Tali indicatori, nel caso ipotetico in cui sia possibile avere la disponibilità di tutte le possibili realizzazioni della variabile stocastica, sono delle grandezze deterministiche.

Se si considera una variabile stocastica X la cui realizzazione generica è x , caratterizzata da una PDF $p(x)$, si definiscono *momenti di ordine n* le quantità seguenti:

$$B_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot p(x) \cdot dx = E[x^n] = \overline{x^n} \quad [3.5a]$$

E' opportuno fare alcune considerazioni. La prima riguarda l'integrale presente nella (3.5a). Come detto prima, a rigore si dovrebbe considerare l'integrale di Riemann-Stieltjes, tuttavia per semplicità espositiva si continua a mantenere la tipica notazione dell'integrale di Riemann, visto che ci aspettiamo PDF (e quindi CDF) analiticamente poco complicate. Questa ipotesi

semplificativa verrà mantenuta nel seguito.

La seconda osservazione sta nell'operatore $E[.]$. Questo è sicuramente l'operatore più importante di tutta la Statistica ed applicato ad una variabile stocastica X (che può essere l'insieme completo di tutte le realizzazioni x o funzioni delle stesse) porta ad individuare il *valore atteso* (*expectation*) o *valor medio statistico* della variabile stessa o di una sua funzione. Il valore atteso non è il valore più probabile di una variabile, ma è quel valore che risulta pesando tutti i possibile valori con la rispettiva probabilità di occorrenza. E' il valore caratteristico, insomma, cioè il valore che *ci aspetteremmo* da essa. Tipograficamente, l'operatore $E[.]$ spesso viene sostituito da una barra sovrapposta che è il simbolo universalmente noto per valor medio. Dalla definizione (3.5a) si vede che l'integrale è strettamente positivo quando n è pari, quindi si ha che:

$$B_{2n} = E[x^{2n}] > 0 \quad [3.5b]$$

E' noto dalla Statistica che la conoscenza di tutti gli infiniti momenti di una distribuzione equivale alla conoscenza completa della *PDF*. A prima vista parrebbe di non aver guadagnato nulla introducendo i momenti (le difficoltà operative paiono del tutto identiche), ma come si vedrà nel seguito ciò non è completamente vero.

Di tutti i momenti descritti genericamente dalla (3.5a), sicuramente il più importante è il momento del primo ordine, detto *media* (*media di insieme, valor medio*) della variabile X e quindi definito come:

$$\mu_X = \bar{x} = E[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) \cdot dx \quad [3.5c]$$

E' interessante notare come la media d'insieme sia un concetto *totalmente deterministico*. In sostanza tale concetto potrebbe essere così espresso: *quali siano i valori che assumeranno le realizzazioni di X non è possibile dirlo con precisione, ma sicuramente il valore più rappresentativo dell'intera distribuzione statistica è il suo valor medio d'insieme*.

La conoscenza della media d'insieme di X (cioè del suo valore atteso) consente di introdurre l'importante concetto di *fluttuazione di una realizzazione attorno al valor medio*, concetto su cui si fonda, di fatto, tutta la Micrometeorologia. Si definisce *fluttuazione X'* di una variabile X la variabile stocastica la cui generica realizzazione è:

$$x' = x - \mu_X \quad [3.6a]$$

L'introduzione del concetto di fluttuazione rispetto al valor medio inizia a spostare l'attenzione dal comportamento dell'intera variabile alle irregolarità, più o meno marcate, che le sue realizzazioni mostrano attorno al proprio valore caratteristico. Partendo dal concetto di fluttuazione, è possibile definire un nuovo tipo di momenti, decisamente più familiari ed operativi, i *momenti centrali di ordine n* definiti come:

$$b_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^n \cdot p(x) \cdot dx = E[(x')^n] = \overline{(x')^n} \quad [3.6b]$$

Anche in questo caso è facile vedere come i momenti pari siano non negativi. E' noto che nel caso in cui siano noti il valor medio di insieme e tutti gli infiniti momenti centrali, la distribuzione di una generica variabile stocastica risulta totalmente nota.

Di tutti gli infiniti momenti centrali che si possono ottenere con la (3.6b) solo tre di essi (oltre al valor medio) sono di interesse pratico ed universalmente noti:

- il primo di essi è il *momento centrale del secondo ordine* o *varianza σ^2* , definito come:

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot p(x) \cdot dx \quad [3.7a]$$

che *quantizza* la *dispersione* delle realizzazioni attorno al valor medio. Come si nota, essa ha le dimensioni del quadrato delle dimensioni della variabile stocastica. Per migliorare questo concetto, è stato derivato da questo indicatore la *deviazione standard* σ_X pari alla radice quadrata della varianza. Il vantaggio di questo indicatore sta nel fatto che, avendo le medesime dimensioni della variabile stocastica considerata, visualizza meglio tale dispersione. Un altro indicatore molto utilizzato nello studio della turbolenza, strettamente legato alla deviazione standard, è l'*intensità della turbolenza* (grandezza adimensionale) definita come:

$$I_X = \sigma_X / \mu_X \quad [3.7b]$$

- la varianza (e quindi anche la deviazione standard) non è in grado di descrivere la simmetria della distribuzione. Ciò viene fatto dal *momento centrale del terzo ordine*, noto come *Skewness* e definito da:

$$Sk = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - \mu_X)^3}{\sigma^3} \cdot p(x) \cdot dx \quad [3.8]$$

Quando tale parametro assume valori positivi, la distribuzione della variabile stocastica è asimmetrica con la *coda* rivolta verso destra ed è più probabile avere valori elevati positivi di u^3 piuttosto che valori elevati negativi. Se, invece, è negativa, la coda della distribuzione è localizzata alla sinistra del valor medio. Una distribuzione totalmente simmetrica rispetto al valor medio deve avere valore di skewness nullo. Si noti come la Skewness sia adimensionale.

- un altro momento centrale importante è quello del quarto ordine, detto *Kurtosis*, e definito come:

$$Kurt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - \mu_X)^4}{\sigma^4} \cdot p(x) \cdot dx \quad [3.9]$$

Tale momento quantifica il *grado di piattezza* della distribuzione. Tanto minore è il valore di Kurtosis, tanto più piatta è la distribuzione. Anche questo parametro è adimensionale.

E' possibile mettere in relazione i momenti generici con i momenti centrali. Infatti, sviluppando i conti, è facile vedere che:

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= B_2 - B_1^2 \\ b_3 &= B_3 - 3B_1B_2 + 2B_1^3 \\ b_4 &= B_4 - 4B_1B_3 + 6B_1^2B_2 - 3B_1^4 \end{aligned} \quad [3.10a]$$

In particolare, se X è una variabile stocastica con media μ , varianza σ^2 e momento non centrale B_2 , si ha che:

$$\sigma^2 = B_2 - \mu^2 \quad [3.10b]$$

Da ultimo va ricordato che nelle applicazioni sia pratiche che teoriche è spesso comodo trattare variabili stocastiche aventi media nulla e varianza unitaria. Per arrivare a ciò è sempre possibile definire una *variabile standardizzata* corrispondente così definita:

$$\hat{X} = (X - \bar{X}) / \sigma_X \quad [3.11a]$$

la cui *PDF* risulta pari a:

$$\hat{p}(\hat{x}) = \sigma_X p(\bar{x} + \sigma_X x) \quad [3.11b]$$

ed i cui momenti centrali sono:

$$\hat{b}_n = b_n / \sigma_X^n \quad [3.11c]$$

A questo punto ci si trova ad aver a disposizione due modi diversi per descrivere il comportamento di una variabile stocastica: il primo prevede la conoscenza analitica della *PDF*, mentre il secondo prevede la conoscenza del valor medio statistico e degli infiniti momenti centrali (o in alternativa degli infiniti momenti non centrali). Quale metodologia adottare? Se per considerazioni puramente teoriche non ci sono dubbi sul fatto che l'uso diretto della *PDF* presenta innegabili vantaggi, la conoscenza del valor medio e dei momenti centrali permette di affrontare il problema della turbolenza atmosferica in maniera operativamente più efficace e questo per due motivi. Il primo motivo si fonda su una *speranza* che i fatti praticamente confermano: è sperabile che solo alcuni dei momenti centrali siano significativi per descrivere operativamente con sufficientemente fedeltà la *PDF* di una variabile turbolenta. Se ciò fosse confermato dalle osservazioni, basterebbe raggiungere una buona conoscenza del valor medio e di alcuni dei momenti centrali delle variabili che descrivono la turbolenza atmosferica per poterne affrontare una realistica descrizione statistica: in pratica, ciò ci permetterebbe di *chiudere* un problema teoricamente infinito. Alla luce dei fatti, questa ipotesi operativa sembra sufficientemente corretta e, ancor più interessante, i momenti coinvolti sono al massimo quelli del quarto ordine. Il secondo motivo risiede nel fatto che la determinazione dei momenti è semplice e può essere fatta a partire dalle realizzazioni della variabile, come vedremo al punto 3.1.1.7.

3.1.1.5 Alcune distribuzioni notevoli

Le *PDF* (e quindi anche le *CDF*) possono essere a priori di qualsiasi tipo, tuttavia ne esistono alcune che hanno un'importanza teorica e pratica notevole e a cui si approssimano le distribuzioni delle variabili caratteristiche della turbolenza del *PBL*. Qui di seguito si presentano gli esempi più significativi.

La distribuzione uniforme

La più semplice di tutte le distribuzioni è la distribuzione uniforme. Una variabile stocastica X con realizzazioni x è caratterizzata da una distribuzione uniforme quando, definito uno spazio campionario costituito dall'intero insieme dei numeri reali ed individuati due interi a e b ($a < b$) si ha che:

$$p(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{per } a \leq x < b \\ 0 & \text{per } x < a \text{ oppure per } x \geq b \end{cases} \quad [3.12a]$$

In sostanza una tale variabile stocastica potrà assumere valori compresi solo tra a e b e la probabilità che una realizzazione abbia un valore in questo intervallo è la medesima. E' immediato ottenere la sua cumulata, data da:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < a \\ (x-a)/(b-a) & \text{per } a \leq x < b \\ 1 & \text{per } x \geq b \end{cases} \quad [3.12b]$$

Utilizzando le definizioni date è facile mostrare che:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2}(a+b) & \sigma^2 &= \frac{1}{12}(b-a)^2 \\ \text{Skew} &= 0 & \text{Kurt} &= 1.8 \end{aligned}$$

Questa distribuzione è simmetrica rispetto al valore medio, visto che la skewness è nulla.

La distribuzione esponenziale

Una variabile stocastica è descritta da una distribuzione esponenziale quando, definito un parametro reale positivo λ , la sua *PDF* è data da:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases} \quad [3.13a]$$

la cui cumulata è:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\lambda} & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases} \quad [3.13b]$$

Si può mostrare che il valore medio e la varianza sono rispettivamente pari a λ e a λ^2 , mentre i generici momenti di ordine n sono dati dalla relazione:

$$B_n = n! \lambda^n \quad [3.13c]$$

La distribuzione normale

Una variabile stocastica X con media μ e deviazione standard σ è distribuita secondo una distribuzione normale quando:

$$p(x) = N(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2} \quad [3.14a]$$

Tale distribuzione è caratterizzata, inoltre, dal fatto che:

$$Skew = 0 \quad Kurt = 3 \quad [3.14b]$$

e che tutti i momenti dispari (eccetto la media) sono nulli. La sua cumulata è, inoltre, espressa dalla relazione:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}} dt = \frac{1}{2} \left[1 + erf\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right] \quad [3.14c]$$

Per le caratteristiche della funzione speciale *erf* (*error function*) si rimanda all'Appendice B.

Una forma più conveniente della distribuzione normale la si ottiene impiegando la variabile standardizzata Z la cui generica realizzazione è:

$$z = (x - \mu)/\sigma \quad [3.15a]$$

Quando si effettua questa sostituzione di variabile nella (3.14a), si ottiene che Z è ancora distribuita secondo una normale con media nulla e varianza unitaria. In questo caso si ha che:

$$p(z) = N(z; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad [3.15b]$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[1 + erf\left(z/\sqrt{2}\right) \right] \quad [3.15c]$$

La distribuzione log-normale

Se una variabile stocastica X è distribuita secondo una normale con media μ e deviazione standard σ , allora la variabile stocastica Y definita come:

$$Y = \exp(X) \quad [3.16a]$$

è distribuita secondo una distribuzione *log-normale*. Se si indica con y una realizzazione di tale variabile, la *PDF* relativa, che si ottiene differenziando la precedente, è:

$$f(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2}(\ln y - \mu)^2/\sigma^2\right]} \quad [3.16b]$$

Si rimanda ad un testo di Statistica per le proprietà caratteristiche di una tale distribuzione.

3.1.1.6 Il cambio di variabili

Sia X una generica variabile stocastica con *PDF* $p(x)$ e sia $G(X)$ un'altra variabile stocastica la cui generica realizzazione $g(x)$ è una funzione continua ad un solo valore reale della realizzazione x . Un esempio di funzione $G(X)$ è per esempio la variabile normalizzata (3.15a). L'obiettivo è determinare la *PDF* $p(g)$ noto $p(x)$.

Consideriamo prima il caso in cui la funzione inversa $x(g)$ sia anch'essa una funzione continua ad un solo valore reale. In questo caso $p(g)$ può essere determinata dal seguente ragionamento:

$$\begin{aligned} \frac{P\{g_k < g(x_k) < g_k + \Delta g\}}{\Delta g} &= \frac{P\{x_k < x_k < x_k + \Delta x\}}{\Delta g} \\ &= \frac{P\{x_k < x_k < x_k + \Delta x\}}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta g} \end{aligned} \quad [3.17a]$$

dove con x_k si è indicato il valore di una generica realizzazione cui corrisponde la realizzazione $g(x_k)$ della variabile G . Perciò, al limite se $dg/dx \neq 0$ si ha che:

$$p(g) = p(x) \cdot \left| \frac{dx}{dg} \right| = \frac{p(x)}{|dg/dx|} \quad [3.17b]$$

Nel caso in cui $x(g)$ sia una funzione a n -valori reali (n intero) e tutti gli n valori abbiano la medesima probabilità, si ha che:

$$p(g) = \frac{n \cdot p(x)}{|dg/dx|} \quad [3.17c]$$

Esercizio 3.3

Sia X una variabile distribuita in maniera gaussiana come media μ e varianza σ^2 . Si determini la *PDF* relativa alle due variabili stocastiche le cui realizzazioni sono, rispettivamente:

$$z = (x - \mu)/\sigma$$

$$y = e^x$$

1) Consideriamo il primo caso. Si ha che:

$$\frac{dz}{dx} = \sigma^{-1} \quad \Rightarrow \quad p(z) = \frac{p(x)}{1/\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

2) Consideriamo il secondo caso. Si ha che:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \quad \Rightarrow \quad p(y) = \frac{p(x)}{e^x} = \frac{1}{y \cdot \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - \mu)^2/2\sigma^2}$$

Esercizio 3.4

Sia Φ una variabile stocastica che rappresenta l'angolo di fase di una funzione seno X . Sia ϕ una generica realizzazione di Φ e x una generica realizzazione di X , data da:

$$x = A \cdot \sin(2\pi f_0 t_0 + \phi)$$

dove A , f_0 e t_0 sono costanti. Supponiamo, inoltre, che Φ sia distribuita secondo una distribuzione uniforme, cioè:

$$p(\phi) = \begin{cases} (2\pi)^{-1} & \text{se } 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo caso la funzione inversa ha due valori reali. Perciò:

$$\frac{dx}{d\phi} = A \cos(2\pi f_0 t_0 + \phi) = A \sqrt{1 - \sin^2(2\pi f_0 t_0 + \phi)} = \sqrt{A^2 - x^2}$$

Quindi:

$$p(x) = \frac{2p(\phi)}{dx/d\phi} = \begin{cases} \pi \left(\sqrt{A^2 - x^2} \right)^{-1} & \text{se } |x| < A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3.1.1.7 La stima campionaria della media e dei momenti centrali

Pur avendo definito i momenti di una distribuzione statistica e sapendo che la loro conoscenza equivale alla conoscenza della *PDF*, sono necessari altri elementi per rendere operativo il loro uso. In sostanza, bisogna rispondere alla domanda: come fare a calcolarli al meglio senza conoscere la *PDF*, ma conoscendo, invece, le realizzazioni indipendenti della variabile stocastica ottenuti ripetendo N volte un esperimento ideale (campionamento) nelle medesime condizioni? Questo è l'argomento che ci si accinge a trattare, definendo e discutendo degli *operatori* che, agendo sulle realizzazioni di una variabile stocastica, producono una stima dei vari momenti. Tali operatori prendono il nome di *stimatori*. Ci limiteremo qui ad individuare stimatori del valor medio e dei principali momenti centrali e, successivamente, ci accorgeremo che ciò è del tutto sufficiente. Procederemo trascurando un po' il rigore formale e privilegiando gli argomenti euristici, seguendo prevalentemente quanto proposto da von Storch e Zwiers (1999, pag.80-83).

Ipotizziamo di considerare una variabile stocastica scalare X e di raccogliere N sue realizzazioni indipendenti x_i , $i = 1, 2, \dots, N$ ottenute da un esperimento ideale (come descritto in precedenza).

Consideriamo in primo luogo il *valore atteso di X* , cioè il suo valor medio. Come visto, esso è definito come:

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) \cdot dx \quad [3.18a]$$

Ipotizziamo, inoltre, che le N realizzazioni siano organizzate in ordine crescente di valore, cioè che $x_{i-1} < x_i$. Il metodo per individuare un suo stimatore campionario si basa nel suddividere l'intero asse reale da $-\infty$ a $+\infty$ (che rappresenta il più generale spazio delle fasi possibile per una variabile stocastica scalare) in opportuni sottospazi (sottointervalli): il primo da $-\infty$ a $(x_1+x_2)/2$, il secondo da $(x_1+x_2)/2$ a $(x_2+x_3)/2$ e così via fino all'ultimo che andrà da $(x_{N-1}+x_N)/2$ a $+\infty$. Fatto ciò, riscriviamo l'integrale (3.18a) spezzandolo in tanti sottointegrali quanti sono i sottospazi individuati ed ottenendo:

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{(x_1+x_2)/2} x \cdot p(x) \cdot dx + \sum_{i=2}^{N-1} \left\{ \int_{(x_{i-1}+x_i)/2}^{(x_i+x_{i+1})/2} x \cdot p(x) \cdot dx \right\} + \int_{(x_{N-1}+x_N)/2}^{+\infty} x \cdot p(x) \cdot dx \quad [3.18b]$$

Consideriamo, ora, uno dei sottointegrali presenti in sommatoria ed approssimiamolo utilizzando la *CDF* ed una forma un po' *brutale* del teorema della media. Otterremo in questo modo che tutti i sottointegrali presenti nella sommatoria della relazione precedente si possono approssimare come:

$$\int_{(x_{i-1}+x_i)/2}^{(x_i+x_{i+1})/2} x \cdot p(x) \cdot dx \approx x_i \cdot \left[F_X \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) - F_X \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) \right] \quad [3.18c]$$

Operando in modo analogo sul primo sottointegrale e ricordando $F_X(-\infty) = 0$, si avrà:

$$\int_{-\infty}^{(x_1+x_2)/2} x \cdot p(x) \cdot dx \approx x_1 \cdot \left[F_X \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) - 0 \right] \quad [3.18d]$$

mentre, per l'ultimo sottointegrale si otterrà:

$$\int_{(x_{N-1}+x_N)/2}^{+\infty} x \cdot p(x) \cdot dx \approx x_N \cdot \left[1 - F_X \left(\frac{x_{N-1} + x_N}{2} \right) \right] \quad [3.18e]$$

visto che $F_X(+\infty) = 1$.

Ogni sottospazio delle fasi su cui opera ogni singolo sottointegrale, per costruzione, contiene una sola realizzazione e quindi la differenza tra *CDF* presenti nei vari integrali vale sempre $1/N$. Ciò comporta quindi che una stima del valore atteso sarà data dalla semplice media aritmetica delle realizzazioni, cioè da:

$$\mu_X \approx \hat{\mu}_X = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \quad [3.18f]$$

Quindi uno stimatore del valore atteso di una variabile stocastica è la semplice media aritmetica delle sue realizzazioni.

Con un procedimento analogo si giunge alla stima dei momenti generici di ogni ordine:

$$B_n \approx \hat{B}_n = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i)^n \quad [3.19a]$$

Per quanto riguarda i momenti centrali, si giunge ai relativi stimatori, in generale, impiegando le relazioni esistenti tra momenti centrali e non centrali. In particolare per la varianza si avrà:

$$\sigma^2 \approx s_b^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)^2 \quad [3.19b]$$

Si noti che abbiamo usato un simbolo inconsueto per indicare la stima della varianza e ciò sarà più chiaro nel seguito.

Per la Skewness e la Kurtosis, i relativi stimatori sono:

$$Sk \approx \hat{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \hat{\mu}_X)^3}{s_b^3} \quad [3.20]$$

$$Kurt \approx \hat{K} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \hat{\mu}_X)^4}{s_b^4} \quad [3.21]$$

Introdotti in questo modo gli stimatori, ci si domanda quanto essi siano *buoni*. A tale scopo pos-

siamo introdurre due concetti:

- il concetto di *distorsione (bias)*: è desiderabile che il valore atteso della stima di un parametro statistico Φ (valor medio, varianza, ecc.) di una variabile stocastica ottenuta mediante uno stimatore coincida col vero valore del parametro. Matematicamente ciò può essere espresso dalla relazione:

$$E[\hat{\Phi}] = \Phi \quad [3.22a]$$

Uno stimatore che rispetta questa condizione si dice *stimatore non distorto (unbiased)*

- è desiderabile che tale stimatore, basato su un insieme di N realizzazioni indipendenti, tenda al valore vero al tendere all'infinito della numerosità dell'insieme delle realizzazioni. Ciò si può esprimere con la relazione seguente:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[(\hat{\Phi}) - \Phi]^2 = 0 \quad [3.22b]$$

Uno stimatore che possiede la proprietà di correttezza asintotica è detto essere uno stimatore *consistente*.

Consideriamo ora l'esempio dello stimatore *media statistica* e valutiamo il suo valore atteso. In effetti se eseguiamo N volte un esperimento ideale ottenendo N realizzazioni indipendenti della variabile stocastica X e se ripetessimo M volte tutto ciò, sempre nelle medesime condizioni sperimentali, otterremmo M stime (a priori differenti) del valor medio μ_X di X . Valutiamo ora il valore atteso delle stime:

$$E[\hat{\mu}_X] = E\left[\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i\right] = \frac{1}{N} E\left[\sum_{i=1}^N x_i\right] = \frac{1}{N} (N\mu_X) = \mu_X \quad [3.23a]$$

quindi lo stimatore della media non è distorto. Inoltre il valore atteso della differenza quadratica media tra la stima della media ed il suo valore vero vale:

$$E[(\hat{\mu}_X - \mu_X)^2] = E\left[\left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i - \mu_X\right)^2\right] = \frac{1}{N^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)\right)^2\right] \quad [3.23b]$$

e, per il fatto che le realizzazioni sono tra loro indipendenti, ci si riduce a:

$$E[(\hat{\mu}_X - \mu_X)^2] = \frac{1}{N^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)\right)^2\right] = \frac{1}{N^2} (N\sigma_x^2) = \frac{\sigma_x^2}{N} \quad [3.23c]$$

Quando il numero N di realizzazioni tende all'infinito, il valore atteso della differenza quadratica tra valore medio stimato e valore medio vero tende a zero, quindi lo stimatore della media oltre che essere non distorto è anche consistente.

Così non è per lo stimatore della varianza espresso dalla (3.14). Infatti:

$$E[s_b^2] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu}_X)^2\right] = \frac{1}{N} E\left[\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu}_X)^2\right] \quad [3.24a]$$

Ma:

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu}_X)^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X + \mu_X - \hat{\mu}_X)^2 \quad [3.24b]$$

quindi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu}_X)^2 &= \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)^2 - 2N(\hat{\mu}_X - \mu_X)^2 + N(\hat{\mu}_X - \mu_X)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)^2 - N(\hat{\mu}_X - \mu_X)^2 \end{aligned} \quad [3.24c]$$

percì:

$$E[s_b^2] = \frac{1}{N} \cdot (N\sigma_x^2 - \sigma_X^2) = \frac{(N-1)}{N} \sigma_X^2 \quad [3.24d]$$

Percì lo stimatore (3.14) è uno stimatore distorto (*biased*). È facile mostrare come il nuovo stimatore della varianza dato da:

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)^2 \quad [3.25]$$

sia uno stimatore non distorto, il più usato nella pratica corrente.

Per concludere, ottenuto dal campionamento di una variabile stocastica X un insieme di N realizzazioni x_k , l'uso degli stimatori ci consente di ottenere *una* stima dei parametri statistici di interesse. Concentriamo l'attenzione sul valore atteso di X (per gli altri momenti valgono le medesime considerazioni). La variabile X possiede sicuramente un valor medio *vero* μ_X , cioè un valore atteso, che però non è noto. Il campionamento di N sue realizzazioni consente di ottenerne una stima che, però, dipende:

- dall'aver realizzato un campionamento che produce N realizzazioni
- dalle specifiche N realizzazioni ottenute in quel campionamento.

Ripetendo il campionamento M volte e variando il numero di campioni ottenuti in ogni campionamento, la stima del valor medio di quella variabile generalmente varierà. Quindi, la stima è di fatto la realizzazione di una variabile stocastica che rappresenta il campionamento di N realizzazioni della variabile X . Solo quando la numerosità del campione tende all'infinito, stima e valore vero del valore atteso coincidono. Quindi, mentre μ_X è una quantità deterministica, ogni sua stima ha caratteristiche stocastiche. Qui non tratteremo l'importante problematica dell'incertezza della stima: in von Storch e Zwiers (1999) ne è data un'eccellente trattazione. Presenteremo solo nel Cap. 11 alcuni di questi concetti trattando il problema della misura delle variabili meteorologiche.

3.1.1.8 La disuguaglianza di Chebyshev

Supponiamo che X sia un'arbitraria variabile stocastica con media μ , varianza σ^2 e sia ψ^2 il relativo momento del secondo ordine non centrale. Supponiamo, inoltre, che la relativa PDF (in generale non nota) sia $p(x)$. Dalla definizione di momento del secondo ordine si ha che:

$$\psi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) \cdot dx \geq \int_{|x| \geq \varepsilon} x^2 p(x) \cdot dx \quad [3.26a]$$

visto che l'intervallo di integrazione è ridotto. In pratica, questo integrale è esteso a due intervalli di integrazione, il primo da ε a $+\infty$ e l'altro da $-\varepsilon$ a $-\infty$, dove ε è un numero arbitrario. Inoltre, è anche vero che:

$$\psi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) \cdot dx \geq \int_{|x| \geq \varepsilon} x^2 p(x) \cdot dx \geq \varepsilon^2 \int_{|x| \geq \varepsilon} p(x) \cdot dx \quad [3.26b]$$

Questa relazione esprime però il concetto che:

$$P\{|x| \geq \varepsilon\} = \int_{|x| \geq \varepsilon} p(x) \cdot dx \leq \frac{\psi^2}{\varepsilon^2} \quad [3.26c]$$

Se ripetiamo il ragionamento considerando non la realizzazione x ma la fluttuazione $x - \mu$, si ottiene che:

$$P\{|x - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad [3.27a]$$

Se poi, vista l'arbitrarietà di ε , poniamo $\varepsilon = c\sigma$ (la costante c è un numero qualsiasi), si ha che:

$$P\{|x - \mu| \geq c \cdot \sigma\} \leq \frac{1}{c^2} \quad [3.27b]$$

Questa è la disuguaglianza di Chebyshev ed è di fondamentale importanza. Essa, infatti, ci assicura che la probabilità che una generica realizzazione $x - \mu$ abbia un valore non inferiore ad una frazione c di deviazione standard è minore o uguale a c^{-2} e questo, senza alcuna informazione sulla *PDF* della variabile X . Se poi la *PDF* è nota, è possibile (von Storch e Zwiers, 1999) individuare relazioni simili alla (3.27b), specifiche per la *PDF* considerata, anche se la (3.27b) costituisce comunque un limite superiore per la probabilità.

Esercizio 3.5

Sia X una variabile stocastica con media μ , deviazione standard σ e *PDF* incognita. Vogliamo trovare la probabilità che la fluttuazione di una realizzazione x sia, in modulo, inferiore a 2 volte la deviazione standard.

Dalla (3.27b), con $c = 2$ si ha:

$$P\{|x - \mu| \geq 2\sigma\} \leq 0.250$$

Se poi X fosse gaussiana, si avrebbe la condizione più stringente:

$$P\{|x - \mu| \geq 2\sigma\} \leq 0.050$$

3.1.1.9 La dipendenza tra variabili stocastiche

Fin qui abbiamo considerato una variabile stocastica isolata, campionata in un punto dello spazio e ad un certo istante. Questa situazione ricorda molto quella in cui ci si trova nel realizzare una misura di una variabile scalare. Va, però, ricordato che molto spesso si devono trattare due o più variabili stocastiche campionate contemporaneamente: l'esempio più importante è costituito dal vettore vento le cui tre componenti cartesiane sono un ottimo esempio di variabili stocastiche *congiunte* (*joint random variables*) normalmente misurate contemporaneamente. Ciò che rende importante trattare questa situazione è il fatto che ci può essere o meno un *grado di dipendenza reciproca* tra di esse e che tale dipendenza deve essere in qualche modo quantificata. Tra l'altro, il modello fluidodinamico dell'atmosfera ci fornisce delle relazioni che mostrano l'influenza reciproca tra variabili meteorologiche e ciò ci garantisce che tra di esse ci deve essere una sorta di mutua dipendenza. Per semplificare, qui di seguito si tratterà prevalentemente il caso di due variabili congiunte (per esempio la componente trasversale v e la componente verticale w del vento). L'estensione al caso a più variabili è immediata.

Lo spazio delle fasi

Nel caso delle due variabili stocastiche V e W (che presentano realizzazioni, rispettivamente, v e w) lo spazio delle fasi risulta essere una porzione di piano delimitato, in linea di principio, da valori massimi e minimi ammessi dalla fisica del problema. Nel caso in esame, lo spazio delle

fasi, a priori, potrebbe essere l'intero piano anche se, eseguendo un esperimento ideale in cui si ottiene ogni volta una coppia di realizzazioni (v, w) , si ottiene (Fig. 3.3) uno scatter-plot che, nel caso considerato in figura, è sostanzialmente un'ellisse con semiasse maggiore dell'ordine dei 10 ms^{-1} e semiasse minore dell'ordine di 4 ms^{-1} .

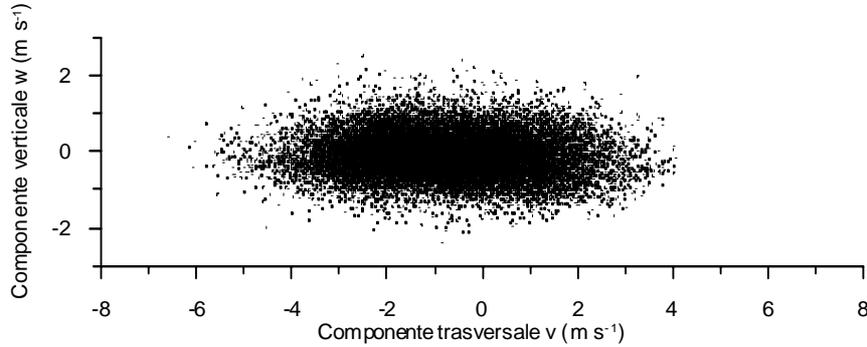


Fig. 3.3: spazio delle fasi della componente trasversale v e verticale w del vento ottenuto da un esperimento reale nel PBL convettivo (36000 coppie di realizzazioni)

Nel caso più generale in cui le variabili congiunte siano più di due, il relativo spazio delle fasi avrà dimensione pari al numero delle variabili.

La densità di probabilità e la cumulata

La *CFD* di due variabili stocastiche congiunte V e W è definita come la probabilità che la coppia di realizzazioni v (della variabile V) e w (della variabile W) siano contemporaneamente inferiori rispettivamente ad un valore a e ad un valore b ; in sintesi:

$$F_{VW}(a, b) = P[v < a, w < b] \quad [3.28a]$$

Chiaramente F_{VW} è una funzione non decrescente di ciascuno dei propri argomenti, cioè:

$$F_{VW}[a + \delta a, b + \delta b] \geq F_{VW}[a, b] \quad [3.28b]$$

Si ha poi che:

$$F_{VW}[-\infty, b] = P[v < -\infty, w < b] = 0 \quad [3.28c]$$

dato che la condizione $v < -\infty$ è impossibile, mentre:

$$F_{VW}[\infty, b] = P[v < \infty, w < b] = P[w < b] = F_W[b] \quad [3.28d]$$

perché è certo che v sia minore di infinito. $F_W[b]$ della singola variabile W (definita al punto 3.1.1.2) è chiamata *CDF* marginale. L'uso della cumulata nel caso multivariato è abbastanza scomodo e raro e si preferisce riferirsi alla *PDF* qui di seguito definita.

Per definire la densità di probabilità congiunta $p_{VW}(v, w)$ si può utilizzare la relazione seguente:

$$p_{VW}(v, w) = \lim_{\substack{\Delta v \rightarrow 0 \\ \Delta w \rightarrow 0}} \left[\frac{P[v < V \leq v + \Delta v \text{ AND } w < W \leq w + \Delta w]}{\Delta v \cdot \Delta w} \right] \quad [3.29a]$$

Da questa definizione seguono alcune conseguenze importanti:

- la densità di probabilità congiunta è positiva, visto che la *CFD* è non decrescente:

$$p(v, w) \geq 0 \quad [3.29b]$$

- anche per la *PDF* congiunta vale la relazione di normalizzazione, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(v, w) \cdot dv \cdot dw = 1 \quad [3.29c]$$

- dalla densità di probabilità congiunta è possibile ottenere le densità di probabilità delle variabili stocastiche singole con le relazioni seguenti:

$$p_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(v, w) \cdot dw \quad p_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(v, w) \cdot dv \quad [3.29d]$$

- tra la *CFD* e la *PDF* congiunta esiste la seguente relazione integrale, nell'ipotesi che la *PDF* sia integrabile:

$$F_{VW}[v, w] = \int_{-\infty}^v \int_{-\infty}^w p(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad [3.29e]$$

- tra la *PDF* e la *CFD* congiunta esiste la seguente relazione differenziale, nell'ipotesi che la *CFD* sia differenziabile:

$$\frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{\partial F_{VW}(v, w)}{\partial v} \right] = p(v, w) \quad , \quad [3.29f]$$

- vale poi la relazione seguente:

$$P[v_{1a} \leq v < v_{2a}; w_{1b} \leq w < w_{2b}] = \int_{v_{1a}}^{v_{2a}} \int_{w_{1b}}^{w_{2b}} p(v, w) \cdot dv \cdot dw \quad [3.29g]$$

E' abbastanza chiaro che, in genere, non è possibile ottenere analiticamente la funzione di densità di probabilità congiunta, tuttavia la si può costruire in maniera campionaria in analogia con quanto detto trattando il caso di una sola variabile. Se consideriamo l'esempio delle due variabili V e W (componente trasversale e verticale del vento), dalle realizzazioni mostrate in Fig. 3.3 è possibile ottenere la *PDF* campionaria relativa. Essa è la superficie mostrata in Fig. 3.4.

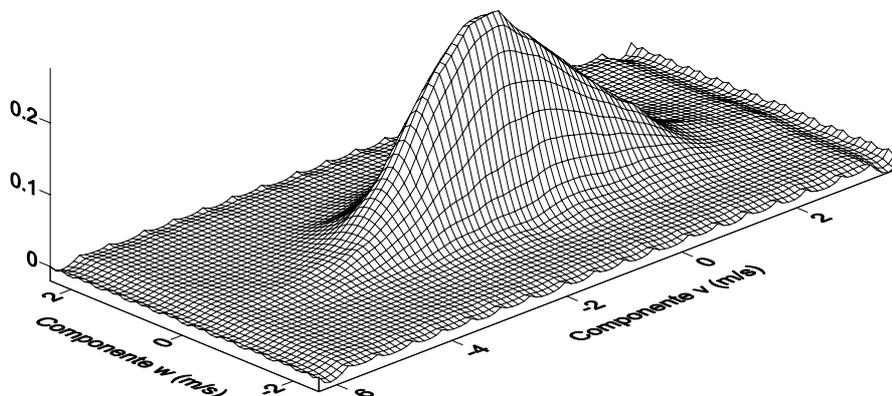


Fig. 3.4: densità di probabilità congiunta campionaria delle realizzazioni della componente trasversale e verticale del vento di Fig. 3.3.

Una situazione importante è quella per cui si ha che:

$$p(v, w) = p(v) \cdot p(w) \quad [3.30a]$$

Se si verifica una tale situazione, le due variabili non dipendono in alcun modo una dall'altra (in sostanza non sono congiunte) e si dicono statisticamente indipendenti. In questo caso una relazione analoga vale anche per le *CFD*:

$$F_{VW}(x, y) = F_V(x)F_W(y) \quad [3.30b]$$

L'estensione di questi ragionamenti al caso di tre o più variabili è sostanzialmente immediato.

Le funzioni di densità marginale e densità condizionata

La funzione di densità di probabilità genera un certo numero di densità di probabilità subordinate che si raggruppano in due classi: le densità marginali e le densità subordinate. Per mantenere una certa generalità della trattazione, limitandone la complessità, consideriamo il caso di tre generiche variabili stocastiche congiunte $X_j, j = 1, 2, 3$ le cui realizzazioni vengono indicate come x_j e la cui *PDF* congiunta è $p(x_1, x_2, x_3)$.

In questo caso, detta (i, j, k) una qualsiasi permutazione delle tre variabili, possiamo definire due tipi di densità marginali:

$$\begin{aligned} P_i(x_i) \cdot dx_i &= \text{Prob}\{X_i \in [x_i, x_i + dx_i]; \forall x_j, \forall x_k\} \\ P_{ij}(x_i, x_j) \cdot dx_i dx_j &= \text{Prob}\{X_i \in [x_i, x_i + dx_i]; X_j \in [x_j, x_j + dx_j]; \forall x_k\} \end{aligned}$$

dove col simbolo " $\forall x_j$ " si intende "qualunque sia il valore assunto dalla realizzazione di X_j ". In sostanza la prima di tali funzioni quantificano la probabilità che la variabile X_i presenti una realizzazione nell'intervallo $(x_i \div x_i + dx_i)$ qualunque siano le realizzazioni delle altre variabili, mentre la seconda quantifica la probabilità che, qualunque sia il valore assunto dalla realizzazione di X_k , le variabili X_i e X_j abbiano un ben preciso valore in un intervallo infinitesimale attorno ad esso.

Sempre considerando una qualsiasi permutazione delle tre variabili, le densità condizionate si definiscono invece come:

$$\begin{aligned} P_i^{(j)}(x_i | x_j) \cdot dx_i &= \text{Prob}\{X_i \in [x_i, x_i + dx_i]; X_j = x_j, \forall X_k\} \\ P_i^{(j,k)}(x_i | x_j, x_k) \cdot dx_i &= \text{Prob}\{X_i \in [x_i, x_i + dx_i]; X_j = x_j, X_k = x_k\} \\ P_{i,j}^{(k)}(x_i, x_j | x_k) \cdot dx_i dx_j &= \text{Prob}\{X_i \in [x_i, x_i + dx_i]; X_j \in [x_j, x_j + dx_j]; X_k = x_k\} \end{aligned}$$

Vista la complessità della notazione è doverosa qualche delucidazione. Il simbolo P con cui si indica la densità di probabilità condizionata presenta uno o più pedici che indicano a quale delle tre variabili si riferisce la densità ed uno o più apici che indicano quale variabile presenta un ben preciso valore. Se consideriamo la prima delle relazioni precedenti, essa sta ad indicare la densità di probabilità della variabile X_i , quando X_j ha un ben preciso valore e X_k è qualsiasi. La seconda relazione, invece, indica la densità di probabilità di X_i quando X_j e X_k assumono un ben preciso valore, mentre la terza relazione descrive la densità di probabilità congiunta delle variabili X_i e X_j quando X_k assume un ben preciso valore. Per rendere ancora più chiaro quanto detto, l'argomento della funzione di probabilità è costituito da gruppi di variabili separate dal simbolo "|": le variabili che precedono tale simbolo sono quelle cui si riferisce la densità subordinata, mentre quelle che seguono tale simbolo sono quelle che dettano le condizioni.

Tutte queste densità subordinate sono non negative e normalizzate secondo le specifiche condizioni di normalizzazione seguenti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_i^{(j)}(x_i) \cdot dx_i = \int_{-\infty}^{+\infty} P_i^{(j)}(x_i | x_j) \cdot dx_i = \int_{-\infty}^{+\infty} P_i^{(j,k)}(x_i | x_j, x_k) \cdot dx_i = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} P_{i,j}(x_i, x_j) \cdot dx_j = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} P_{ij}^{(k)}(x_i, x_j | x_k) \cdot dx_j = 1$$

La funzione di distribuzione di densità e le distribuzioni marginali e condizionate sono intimamente correlate. I dettagli piuttosto intricati relativi a ciò possono essere trovati in Gillespie (1992, pag 20-21). Il risultato finale è che la funzione di densità di probabilità consente di determinare completamente tutte le densità subordinate.

Vale inoltre la pena ricordare la regola di Bayes che lega le densità congiunte alle densità condizionate. Tale regola nel caso di due variabili può essere così espressa:

$$p(x_1, x_2) = p(x_1) \cdot P_2^1(x_2 | x_1) = p(x_2) \cdot P_1^2(x_1 | x_2)$$

I momenti, la Covarianza ed il Coefficiente di Correlazione

Anche per le variabili congiunte si possono definire i momenti di vario ordine. Si considerino N variabili stocastiche campionate simultaneamente le cui realizzazioni siano u_1, u_2, \dots, u_N . Si definiscono momenti le grandezze seguenti:

$$\begin{aligned} B_{k_1 k_2 \dots k_N} &= \overline{u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_N^{k_N}} = E \left[u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_N^{k_N} \right] \\ &= \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_N^{k_N} \cdot p(u_1, u_2, \dots, u_N) \cdot du_1 du_2 \dots du_N \end{aligned} \quad [3.31a]$$

dove k_1, k_2, \dots, k_N sono numeri interi non negativi, la cui *somma* rappresenta l'*ordine del momento*. In particolare, i momenti del primo ordine sono i valori attesi delle singole variabili. In aggiunta ai momenti generici è possibile anche definire i *momenti centrali*, cioè i momenti delle fluttuazioni rispetto al valore atteso che, sinteticamente, possono essere dati da:

$$b_{k_1 k_2 \dots k_N} = \overline{(u_1 - \mu_{u_1})^{k_1} (u_2 - \mu_{u_2})^{k_2} \dots (u_N - \mu_{u_N})^{k_N}} \quad [3.31b]$$

Anche nel caso di N variabili congiunte, l'uso dei momenti (che sono infiniti) invece della densità di probabilità non comporta alcuna perdita di completezza della descrizione statistica. Tuttavia, come già detto, nei casi pratici non sono mai noti tutti i momenti e quindi si considerano solo alcuni momenti di ordine inferiore: ciò, naturalmente, non fornisce una descrizione univoca della distribuzione, ma ne descrive solo alcune particolari proprietà. Ciò nonostante, l'approccio allo studio delle variabili stocastiche basato sul prendere in considerazione solo pochi momenti di ordine inferiore spesso è molto prezioso e, come si vedrà nel seguito, ci consentirà di studiare effettivamente la turbolenza del *PBL*.

Operativamente, concentriamo ora la nostra attenzione sul più semplice (e più utile) momento centrale del secondo ordine, la *covarianza*. Date due variabili stocastiche con realizzazioni x e y essa è definita come:

$$C_{xy} = E[(x - \mu_X) \cdot (y - \mu_Y)] = \int \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X) \cdot (y - \mu_Y) \cdot p(x, y) \cdot dx dy \quad [3.32a]$$

Da questa definizione si nota che quando le due variabili stocastiche coincidono, $C_{xx} = \sigma_x^2$.

Esiste un'importante relazione (il *Teorema della Covarianza*) tra la covarianza delle due variabili stocastiche e le rispettive deviazioni standard. Tale relazione afferma che:

$$|C_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y \quad [3.32b]$$

cioè che la covarianza, in modulo, non può mai essere superiore al prodotto delle deviazioni

standard delle due variabili considerate. Come si arriva a tale disuguaglianza è spiegato nell'Esercizio seguente.

Esercizio 3.6

Dimostrare il Teorema della covarianza.

Siano X e Y due variabili stocastiche congiunte e si considera la nuova variabile stocastica $Z = aX + bY$, con a e b costanti generiche. La varianza che caratterizza Z è non negativa (come tutte le varianze) e vale:

$$0 \leq \sigma_{aX+bY}^2 = a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2 - 2abC_{xy}$$

Le costanti a e b sono del tutto generiche e possono anche essere $a = C_{xy}$ e $b = \sigma_X^2$. In questo caso si ha che:

$$0 \leq (\sigma_X^2)^2 \cdot \sigma_Y^2 - \sigma_X^2 C_{xy}^2$$

Dividendo entrambi i membri per la varianza di X (che è positiva) si ha la disequazione cercata:

$$|C_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$$

Dal punto di vista operativo, come già fatto per il valore atteso e per la varianza di una variabile stocastica, è necessario individuare uno *stimatore non distorto* anche per la covarianza. Nel caso in cui da un esperimento ideale si ottenessero N coppie di realizzazioni (x_i, y_i) , per prima cosa è indispensabile stimare il valor medio delle due variabili coinvolte nella covarianza. Fatto ciò, lo stimatore non distorto cercato risulta essere dato dalla relazione:

$$\hat{C}_{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu}_X) \cdot (y_i - \hat{\mu}_Y) \quad [3.33c]$$

A questo punto si hanno tutti gli elementi per quantificare il *grado di parentela* tra le due variabili. Essa è data dalla covarianza tra le variabili, tuttavia questo indicatore è scomodo, visto che possiede come dimensioni il prodotto delle dimensioni delle due variabili. Per semplificare e quindi ottenere un indicatore adimensionale, è sufficiente dividere la covarianza per il prodotto delle deviazioni standard delle variabili ottenendo il *coefficiente di correlazione*:

$$\rho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad [3.34a]$$

Si ha un coefficiente di correlazione positivo quando la fluttuazione positiva (negativa) di una variabile è preferenzialmente associata ad una fluttuazione positiva (negativa) dell'altra. Viceversa, se ad una escursione positiva (negativa) di una variabile è associata preferenzialmente una fluttuazione negativa (positiva) dell'altra, la correlazione è negativa. In generale, per come è definito il coefficiente di correlazione, si ha che:

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1 \quad [3.34b]$$

detta *disequazione di Cauchy-Schwartz*.

Se ρ_{xy} è zero, le due variabili sono *incorrelate*. Viceversa, se ρ_{xy} è +1 le due variabili sono *positivamente correlate* e se è pari a -1 lo sono *negativamente*. In generale, due variabili statisticamente indipendenti sono incorrelate, ma non è vero in generale il viceversa. L'intercambiabilità tra il termine incorrelato ed il termine statisticamente indipendente è possibile solo per variabili stocastiche con distribuzione gaussiana.

3.1.1.10 Il teorema del Limite Centrale

Immaginiamo di condurre un esperimento *un po' meno ideale* di quanto ipotizzato in precedenza, consistente nel misurare con uno strumento una variabile meteorologica che ha spiccate caratteristiche stocastiche. Ad ogni esperimento tale variabile fornirà una realizzazione e l'insieme di esse determinerà la funzione di densità di probabilità che contraddistingue la variabile stocastica. Tuttavia l'esperimento, come detto, non è completamente ideale: lo strumento viene alimentato con una tensione che presenta fluttuazioni stocastiche attorno alla media (la tensione non è completamente stabilizzata) ed il risultato di ciò è che ad ogni realizzazione si sovrappone al segnale vero un *rumore stocastico* con *PDF* differente da quella della variabile di misura. Inoltre il basamento su cui è posto lo strumento potrebbe vibrare stocasticamente attorno al punto di misura introducendo nella misura stessa ulteriore rumore caratterizzato da una *PDF* ancora differente. Se, poi, si indagasse ulteriormente, si individuerebbero altre fonti di rumore difficili da definire e quantificare. In pratica, tutti questi rumori, numerosissimi, difficilmente identificabili e con differenti *PDF*, si verranno a sovrapporre alla misura. Ciò che alla fine otterremo in questo esperimento *un po' meno ideale* è che invece di determinare la variabile stocastica X (come vorremmo), otterremo realizzazioni di una nuova variabile stocastica Y le cui realizzazioni sono date da:

$$y_i = \sum_{i=1}^N a_i x_i \quad [3.35a]$$

dove i coefficienti a_i sono numeri reali arbitrari ed una delle N realizzazioni è quella della variabile X mentre le altre $N-1$ sono i rumori sovrapposti. A questo punto il valore atteso e la varianza del segnale perturbato Y sono:

$$\mu_Y = E[y_i] = E\left[\sum_{i=1}^N a_i x_i\right] = \sum_{i=1}^N a_i E[x_i] = \sum_{i=1}^N a_i \mu_i \quad [3.35b]$$

$$\sigma_Y^2 = E[(y_i - \mu_Y)^2] = E\left[\sum_{i=1}^N a_i (x_i - \mu_i)^2\right] = \sum_{i=1}^N a_i^2 \sigma_i^2 \quad [3.35c]$$

In sostanza il valor medio della variabile misurata è pari alla media pesata del valor medio della variabile vera e del valor medio dei vari rumori sovrapposti, mentre la varianza del valore misurato è la media delle varianze pesate col quadrato dei pesi con cui segnale vero e rumore si compongono nel segnale misurato. Tutto ciò è stato possibile per il fatto che la variabile stocastica misurata ed i rumori sovrapposti erano mutuamente indipendenti.

A fronte di una situazione come questa, a cui si possono ricondurre molte altre situazioni di pratico interesse, anche se apparentemente molto differenti, esiste il *Teorema del Limite Centrale* che consente di aggirare le evidenti ed apparentemente insormontabili difficoltà. In effetti, il *Teorema del Limite Centrale* afferma che, in condizioni molto generali, la somma di N variabili stocastiche al tendere di N all'infinito sarà distribuita con una *PDF* gaussiana (normale) con media μ_Y e varianza σ_Y^2 . Da qui l'enorme importanza teorica e pratica della distribuzione gaussiana.

3.1.1.11 La distribuzione gaussiana multivariata

Tra tutte le possibili *PDF* relative alle variabili congiunte, quella gaussiana è sicuramente la più importante. Per semplicità consideriamo prima il caso di due sole variabili stocastiche a media nulla e con identica varianza.

Siano X e Y due variabili stocastiche congiunte con realizzazioni (x,y) a media nulla, varianza identica e coefficiente di correlazione ρ . La loro funzione di densità di probabilità Gaussiana congiunta è definita dalla relazione:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(\frac{-[x^2 - 2\rho xy + y^2]}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right) \quad [3.36a]$$

dove con $\exp(z)$ è stato indicato in modo tipograficamente più semplice l'operazione e^z . E' immediato verificare che, nel caso in cui il coefficiente di correlazione ρ sia nullo (cioè le due variabili X e Y sono incorrelate), la (3.36a) si riduce a:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot \exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma^2}\right) = p(x) \cdot p(y) \quad [3.36b]$$

cioè, oltre che incorrelate, le due variabili risultano anche statisticamente indipendenti. Vedremo immediatamente che questa proprietà è vera nel caso generale multivariato.

Il caso N -dimensionale (multivariato) è formalmente più complesso. Consideriamo N variabili stocastiche congiunte con realizzazioni x_1, x_2, \dots, x_N campionate contemporaneamente durante un esperimento ideale. Per tali variabili le medie e le varianze siano rispettivamente $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ e $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$. Esprimere la reciproca interdipendenza tra le variabili non è immediato e non è possibile impiegare un unico indicatore statistico. E' possibile, invece, costruire la covarianza tra coppie di variabili come presentato al punto 3.1.1.7. A conti fatti, combinando tra loro le N variabili, sono state ottenute $(N^2 - N)/2$ covarianze distinte tra le coppie di variabili. E' comodo inglobare ordinatamente in un'unica matrice tutte le varianze e le covarianze di un caso multivariato costituito da N variabili congiunte. Tale matrice è nota come *Matrice di Covarianza C* ed è definita come:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \dots & C_{NN} \end{bmatrix} \quad [3.37a]$$

Il generico termine C_{ij} è la covarianza tra le variabili X_i e X_j e i termini C_{ii} rappresentano la varianza di X_i . La matrice \mathbf{C} è una matrice simmetrica ed è facile vedere che i termini indipendenti della Matrice di Covarianza per un caso multivariato N -dimensionale sono $(N^2 + N)/2$.

La distribuzione congiunta di queste N variabili stocastiche segue una distribuzione Gaussiana N -dimensionale se la *PDF* associata è data da:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{\exp\left[-1/2 \cdot |\mathbf{C}| \cdot \sum_{i,j=1}^N |C_{ij}| \cdot (x_i - \mu_i) \cdot (x_j - \mu_j)\right]}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{C}|^{1/2}} \quad [3.37b]$$

In questa relazione col simbolo $|\mathbf{C}|$ si è indicato il determinante della matrice di covarianza, mentre con il simbolo $|C_{ij}|$ si intende il cofattore di C_{ij} nel determinante $|\mathbf{C}|$, definito come quel determinante di ordine $N-1$ formato omettendo la i -esima riga e la j -esima colonna di \mathbf{C} moltiplicato per $(-1)^{i+j}$. A volte è più comodo operare in termini totalmente matriciale. In questo caso, una volta definito il vettore delle *realizzazioni congiunte* \mathbf{u} ed il *vettore delle medie* $\boldsymbol{\mu}$, entrambi vettori colonna N -dimensionali e definiti come:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix}$$

la densità di probabilità congiunta Gaussiana è data dalla relazione seguente:

$$p(\mathbf{u}) = \left[(2\pi)^N \det(\mathbf{C}) \right]^{-1/2} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{u} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{u} - \boldsymbol{\mu}) \right] \quad [3.37c]$$

Quando $N = 2$, per esempio, si ha che:

$$p(x_1, x_2) = \frac{\exp \left\{ \left[\frac{-1}{2(1-\rho_{12}^2)} \right] \cdot \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 + \right. \right.}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \left. \left. - 2\rho_{12} \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}} \quad [3.38]$$

Si osservi, poi, che quando x_1 e x_2 sono incorrelati, $\rho_{12} = 0$ e quindi:

$$p(x_1, x_2) = p(x_1) \cdot p(x_2) \quad [3.39]$$

pertanto queste variabili sono anche statisticamente indipendenti. Ciò non è vero per un'altra distribuzione arbitraria.

Ritornando al caso generale di N variabili rappresentate collettivamente dal vettore delle realizzazioni \mathbf{u} , si può dimostrare che se essa ha una *PDF* gaussiana, anche una sua trasformazione lineare possiede *PDF* Gaussiana. Dato che la matrice \mathbf{C} è simmetrica, essa può essere diagonalizzata mediante una trasformazione unitaria, definita dalla matrice \mathbf{A} che ha la proprietà:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I} \quad [3.40a]$$

dove \mathbf{I} è la matrice identità. Ciò significa che deve esistere una matrice \mathbf{A} tale che:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} = \boldsymbol{\Lambda} \quad [3.40b]$$

dove $\boldsymbol{\Lambda}$ è la matrice diagonale contenente gli autovalori di \mathbf{C} :

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_N \end{bmatrix} \quad [3.40c]$$

Di conseguenza il vettore stocastico trasformato $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}$ ha come matrice di covarianza $\boldsymbol{\Lambda}$:

$$\hat{\mathbf{C}} = E[\hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{u}}] = E[\mathbf{A}^T \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{A}] = \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} = \boldsymbol{\Lambda} \quad [3.40d]$$

Da tutto ciò si può dedurre che:

- se \mathbf{u} è il vettore fluttuazioni, allora $\hat{\mathbf{u}}$ è il vettore fluttuazioni in un particolare sistema di riferimento, quello degli assi principali;
- dato che ciascun autovalore è non negativo, la matrice \mathbf{C} è una matrice simmetrica semi-definita positiva;
- il fatto che la matrice di covarianza $\hat{\mathbf{C}}$ sia diagonale comporta che le fluttuazioni delle variabili $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_N\}$ siano incorrelate;
- se \mathbf{u} ha *PDF* Gaussiana, $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_N\}$ sono variabili stocastiche Gaussianhe indipendenti.

3.1.2 I PROCESSI STOCASTICI

Fin qui abbiamo considerato una variabile stocastica in un punto ben preciso dello spazio e in istante t ed abbiamo individuato due maniere alternative per descriverne le caratteristiche statistiche. Il primo metodo è costituito dalla definizione della funzione di densità di probabilità (o della sua cumulata) ed è decisamente potente per trattare i problemi dal punto di vista teorico. Il secondo metodo è costituito dalla definizione degli infiniti momenti. Anche se meno allettante teoricamente, è operativamente l'unico utilizzabile in pratica, soprattutto avendo a disposizione gli stimatori degli stessi che ci consentono di ottenerne una buona stima a partire dalle realizzazioni della variabile stocastica. Come abbiamo visto, i due metodi sono del tutto equivalenti. Avendo ipotizzato come ogni generica variabile meteorologica possa essere assimilata ad una variabile stocastica, di fatto abbiamo presentato gli strumenti statistici necessari alla sua caratterizzazione. Se ci riflettiamo, di fatto abbiamo cercato di descrivere statisticamente il processo di misura e la sua intrinseca aleatorietà e su questo argomento torneremo al Cap. 11.

Sempre considerando un ben preciso punto dello spazio ed un istante temporale, si è pure affrontato il problema della interdipendenza tra variabili differenti (tra le componenti cartesiane del vento, tra la componente verticale del vento e la temperatura, ecc.), interdipendenza che inevitabilmente deve esistere visto quanto ci hanno evidenziato le leggi della fluidodinamica cui tali variabili (stocastiche o meno) devono ubbidire. Si è giunti, anche in questo caso, ad una descrizione statistica basata sulle densità di probabilità congiunte e, in alternativa, sui momenti.

E' immediato osservare che non abbiamo fatto molta strada, comunque. Infatti tutta la trattazione è rimasta legata ad un ben preciso punto dello spazio-tempo, mentre la nostra aspirazione è quella di descrivere l'*evoluzione nello spazio e nel tempo* dei fenomeni atmosferici, cioè di descrivere statisticamente la stessa fenomenologia tratta dal modello fluidodinamico del Cap. 2. A questo punto abbandoneremo la descrizione puntuale e affronteremo dal punto di vista statistico la variabilità temporale di una o più variabili stocastiche congiunte.

3.1.2.1 I processi stocastici: concetti di base

Consideriamo una generica variabile stocastica X in un punto dello spazio (per esempio la temperatura dell'aria nei pressi del suolo) ed ipotizziamo di realizzare un esperimento ideale che registri una realizzazione di tale variabile in continuo ad ogni istante temporale da $-\infty$ a $+\infty$. In pratica, con questo esperimento misuriamo l'andamento nel tempo della variabile considerata. Il risultato di questo esperimento è un *segnale*, cioè una funzione $x_k(t)$, dove il pedice k sta ad indicare che il segnale ottenuto non è l'andamento nel tempo della variabile stocastica, ma una sua realizzazione. Di tale segnale non possiamo dire molto in generale, ma nel caso di una variabile meteorologica misurata nel *PBL* notiamo sperimentalmente che tale segnale è continuo, differenziabile, limitato ed altamente irregolare. Ciò che abbiamo ottenuta è *una delle possibili realizzazioni di una variabile stocastica che varia nel tempo*, cioè di un processo stocastico. Conducendo un'infinità di osservazioni nelle medesime condizioni otterremo, a priori, infinite realizzazioni non coincidenti che, complessivamente, costituiscono l'insieme di tutte le possibili realizzazioni del processo stocastico, realizzazioni che ora non sono più valori numerici, ma funzioni del tempo. Un esempio visivo di ciò è riportato in *Fig. 3.5*.

Come possiamo caratterizzare un processo stocastico? In pratica, un processo stocastico è una entità astratta che rappresenta una variabile in un punto di un sistema fisico e che, ad ogni istante, fornisce una realizzazione. Quindi un processo stocastico, campionato in un intervallo (finito o infinito) di tempo fornirà come realizzazione una funzione reale variabile nel tempo, estratta da un insieme costituito da tutte le possibili realizzazioni compatibili con quel processo e con quel punto del dominio di indagine.

Un primo metodo per la caratterizzazione di un processo stocastico, quello più naturale, si basa sulla probabilità che un processo stocastico produca come realizzazione un ben preciso *segnale*

(cioè una funzione del tempo). Consideriamo una sequenza temporale t_1, t_2, \dots, t_N consecutiva e crescente (questa sequenza sarà infinita e la distanza tra un istante e l'altro potrà essere piccola a piacere). L'esperimento ideale condotto associa ad ognuno di questi istanti un ben preciso valore di X , per esempio x_1, x_2, \dots, x_N . E' possibile definire una *funzione di densità di probabilità* di questa realizzazione nel modo seguente:

$$p_{t_1 t_2 \dots t_N}(x) \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_N \\ \equiv P[x_1 < x(t_1) < x_1 + dx_1; x_2 < x(t_2) < x_2 + dx_2; \dots x_N < x(t_N) < x_N + dx_N;] \quad [3.41]$$

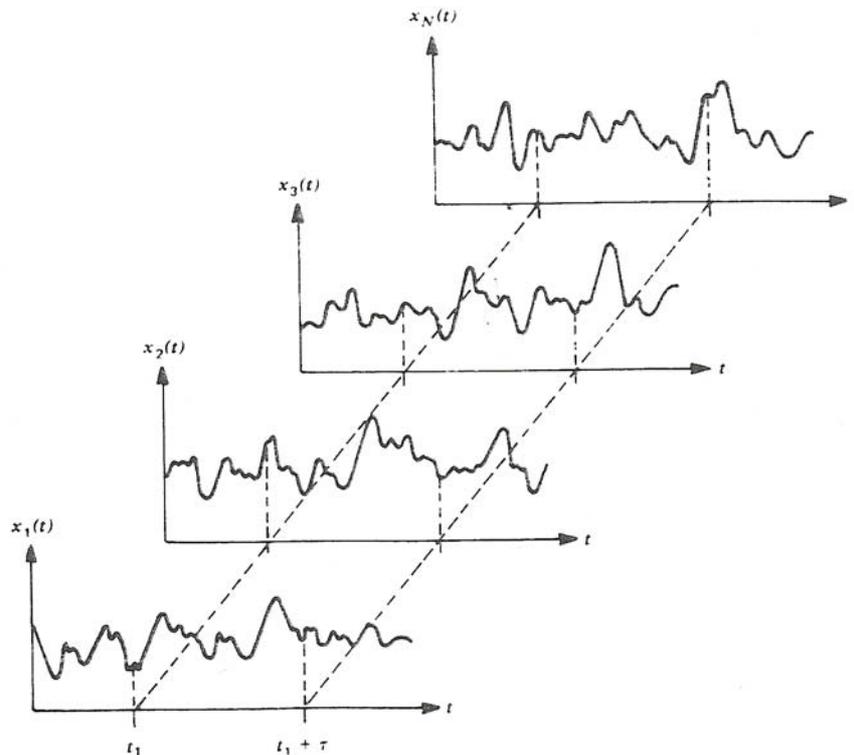


Fig. 3.5 Esempio di realizzazioni di un processo stocastico (Bendat e Persol, 1986)

Quindi la densità di probabilità è, grossolanamente, la probabilità che il processo X presenti al tempo t_1 una realizzazione compresa tra x_1 e $x_1 + dx_1$ e contemporaneamente al tempo t_2 una realizzazione compresa tra x_2 e $x_2 + dx_2$ e così via per tutti gli altri istanti (infiniti) della sequenza temporale, il tutto diviso per il prodotto dell'ampiezza di ciascun intervallo attorno a cui è permesso variare la singola realizzazione (infinitesimo). E' anche possibile definire la relativa cumulata. Si capisce subito che la definizione e la stima di questa pletora di densità di probabilità (e di densità subordinate, sia marginali che condizionate) è un'impresa disperata e ricorremo a questo metodo descrittivo solo quando ci saremo costretti. Si rimanda chi fosse interessato a maggiori dettagli sull'argomento a Monin e Yaglom (2007a). Comunque, l'esistenza della densità di probabilità congiunta (3.41) ci garantisce la possibilità di definire il valore atteso (valor medio) di un processo stocastico che, in pratica, è un ipotetico processo che, ad ogni istante, possiede un valore pari al valore atteso in quell'istante per il processo stesso. In pratica, se disponessimo di N realizzazioni di un processo stocastico, il suo valor medio potrebbe essere stimato come media aritmetica dei valori assunti dalle N realizzazioni in ogni istante considerato. L'esistenza delle densità congiunte garantisce, anche, la possibilità di definire correttamente i momenti che, in pratica, possono essere stimati dalle realizzazioni del processo impiegando, istante per istante, impiegando gli stimatori già introdotti.

Come nel caso di una variabile stocastica in un punto dello spazio-tempo, anche in questo caso

il metodo operativamente più percorribile è quello dei momenti. Consideriamo due processi stocastici $X(t)$ e $Y(t)$ (con questa notazione evidenziamo la variabilità temporale dei processi).

Valore atteso

La prima quantità statistica di interesse è il *valore atteso di ciascun processo* ad un certo istante t , dato come sempre da:

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[x(t)] \\ \mu_Y(t) &= E[y(t)]\end{aligned}\quad [3.42a]$$

e tali quantità, come detto, possono essere stimate in maniera non distorta, impiegando gli stimatori campionari operanti sui valori assunti dalle singole realizzazioni del processo ad ogni istante temporale. In generale, queste medie variano al variare dell'istante temporale considerato e quindi:

$$\begin{aligned}\mu_X(t_1) &\neq \mu_X(t_2) \\ \mu_Y(t_1) &\neq \mu_Y(t_2)\end{aligned}\quad [3.42b]$$

In sostanza, il valore atteso, pur essendo sempre una entità deterministica, non è più un valore ben preciso, bensì una funzione del tempo.

Funzioni di covarianza

Possiamo estendere e generalizzare il concetto di covarianza considerando due istanti temporali arbitrari $t_1 = t$ e $t_2 = t + \tau$. Si possono così definire le *funzioni di covarianza* seguenti:

$$\begin{aligned}C_{xx}(t, t + \tau) &= E[(x(t) - \mu_X(t)) \cdot (x(t + \tau) - \mu_X(t + \tau))] \\ C_{yy}(t, t + \tau) &= E[(y(t) - \mu_Y(t)) \cdot (y(t + \tau) - \mu_Y(t + \tau))] \\ C_{xy}(t, t + \tau) &= E[(x(t) - \mu_X(t)) \cdot (y(t + \tau) - \mu_Y(t + \tau))]\end{aligned}\quad [3.43]$$

La loro formulazione teorica implica la conoscenza della funzione di densità congiunta, tuttavia la loro stima non distorta può essere realizzata impiegando, istante per istante, lo stimatore per la covarianza introdotto in precedenza e che opera sulle realizzazioni del processo. In generale queste quantità saranno differenti per differenti combinazioni di t_1 e t_2 o, che è lo stesso, per differenti t e τ . In sostanza, le funzioni di covarianza sono funzioni a due variabili: la prima è l'istante di tempo considerato e la seconda è la distanza temporale considerata (*time lag*) τ .

Va subito notato che non c'è, a priori, alcuna ragione per affermare che C_{xy} sia uguale a C_{yx} . Oltre a ciò, se $\tau = 0$, si vede immediatamente come C_{xx} e C_{yy} altro non siano che la varianza delle due variabili stocastiche all'istante t e che C_{xy} (questa volta uguale a C_{yx}) è la covarianza a t come definita precedentemente.

La disuguaglianza di Schwarz

E' interessante applicare alle funzioni di covarianza la celebre disuguaglianza di Schwarz secondo cui, se si considerano due funzioni *quadraticamente integrabili* $f(x)$ e $g(x)$, vale la seguente disuguaglianza:

$$\int |f(x) \cdot g(x)| dx \leq \left(\int |f(x)| dx \cdot \int |g(x)| dx \right)^{1/2}\quad [3.44a]$$

Questa disuguaglianza, di validità molto generale, la applichiamo ora alla covarianza ed alle varianze di due variabili stocastiche X e Y considerate a due istanti temporali t_1 e $t_2 = t_1 + \tau$. Tali variabili hanno valori medi $\mu_x(t_1)$ e $\mu_y(t_2)$, varianze $\sigma_x^2(t_1)$ e $\sigma_y^2(t_2)$ e covarianza $C_{xy}(t_1, t_2)$. L'obiettivo è quello di stabilire una relazione tra la covarianza tra le due variabili e le relative varianze, allo scopo di iniziare ad esplorare la forma funzionale delle funzioni di covarianza che, a priori, potrebbe essere qualsiasi. In effetti, la disuguaglianza di Schwarz applicata a questo caso porta alla scrittura della relazione seguente:

$$|C_{xy}(t_1, t_2)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |(x - \mu_x) \cdot (\mu_y y)| \cdot p(x, y) \cdot dx \cdot dy \leq$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 \cdot p(x, y) \cdot dx \cdot dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y)^2 \cdot p(x, y) \cdot dx \cdot dy \right]^{1/2} = \sigma_x \sigma_y \quad [3.44b]$$

cioè:

$$|C_{xy}(t_1, t_2)| \leq \sigma_x(t_1) \cdot \sigma_y(t_2) \quad [3.44c]$$

Il risultato ottenuto è estremamente importante ed afferma che la funzione di covarianza, qualunque siano i tempi di osservazione, non può mai essere superiore al prodotto delle deviazioni standard delle variabili coinvolte, questo senza fare alcun tipo di ipotesi sulle distribuzioni cui obbediscono le variabili stesse.

Ulteriori considerazioni

Oltre a queste quantità che coinvolgono due istanti temporali, è possibile definire quantità analoghe relative a tre o più istanti, ovviamente con maggiori complicazioni formali. Oltre a ciò, è possibile anche definire momenti di ordine superiore, centrali o meno. Ciò consentirebbe di aumentare l'informazione attorno alla struttura stocastica delle variabili, tuttavia, come vedremo, quanto fin qui introdotto risulterà sufficiente per un'esauriente trattazione della turbolenza del *PBL*.

3.1.2.2 I processi stocastici stazionari: le funzioni di covarianza e di correlazione

Il *PBL* evolve nel tempo, come abbiamo visto al Cap. 1, e così evolvono anche le variabili che lo descrivono, tuttavia è bene soffermarci a fare alcune considerazioni su questa variabilità. Se, come esempio, consideriamo la temperatura dell'aria, è naturalmente vero che essa varia durante la giornata, ma se concentriamo la nostra attenzione notiamo che questa variazione la possiamo vedere come la sovrapposizione di due tipi differenti di variazioni: una variazione *lenta* giornaliera e stagionale che segue l'evoluzione della radiazione solare (il periodo e dell'ordine del giorno) cui si sovrappongono variazioni *rapide* ed apparentemente casuali che hanno periodi vari, comunque dell'ordine dei minuti o meno dovuti alla turbolenza. Se consideriamo una sola ora, le variazioni lente saranno impercettibili se confrontate con le variazioni casuali (caotiche) derivanti dalla turbolenza, per cui, alla scala dell'ora, possiamo semplificarci la vita ipotizzando che il processo stocastico che rappresenta la temperatura dell'aria in un punto sia di fatto non statisticamente variabile nel tempo, nel senso che se suddividiamo il segnale di temperatura campionato nell'ora in sottointervalli vediamo che le caratteristiche statistiche determinate nei vari sottointervalli restano pressoché costanti. Possiamo quindi considerare tale processo di fatto *statisticamente stazionario*.

Ciò ci autorizza a fissare l'attenzione sulla situazione del tutto generale in cui due processi stocastici X e Y presentino valori attesi indipendenti da t e covarianze che non dipendono da t ma solo da τ . Processi di questo tipo sono detti *debolmente stazionari* (*weakly stationary*). In pratica questa condizione è relativamente facile da dimostrare empiricamente. Se invece tutte le possibili distribuzioni di probabilità che coinvolgono le due variabili sono indipendenti da t , i due processi si dicono *fortemente stazionari* (*strongly stationary*). Dimostrare anche empiricamente che due processi sono fortemente stazionari è un'impresa ardua, ma, per fortuna, se i processi in questione sono Gaussiani, i due tipi di stazionarietà coincidono, visto che la distribuzione Gaussiana è caratterizzata completamente solo dai momenti fino al secondo ordine.

Al punto precedente sono state introdotte le *funzioni di covarianza* che, nel caso di processi stazionari (anche debolmente) non dipendono da t ma solo dal *time-lag* τ . Normalmente, dati due

processi stazionari $X(t)$ e $Y(t)$, si definisce propriamente funzione di covarianza (o cross-covarianza) la funzione:

$$C_{xy}(\tau) = E[(x(t) - \mu_X) \cdot (y(t + \tau) - \mu_Y)] \quad [3.45a]$$

mentre

$$\begin{aligned} C_{xx}(\tau) &= E[(x(t) - \mu_X(t)) \cdot (x(t + \tau) - \mu_X(t))] \\ C_{yy}(\tau) &= E[(y(t) - \mu_Y(t)) \cdot (y(t + \tau) - \mu_Y(t))] \end{aligned} \quad [3.45b]$$

sono le funzioni di autocovarianza. In sostanza, sono i momenti secondi centrali calcolati in corrispondenza di ogni *time-lag*. Dato che in micrometeorologia è consuetudine operare sulle *fluttuazioni*, rivestono un interesse particolare i momenti secondi normali che prendono nomi caratteristici. In particolare i momenti:

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= E[x(t) \cdot x(t + \tau)] \\ R_{yy}(\tau) &= E[y(t) \cdot y(t + \tau)] \end{aligned} \quad [3.46a]$$

prendono il nome di funzioni di auto-correlazione, mentre:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t) \cdot y(t + \tau)] \quad [3.46b]$$

prende il nome di funzione di cross-correlazione. Ovviamente le funzioni di covarianza coincidono con le funzioni di correlazione quando i due processi stocastici stazionari hanno entrambi media nulla, come nel caso in cui si considerano le fluttuazioni. Comunque, la normale parentela esistente tra loro è data dalle relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} C_{xx}(\tau) &= R_{xx}(\tau) - \mu_X^2 \\ C_{yy}(\tau) &= R_{yy}(\tau) - \mu_Y^2 \\ C_{xy}(\tau) &= R_{xy}(\tau) - \mu_X \mu_Y \end{aligned} \quad [3.46c]$$

Nel caso di processi (debolmente) stazionari si possono fare (e dimostrare) alcune osservazioni:

- dall'ipotesi di stazionarietà risulta che le funzioni di auto-correlazione R_{xx} e R_{yy} sono funzioni pari, cioè:

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau) \quad [3.46d]$$

- le funzioni di auto-correlazione sono funzioni definite e non negative e sono continue in τ se sono continue all'origine (lo si può dimostrare);
- la funzione di cross-correlazione sarà una funzione continua in τ se le auto-correlazioni corrispondenti sono continue all'origine (lo si può dimostrare). Inoltre la funzione di cross-correlazione non è né dispari né pari. Dato che i risultati sono invarianti rispetto ad una traslazione temporale, se si sostituisce t con $t + \tau$, si ha che:

$$R_{xy}(-\tau) = E[x(t) \cdot y(t - \tau)] = E[x(t + \tau) \cdot y(t)] = E[y(t) \cdot x(t + \tau)]$$

quindi

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau) \quad [3.46e]$$

L'introduzione delle funzioni di covarianza e di correlazione rappresenta un importante passo in avanti nella descrizione statistica del *PBL*. Una volta stabilito un insieme di processi stocastici (che, per esempio, rappresentano altrettante variabili meteorologiche), la conoscenza delle funzioni di covarianza e di auto-covarianza in un punto dello spazio e ad un ben preciso istante di tempo consente di definire in qualche modo quale può essere il valore atteso delle variabili negli istanti successivi o precedenti e la relativa correlazione. Se poi tali variabili sono stazionarie, le

funzioni di covarianza e di correlazione forniscono una sorta di *legge universale* su come il fenomeno fisico evolverà nel tempo.

Una volta definite le funzioni di correlazioni è importante stabilire delle relazioni tra auto-correlazioni e cross-correlazioni. La relazione principale che lega tra loro la funzione di cross-correlazione ad un dato *time-lag* con le funzioni di auto-correlazione a *time-lag* nullo è la seguente:

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_{xx}(0) \cdot R_{yy}(0) \quad [3.47a]$$

La dimostrazione di questa disuguaglianza è riportata nell'esercizio seguente.

Esercizio 3.7

Dimostrare la disuguaglianza (3.47).

A questa disuguaglianza si giunge considerando che, per ogni costante reale a e $b \neq 0$, si ha che:

$$E[(ax(t) + by(t + \tau))^2] \geq 0$$

visto che sono considerate solo variabili non negative. Sviluppando il quadrato entro l'operatore di valore atteso e dividendo per b^2 si ha:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 R_{xx}(0) + 2\left(\frac{a}{b}\right) R_{xy}(\tau) + R_{yy}(0) \geq 0$$

Perché tale disequazione quadratica in (a/b) sia soddisfatta per ogni valore reale è necessario che il discriminante dell'equazione associata sia non positivo, cosa che comporta:

$$4R_{xy}^2(\tau) - 4R_{xx}(0) \cdot R_{yy}(0) \leq 0$$

da cui si ottiene la (3.47a).

Esercizio 3.8

Determinare la funzione di autocorrelazione della combinazione lineare di due variabili stocastiche.

Siano X e Y due variabili stocastiche e sia Z un'altra variabile stocastica combinazione lineare delle due precedenti con realizzazione:

$$z = ax(t) + by(t)$$

Si vede immediatamente sviluppando i conti che:

$$R_{zz}(\tau) = a^2 R_{xx}(\tau) + b^2 R_{yy}(\tau) + ab \cdot [R_{xx}(\tau) + R_{yy}(\tau)]$$

Se si preferisce ragionare con le funzioni di covarianza, l'analogia disequazione è così formulata:

$$|C_{xy}(\tau)|^2 \leq C_{xx}(0) \cdot C_{yy}(0) \quad [3.47b]$$

Partendo da quest'ultima disequazione, scomoda perché dimensionale, risulta immediato definire la *funzione di cross-correlazione normalizzata* (una generalizzazione del coefficiente di correlazione già incontrato) che è completamente adimensionale ed è data dalla relazione seguente:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{C_{xx}(0) \cdot C_{yy}(0)} = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad [3.48a]$$

Dalla (3.47b) si vede immediatamente come $\rho_{xy}(\tau)$ possa variare tra -1 (perfetta correlazione negativa) a +1 (perfetta correlazione positiva). Nel caso in cui i due processi stocastici abbiano media nulla, la (3.48a) diventa:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad [3.48b]$$

La funzione di cross-correlazione normalizzata misura il grado di dipendenza lineare tra un processo stocastico $X(t)$ al tempo t ed un processo stocastico $Y(t)$ dopo un *time-lag* τ .

Le evidenze sperimentali, sia in laboratorio che in campo, mostrano che le funzioni di correlazione normalizzata o meno relative alle fluttuazioni delle variabili meteorologiche nel *PBL* presentano un andamento caratteristico (Monin e Yaglom 2007a). In effetti, se si prende a riferimento la funzione di auto-correlazione normalizzata $\rho(\tau)$ delle fluttuazioni di una generica variabile si nota come essa presenti il massimo per *time-lag* nullo (dove vale 1), mentre tende a zero rapidamente col tendere all'infinito di $|\tau|$. Questo fatto definisce un'importante proprietà delle funzioni di correlazione (auto o cross, normalizzate o meno) che le ordinarie funzioni di correlazione, generalmente parlando, non possiedono. Basandoci su tale proprietà, è immediato verificare l'esistenza dell'integrale della funzione di auto-correlazione normalizzata rispetto al *time-lag* per valori di quest'ultimo da 0 all'infinito. Pertanto la grandezza T_{xx} definita come:

$$T_{xx} = \int_0^{\infty} \rho_{xx}(\tau) \cdot d\tau \quad [3.49]$$

che ha le dimensioni di un tempo, è chiamato *tempo caratteristico integrale di scala* e rappresenta l'intervallo di tempo per cui il processo stocastico $X(t)$ perde la correlazione con il valore posseduto all'istante iniziale. Ovviamente, è possibile definire tempi caratteristici di scala per tutte le variabili meteorologiche ed anche per combinazioni delle stesse.

3.1.2.3 I processi stocastici stazionari ergodici

Consideriamo ora *due processi debolmente stazionari* $X(t)$ e $Y(t)$. Questi processi stocastici si dicono *debolmente ergodici* se i valori medi e le covarianze (come definite al punto precedente) possono essere calcolate sostituendo all'operatore valore atteso l'operatore media temporale ed operando su una coppia qualsiasi di realizzazioni $x(t)$ e $y(t)$ dei due processi. In questo modo, la struttura statistica dei due processi può essere determinata molto facilmente da una coppia di realizzazioni senza dover raccogliere ulteriori informazioni. Se le variabili meteorologiche fossero ergodiche, potremmo conoscere la loro struttura statistica semplicemente raccogliendo le misure nel tempo, che poi è l'unica cosa che è possibile fare in pratica.

Definizioni

Per essere più precisi, considerando le due realizzazioni $x_k(t)$ e $y_k(t)$ dei processi $X(t)$ e $Y(t)$, la conseguenza della loro stazionarietà è che il valore atteso è sostituito dalla media temporale realizzata su un intervallo di tempo che parte da zero e si estenda ad un tempo T grande a piacere:

$$\begin{aligned} \mu_x(k) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) \cdot dt \\ \mu_y(k) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y_k(t) \cdot dt \end{aligned} \quad [3.50a]$$

Si osservi che i valori medi non dipendono dal tempo, visto che i due processi considerati sono

stazionari, ma, in generale, possono dipendere dalle particolari realizzazioni considerate ed è per questo che hanno il pedice k che indica la realizzazione k -esima. In modo analogo si può operare con le cross-covarianze e con le cross-correlazioni, definite dalle espressioni:

$$\begin{aligned} C_{xy}(\tau, k) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x_k(t) - \mu_x(k)] \cdot [y_k(t + \tau) - \mu_y(k)] \cdot dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) \cdot y_k(t + \tau) \cdot dt - \mu_x(k) \cdot \mu_y(k) = R_{xy}(\tau, k) - \mu_x(k) \cdot \mu_y(k) \end{aligned} \quad [3.50b]$$

In modo simile, sono definite le funzioni di auto-covarianza e di autocorrelazione:

$$\begin{aligned} C_{xx}(\tau, k) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x_k(t) - \mu_x(k)] \cdot [x_k(t + \tau) - \mu_x(k)] \cdot dt = \\ &= R_{xx}(\tau, k) - \mu_x^2(k) \end{aligned} \quad [3.50c]$$

$$\begin{aligned} C_{yy}(\tau, k) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [y_k(t) - \mu_y(k)] \cdot [y_k(t + \tau) - \mu_y(k)] \cdot dt = \\ &= R_{yy}(\tau, k) - \mu_y^2(k) \end{aligned} \quad [3.50d]$$

Questi risultati evidenziano che, almeno in termini di principio, questi momenti dipendono dalla particolare coppia di realizzazioni considerate. *Se, invece, si ha per che qualunque coppia di realizzazioni considerate vale:*

$$\begin{aligned} \mu_x(k) &= \mu_x \\ \mu_y(k) &= \mu_y \\ C_{xx}(k) &= C_{xx} \\ C_{yy}(k) &= C_{yy} \\ C_{xy}(k) &= C_{xy} \end{aligned} \quad [3.51]$$

cioè se i momenti statistici non dipendono dalla particolare realizzazione considerata, i due processi sono *debolmente ergodici*. Se poi ciò accade per tutti i momenti, allora i due processi sono detti *fortemente ergodici*. Processi fortemente ergodici sono anche debolmente ergodici, ma non è vero in generale il viceversa, tranne nel caso in cui i due processi siano gaussiani.

Per due processi generici ergodici (e stazionari), le funzioni di auto-correlazione (e anche quelle di auto-covarianza) dipendono esclusivamente dal *time-lag* e sono definite come:

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t + \tau) \cdot dt \\ R_{yy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \cdot y(t + \tau) \cdot dt \\ R_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot y(t + \tau) \cdot dt \end{aligned} \quad [3.52]$$

E' immediato, poi, ottenere le espressioni per le funzioni di correlazione normalizzata.

Non è possibile, in generale, dire alcunché su quale sia la forma funzionale delle funzioni di correlazione normalizzata o meno. Come già anticipato, nel caso delle variabili che descrivono la turbolenza atmosferica, tuttavia, ciò che si vede dalle misure è che la funzione di auto-correlazione normalizzata presenta un andamento tipico: ha un valore unitario a *time-lag* nullo e

diminuisce in modo pressoché esponenziale con l'aumentare dello stesso. Come esempio, si considerino le tre componenti del vento rilevate presso il suolo durante una tipica situazione convettiva. In Fig. 3.6 è graficata la funzione di auto-correlazione sia delle componenti *streamline* (u) che della componente trasversale (v) del vento.

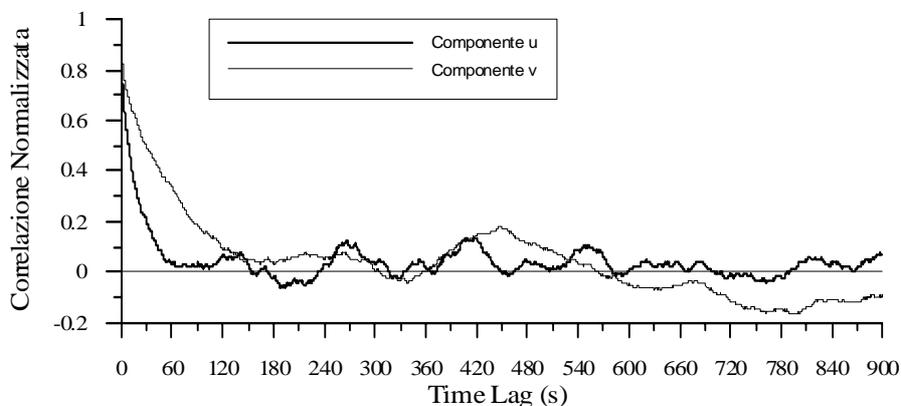


Fig. 3.6: funzione di autocorrelazione normalizzata delle componenti streamline e trasversale del vento misurato presso la superficie in condizioni convettive

Si vede immediatamente come l'andamento delle due auto-correlazioni presenti la tipica rapida diminuzione, solo che la *velocità* di questa diminuzione è notevolmente differente per le due componenti. Se poi, per completare il quadro, consideriamo anche la componente verticale del vento, otteniamo quanto riportato in Fig. 3.7 che presenta un andamento analogo, ma con una rapidità di diminuzione di molto superiore.

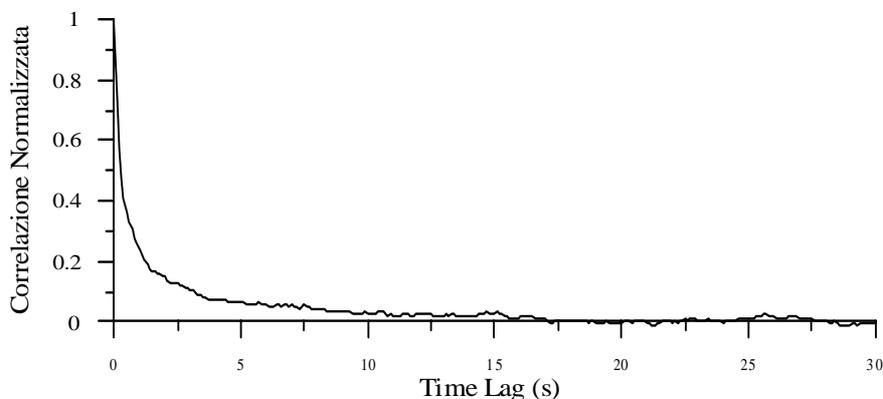


Fig. 3.7: funzione di autocorrelazione normalizzata delle componenti verticale del vento misurato presso la superficie in condizioni convettive

Se un processo $X(t)$ presenta un andamento della funzione di auto-correlazione come quello illustrato nelle figure precedenti significa che tale processo *perde* progressivamente *memoria di sé stesso* durante l'evoluzione nel tempo. In generale questa diminuzione è sufficientemente rapida che l'integrale della funzione di auto-correlazione normalizzata:

$$T_x = \int_0^{\infty} \rho_{xx}(\tau) \cdot d\tau \quad [3.53a]$$

converge ad un tempo caratteristico T_x detto *scala integrale temporale* (*integral timescale*) che rappresenta l'intervallo di tempo necessario al processo per perdere memoria del proprio stato iniziale. Tutte e tre le componenti del vento, da quanto visto nelle figure, perdono memoria del proprio stato molto rapidamente e la rapidità con cui ciò avviene è data dai rispettivi tempi di

scala. Non sarà sfuggito il fatto che gli andamenti delle funzioni di auto-correlazione, riportati nelle figure, presentano alcune particolarità: presentano il tipico andamento decrescente, approssimativamente esponenziale, per *time-lag* abbastanza bassi, mentre a *time-lag* sufficientemente elevati presentano oscillazioni attorno allo zero. Ed è proprio questo comportamento oscillatorio che rende critico il calcolo dell'integrale della (3.53a). Se si considera la componente verticale (Fig.3.7) queste oscillazioni sono di piccola entità, probabilmente associate agli inevitabili rumori dovuti alla misura che contaminano il segnale. Per quanto riguarda, invece, le componenti orizzontali (Fig. 3.6), si nota come le oscillazioni attorno allo zero siano inferiori per la componente stream-line piuttosto che per la componente trasversale. Quale sia la natura di tali oscillazioni non è completamente chiaro; ad esse contribuiscono i rumori derivanti dalla misura, ma anche fenomeni meteorologici differenti, non necessariamente legati alla turbolenza. Nelle considerazioni pratiche e quando si studia la turbolenza si ignorano i *time-lag* lunghi (e le oscillazioni relative) e si approssima la funzione di auto-correlazione con un'esponenziale del tipo:

$$\rho_{xx}(\tau) = \exp[-\tau/T_x] \quad [3.53b]$$

il cui integrale è appunto T_x . In questo caso (Kaimal e Finnigan, 1994) è semplice individuare T_x da una funzione di autocorrelazione ottenuta da misure atmosferiche, anche se contaminate dalle oscillazioni a lunghi *time-lag*: basta individuare per quale *time-lag* si ha che: $\rho_{xx} = 1/e \approx 0.37$. Nei casi riportati nelle due figure precedenti, si ha che $T_{uu} = 14$ s, $T_{vv} = 52$ s e $T_{ww} = 0.5$ s. Quindi è la componente trasversale del vento a perdere meno rapidamente la memoria e ciò lo si può notare nelle oscillazioni orizzontali dei pennacchi di fumo (*meandering*) visibili durante condizioni convettive.

Stima campionaria

In pratica, la determinazione dei momenti caratteristici di un processo ergodico viene realizzata impiegando gli stimatori campionari descritti in precedenza su una singola realizzazione del processo. In particolare esistono due possibilità distinte di stima campionaria: una possibilità continua ed una discreta.

Nel primo caso si ipotizzi di essere in grado di campionare *in maniera continua* processi stocastici con realizzazioni $x(t)$ ed $y(t)$ da un istante iniziale al tempo T . Questa modalità è stata la più utilizzata in passato quando, durante le campagne sperimentali micrometeorologiche, i segnali elettrici analogici prodotti dai sensori venivano direttamente registrati su nastro magnetico. In questo caso, la stima campionaria per i valori medi è data, ovviamente, da:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot dt \\ \mu_y &= \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \cdot dt \end{aligned} \quad [3.54a]$$

mentre la stima per la covarianza è data da:

$$\overline{xy} = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu_x] \cdot [y(t) - \mu_y] \cdot dt \quad [3.54b]$$

da cui è facile ottenere lo stimatore per le varianze. Gli integrali presenti in queste relazioni venivano spesso ottenuti in maniera *Hardware* utilizzando appositi circuiti elettrici. La funzioni di cross-covarianza a vari *time lag* (positivi) si ottengono poi dallo stimatore seguente:

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - \mu_x] \cdot [y(t+\tau) - \mu_y] \cdot dt \quad [3.54c]$$

da cui è immediato ricavare lo stimatore per le funzioni di auto-covarianza. Infine, lo stimatore

per la funzione di cross-correlazione (da cui è immediato ottenere l'analogo stimatore per le auto-correlazioni) è il seguente:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^T x(t) \cdot y(t+\tau) \cdot dt \quad [3.54d]$$

Nei moderni apparati di misura è raro disporre di campionamenti continui; infatti, come vedremo al Cap. 11, nella maggior parte dei casi si ha a che fare con un *campionamento discreto*. Ciò significa che nell'intervallo di osservazione, che parte da un certo istante iniziale 0 e termina al tempo T , le realizzazioni $x(t)$ e $y(t)$ vengono campionate ad N istanti discreti $0, t_1, t_2, \dots, t_N$ fornendo in corrispondenza ad ogni istante t_i le coppie di valori (x_i, y_i) . In generale gli istanti sono equispaziati ($t_i - t_{i-1} = \Delta t$) e $t_N = N\Delta t = T$. In questo caso la stima campionaria dei valori medi è:

$$\mu_X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \mu_Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad [3.55a]$$

mentre la stima campionaria della covarianza (da cui si deduce immediatamente quella delle varianze) è:

$$\overline{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X) \cdot (y_i - \mu_Y) \quad [3.55b]$$

Per il calcolo delle funzioni di covarianza e di correlazione vanno fatte alcune osservazioni. In primo luogo il *time-lag* non potrà essere qualsiasi, ma dovrà valere solo multipli interi di Δt . Quindi il generico *time-lag* non potrà che essere $\tau = n \cdot \Delta t$, dove il numero intero n sarà non negativo ed inferiore ad N . Premesso ciò, lo stimatore della funzione di cross-covarianza, nell'ipotesi in cui la numerosità del campione sia molto elevata, è il seguente:

$$C_{xy}(n\Delta t) = \frac{1}{N-n} \sum_{i=1}^{N-n} (x_i - \mu_X) \cdot (y_{i+n} - \mu_Y) \quad [3.55c]$$

E' immediato ottenere gli analoghi stimatori per le funzioni di auto-covarianza e di correlazione.

Per quanto riguarda la funzione di auto-correlazione normalizzata, è bene fare alcune osservazioni. Questa funzione ha interesse pratico in micrometeorologia solo se le variabili considerate sono le fluttuazioni attorno al valor medio. Tuttavia, ciò che di fatto si misura sono le variabili e non le fluttuazioni, pertanto, data una variabile A che agli istanti di campionamento $t_k = k \cdot \Delta t$ presenta realizzazioni $A_k, k = 1, 2, \dots, N$, lo stimatore adottato per la funzione di auto-correlazione normalizzata è (Stull, 1989):

$$\rho_{AA}(n\Delta t) = \frac{\sum_{k=1}^{N-n} [(A_k - \overline{A_k}) \cdot (A_{k+n} - \overline{A_{k+n}})]}{\left[\sum_{k=1}^{N-n} (A_k - \overline{A_k})^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{N-n} (A_{k+n} - \overline{A_{k+n}})^2 \right]^{1/2}} \quad [3.56a]$$

Come si nota, in questa relazione vengono usate due medie corrispondenti alla porzione considerata di serie storica, definite come:

$$\overline{A_k} = \frac{1}{N-n} \sum_{k=1}^{N-n} A_k \quad \overline{A_{k+n}} = \frac{1}{N-n} \sum_{k=1}^{N-n} A_{k+n}$$

Se la serie storica è sufficientemente stazionaria, i *time-lag* piccoli ed N elevato, la relazione precedente può essere approssimata come:

$$\rho_{AA}(n\Delta t) = \frac{\sum_{k=1}^{N-n} [(A_k - \bar{A}) \cdot (A_{k+n} - \bar{A})]}{\sigma_A^2} \quad [3.56b]$$

Una ulteriore osservazione da fare riguarda il fatto che l'accuratezza di questo stimatore dipende dal *time lag*. Infatti, maggiore è il *time-lag*, minore è il numero di campioni che concorrono alla stima diminuendone inevitabilmente l'accuratezza. Come osservato da Stull (1989), perché sia possibile garantire una ragionevole accuratezza di stima è necessario che $n \leq N/2$. Considerazioni del tutto analoghe possono essere fatte per le funzioni di cross-correlazione.

Da ultimo, è importante introdurre un ulteriore indicatore statistico noto come *funzione di struttura* e formalmente molto simile alla covarianza. Tale parametro è molto utilizzato, soprattutto nell'analisi spaziale e spettrale. Mentre la funzione di covarianza considera il prodotto delle fluttuazioni di una variabile ad un dato *time-lag*, la funzione di struttura considera le differenze tra i valori di una variabile ad un dato *time-lag*. Se consideriamo un processo stocastico A con N realizzazioni A_k agli istanti $t_k, k = 1, 2, \dots, N$, la funzione di struttura viene definita come:

$$D_{AA}(n\Delta t) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=1}^{N-n} [A_k - A_{k+n}]^2 \quad [3.57]$$

Dato che tale indicatore considera le differenze tra due valori della stessa variabile, le sue dimensioni sono quelle della varianza della variabile considerata. Se si considerano gli stessi dati usati per ottenere le *Figg. 3.6 e 3.7*, la stima delle funzioni di struttura per le tre componenti del vento in condizioni di convettività sono quelle riportate in *Fig. 3.8*.

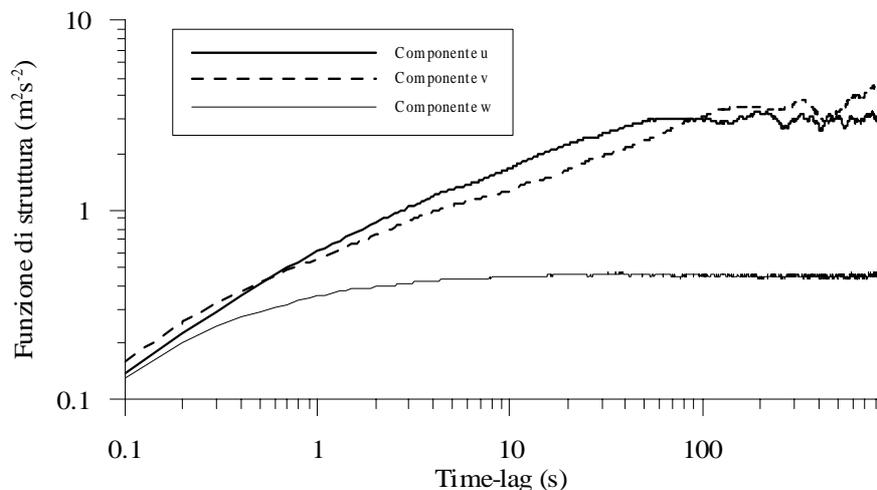


Fig. 3.8: funzione di struttura delle componenti verticale del vento misurato presso la superficie in condizioni convettive (stessi dati delle Figg. 3.6 e 3.7)

Come si nota l'andamento è simile per le tre componenti del vento: dopo una crescita sostanzialmente descritta da una legge di potenza (lineare in un diagramma *log-log*), le funzioni di struttura tendono a livellarsi. Come si vedrà successivamente, è proprio la prima fase di crescita della funzione di struttura che fornirà le informazioni più importanti.

Il Teorema dell'ergodicità

Concludiamo la discussione sui processi stocastici con alcune considerazioni di natura teorica relative all'ergodicità. Il materiale presentato è stato tratto da Monin e Yaglom (2007a).

Consideriamo un generico processo stocastico stazionario ed ergodico ed una sua realizzazione $u(t)$. Per l'ergodicità del processo, la media temporale u_T realizzata su un intervallo di mediazio-

ne $T \rightarrow \infty$:

$$u_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cdot dt \quad [3.58a]$$

convergerà alla media d'insieme U , cioè:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \overline{|u_T - U|^2} = 0 \quad [3.58b]$$

Dalla disuguaglianza di Chebyshev:

$$P\{|u_T - U| > \varepsilon\} \leq \frac{\overline{|u_T - U|^2}}{\varepsilon^2} \quad [3.58c]$$

e quindi:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P\{|u_T - U| > \varepsilon\} = 0 \quad [3.58d]$$

cioè la probabilità che la deviazione di u_T da U ecceda un dato valore ε piccolo a piacere tenderà a zero col tendere all'infinito del tempo di mediazione T . Questo ragionamento è vero quando il processo è ergodico, ma c'è un modo comodo per accorgermi che un processo è ergodico, cioè che vale la (3.58b)?

A ciò risponde il *teorema dell'ergodicità* secondo cui: *perché sia soddisfatta la (3.58b), cioè perché il processo sia ergodico, è necessario e sufficiente che la funzione di auto-covarianza $C_{uu}(\tau)$, o di autocorrelazione se il processo è a media nulla, soddisfi la condizione seguente:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T C_{uu}(\tau) \cdot d\tau = 0 \quad [3.59a]$$

La dimostrazione di questo teorema si trova in Monin e Yaglom (2007a, pag. 254). Come detto, sperimentalmente si è visto che le funzioni di auto-covarianza delle variabili del *PBL* di fatto presentano questa caratteristica.

Se il tasso di diminuzione di $C_{uu}(\tau)$ al crescere di τ è tale che:

$$\int_0^{\infty} C_{uu}(\tau) \cdot d\tau < \infty \quad [3.59b]$$

allora esiste anche una semplice stima del periodo di mediazione T necessario perché la media temporale rappresenti con sufficiente accuratezza la media d'insieme U . Si può infatti mostrare che per T sufficientemente elevati, vale la relazione asintotica:

$$\overline{|u_T - U|^2} \approx 2 \frac{T_{uu}}{T} C_{uu}(0) \quad [3.60]$$

dove T_{uu} è il tempo caratteristico di scala. Così, per poter determinare in maniera accurata il valor medio di un processo ergodico a partire da una realizzazione del processo stesso è solo necessario usare un tempo di mediazione T che sia molto maggiore del corrispondente tempo integrale di scala caratteristico del processo in esame. Se consideriamo come esempio un vento longitudinale osservato in un tempo di mediazione di 1800 s, caratterizzato da una media temporale di 2 ms^{-1} , da una varianza di 0.6 ms^{-1} e da un tempo integrale di scala di 15 s, la differenza media percentuale tra media temporale e media d'insieme risulta essere dell'ordine del 5 %.

3.1.2.3 Le derivate dei processi stocastici

E' possibile rispondere a domande del tipo: i processi stocastici che caratterizzano il *PBL* sono processi continui? Sono anche derivabili? Queste domande sono decisamente serie e nascondono sottili complicazioni formali, che eviteremo.

Partiamo pragmaticamente dall'evidenza che ogni realizzazione di un processo stocastico che riusciamo ad ottenere misurando (e quindi campionando) nel *PBL* ci appare decisamente continua e, per come la riusciamo ad osservare con i mezzi di indagine disponibili, non abbiamo elementi per dire che non sia derivabile. Ammettiamo quindi che, dato un processo stocastico $X(t)$, ogni sua realizzazione $x(t)$ ammetta la consueta derivata prima e derivata seconda che indicheremo con il solito simbolismo matematico e che è definita come:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} \right] \quad [3.61a]$$

Se poi si ha che:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E \left[\left| \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} - \dot{x} \right|^2 \right] = 0 \quad [3.61b]$$

(convergenza in termini quadratici medi), allora il processo $X(t)$ possiede una derivata. Si può poi dimostrare che tale derivata esiste se esiste la derivata fino al secondo ordine della funzione di auto-correlazione $R_{xx}(\tau)$.

Armati dello strumento analitico della derivazione di processo stocastico, facciamo ora alcune ulteriori considerazioni sulle funzioni di correlazione allo scopo di individuare, se possibile, alcune loro caratteristiche analitiche, in particolare quando il *time-lag* è nullo.

Consideriamo inizialmente la derivata prima della funzione di auto-correlazione $R_{xx}(\tau)$. Per definizione si ha che:

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= E[x(t) \cdot x(t+\tau)] = E[x(t-\tau) \cdot x(t)] \\ R_{xx}(\tau) &= E \left[x(t) \cdot \dot{x}(t+\tau) \right] = E \left[\dot{x}(t-\tau) \cdot x(t) \right] \\ R_{xx}(\tau) &= E \left[\dot{x}(t) \cdot \dot{x}(t+\tau) \right] = E \left[\dot{x}(t-\tau) \cdot \dot{x}(t) \right] \end{aligned} \quad [3.62a]$$

Ora, visto che l'operatore derivata commuta con la media, possiamo fare le osservazioni seguenti:

$$\frac{dR_{xx}(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} E[x(t) \cdot x(t+\tau)] = E \left[\dot{x}(t) \cdot x(t+\tau) \right] = R_{xx}(\tau) \quad [3.62b]$$

$$\frac{dR_{xx}(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} E[x(t-\tau) \cdot x(t)] = -E \left[\dot{x}(t-\tau) \cdot x(t) \right] = -R_{xx}(\tau) \quad [3.62c]$$

Queste relazioni valgono in generale. Quando, però, il *time-lag* è nullo, esse ci portano a dire che:

$$\frac{dR_{xx}(0)}{d\tau} = R_{xx}(0) = -R_{xx}(0) = 0 \quad [3.62d]$$

Quello ottenuto è un risultato di assoluto rilievo: in effetti, pur non conoscendo alcunché della forma analitica della funzione di auto-correlazione di un generico processo stocastico (stazionario ed ergodico), ipotizzando solamente la sua derivabilità (che, per i segnali meteorologici, non

è smentita dalle misure), si può dire che a $\tau = 0$ la sua funzione di auto-correlazione presenta un *estremo* (massimo o minimo o flesso orizzontale). Si può, poi, dimostrare che la derivata prima di $R_{xx}(\tau)$ è una funzione dispari. Inoltre, il fatto (indicato dalla (3.62c) che a *time-lag* nullo la funzione di correlazione tra il segnale e la sua derivata prima sia nullo comporta che il segnale e la sua derivata prima siano anche incorrelati tra loro.

Consideriamo, ora la derivata seconda della funzione di autocorrelazione. Non è difficile seguire con pazienza i passaggi seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_{xx}(\tau)}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \cdot \frac{dR_{xx}(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} R_{xx}(\tau) = \frac{d}{d\tau} E \left[x(t-\tau) \cdot \dot{x}(t) \right] = \\ &= -E \left[\dot{x}(t-\tau) \cdot x(t) \right] = -R_{xx}(\tau) \end{aligned} \quad [3.63a]$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_{xx}(\tau)}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \cdot \frac{dR_{xx}(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} R_{xx}(\tau) = \frac{d}{d\tau} E \left[x(t) \cdot \dot{x}(t+\tau) \right] = \\ &= E \left[\dot{x}(t) \cdot x(t+\tau) \right] = R_{xx}(\tau) \end{aligned}$$

Questi passaggi coinvolgono sia il segnale che la sua derivata prima e seconda (che ipotizziamo esistere e questa ipotesi è un po' più difficile da confermare sperimentalmente). A $\tau = 0$ le relazioni precedenti suggeriscono che:

$$E \left[\left(\dot{x} \right)^2 \right] = R_{xx}(\dot{x})(0) = -R_{xx}(\dot{x})(0) = -\frac{d^2 R_{xx}(0)}{d\tau^2} \quad [3.63b]$$

E' opportuno soffermarci sul risultato ottenuto

- a $\tau = 0$ la derivata seconda della funzione di auto-correlazione è negativa, visto che essa risulta pari a meno il valor medio del quadrato della derivata del segnale che, se esiste, non può che essere positiva;
- ma, a questo punto sappiamo che a $\tau = 0$ la derivata prima della funzione di auto-correlazione è nulla e la sua derivata seconda è negativa, quindi la funzione di autocorrelazione presenta il valore massimo a $\tau = 0$;
- si può dimostrare facilmente che la derivata seconda della funzione di auto-correlazione è una funzione pari.

3.1.3 I CAMPI STOCASTICI

Ricordando quanto visto al Cap.2, il *PBL* è una porzione di troposfera completamente caratterizzato da un insieme di variabili macroscopiche: le tre componenti cartesiane della velocità del fluido (il vento), la temperatura, la pressione, la densità, il contenuto d'acqua liquida, solida e vapore. Tutte queste grandezze evolvono nel tempo e nello spazio mostrando spiccate irregolarità, apparentemente casuali, sovrapposte ad andamenti decisamente più regolari. Queste constatazioni derivanti dall'osservazione dei fenomeni ci ha indotti, per comodità, ad adottare per la loro descrizione un modello statistico. In sostanza esse vengono descritte come *variabili stocastiche* quando vengono osservate isolatamente o in gruppi in un punto dello spazio e in un istante ben preciso e come *processi stocastici* quando ne viene osservato l'andamento temporale. Tuttavia, quando queste grandezze vengono studiate nell'intero dominio di osservazione, ognu-

na di esse è un campo, cioè una distribuzione continua nello spazio e nel tempo, campo caratterizzato da un evidente carattere stocastico (*campo stocastico*) ma che deve rispettare le leggi della fluidodinamica di cui si è trattato al Cap.2.

La caratterizzazione dei campi stocastici è un'ovvia estensione di quanto fin qui presentato per le variabili ed i processi stocastici, anche se è inevitabile che le complicazioni formali crescano in maniera proibitiva. Nonostante ciò, si cercherà di esporre i concetti fondamentali nella maniera più semplice possibile.

Prima, però, di iniziare la trattazione è opportuno premettere una constatazione *filosofica* che sarà molto utile nel seguito. Una variabile stocastica è un'entità astratta che, se *interrogata* (mediante un processo di campionamento, l'astrazione di una misura puntuale ed occasionale), fornisce una *risposta* sotto la forma di una sua *realizzazione*. La variabile stocastica, quindi, rappresenta una visione puntuale (nello spazio e nel tempo) di un fenomeno, isolandolo dal contesto. Se poi si fa evolvere il concetto di variabile stocastica a *processo stocastico*, aumentiamo di un grado di libertà la nostra visione del fenomeno, introducendo il *tempo* come variabile indipendente. La nostra visione del fenomeno migliora perché, pur rimanendo ancorati ad un punto dello spazio, possiamo studiare statisticamente l'evoluzione del fenomeno nel tempo ed anche l'evoluzione congiunta di variabili meteorologiche differenti che localmente interagiscono nella loro evoluzione. L'elemento essenziale presente nella descrizione dei processi stocastici è quindi il *tempo*. Quando, infine, il concetto astratto di variabile stocastica evolve nel senso di considerare quanto succede in ogni punto del dominio di studio, si giunge al concetto di *campo stocastico* nella cui descrizione, come vedremo, è essenziale la variabile indipendente (vettoriale) *spazio*. Quindi lo spazio è l'elemento principale che caratterizza la descrizione dei campi stocastici, anche se è evidente che la variabilità spaziale è sempre accompagnata da una variabilità temporale che comunque si cercherà di descrivere. Queste osservazioni saranno importanti per comprendere come, nell'analisi nel dominio delle frequenze, quando vengono trattati i processi stocastici ci si riferisce sempre ad un'analisi che cerca di individuare armoniche temporali soggiacenti al segnale, mentre quando tale analisi viene applicata ai campi stocastici, le armoniche di interesse sono quelle spaziali. Ovviamente ci deve essere un legame tra le due visioni, anche perché se in un laboratorio di fluidodinamica è tecnicamente indifferente misurare nello spazio e/o nel tempo con accuratezza, quando si deve studiare la turbolenza nel *PBL* è inevitabile privilegiare misure protratte nel tempo ma localizzate in pochi punti dello spazio, visto che ad oggi le metodologie per misurare (campionare, quindi) un campo sono estremamente limitate, costose e di notevole complessità logistica.

Premesso ciò, per semplicità espositiva si farà riferimento nel seguito al solo campo di moto, caratterizzato dal vettore stocastico velocità $\mathbf{U}(\mathbf{x},t)$. Tale vettore stocastico altro non è che l'insieme di ∞^3 processi stocastici vettoriali (tanti quanti sono i punti \mathbf{x} , vettore posizione, di un dominio spaziale di interesse) le cui componenti (anch'esse processi stocastici) sono le tre componenti cartesiane $U_i(t)$ $i = 1,2,3$ del vettore velocità. Ricordiamo che il campo stocastico e le sue componenti sono un'entità astratta che, una volta campionata, fornisce una realizzazione che indicheremo col simbolo \mathbf{V} .

3.1.3.1 Le statistiche one-point

Si consideri un punto \mathbf{x} dello spazio ed un generico istante t . In questo caso ci si è ricondotti a considerare una variabile stocastica o meglio, nel caso del campo vettoriale di moto, l'insieme di tre variabili stocastiche scalari congiunte (le tre componenti). Formalmente è immediato definire una probabilità cumulata congiunta *monopunto* (*one-point*) per il campo $\mathbf{U}(\mathbf{x},t)$. Infatti essa è definita come la probabilità che in quel punto specifico dello spazio e a quell'istante le realizzazioni V_i delle tre componenti della velocità siano contemporaneamente inferiori a valori specifici dati v_i ($i = 1,2,3$), cioè:

$$F(\mathbf{v}; \mathbf{x}, t) = P\{V_i(\mathbf{x}, t) < v_i, i = 1,2,3\} \quad [3.64a]$$

e quindi, nell'ipotesi di completa differenziabilità della funzione F , la densità di probabilità congiunta può essere sinteticamente definita come:

$$p(\mathbf{v}; \mathbf{x}, t) = \frac{\partial^3 F(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t)}{\partial v_1 \partial v_2 \partial v_3} \quad [3.64b]$$

La funzione p è dunque una densità rispetto alle variabili dello spazio delle fasi ed è una funzione dello spazio e del tempo. In ognuno degli ∞^3 punti dello spazio e negli infiniti istanti temporali che potrebbero essere considerati, essa caratterizza il vettore velocità, ma non contiene alcun tipo di informazione su quanto accade a due o più punti diversi dello spazio e/o a due o più istanti temporali diversi.

Se invece di limitarci a considerare il solo campo di moto, considerassimo i campi di tutte le variabili che caratterizzano lo stato del *PBL*, potremmo costruire una *CDF* e una *PDF* decisamente più generale, ma sicuramente più complicata e ben più difficile da ottenere anche in maniera campionaria. Oltre a ciò, è possibile definire altre densità di probabilità che descrivono o la singola variabile (una delle componenti della velocità del fluido, la temperatura, la pressione, ecc.) o la densità congiunta tra due di queste quantità, per esempio due delle componenti della velocità. In Monin e Yaglom (2007a) è descritto come tutta questa sequenza infinita di densità di probabilità sia interconnessa, anche se, per gli scopi che ci prefiggiamo, tale conoscenza non è essenziale.

Ritornando al campo di moto, in termini di *PDF* è immediato definire il campo di moto medio come quel campo (deterministico) ottenuto applicando l'operatore di valore atteso al campo vettoriale $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$. In particolare si avrà che:

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) = \iiint \mathbf{V} \cdot p(\mathbf{V}; \mathbf{x}, t) \cdot dV_1 dV_2 dV_3 \quad [3.64c]$$

Si noti come il campo medio ottenuto sia un campo deterministico e come tale potrà e dovrà essere trattato. In modo analogo si può procedere per individuare il campo medio di temperatura, di pressione, di densità e delle altre variabili che caratterizzano il *PBL*.

Una volta definito il campo medio di una variabile, è immediato definire il campo delle *fluttuazioni* che è un campo stocastico e che, nel caso del campo di moto, è anche un campo vettoriale. Esso è dato formalmente da:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) - \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) \quad [3.64d]$$

Essendo il campo medio un'entità deterministica, è naturale che la nostra attenzione sia rivolta prevalentemente al campo delle fluttuazioni e alle sue caratteristiche stocastiche di cui una sola è nota: il campo delle fluttuazioni ha media nulla per costruzione. Inoltre è immediato definire il campo delle varianze-covarianze *one-point/one-time*. Infatti, limitandoci alle sole fluttuazioni delle componenti della velocità del fluido ed indicando con $p(u_i, u_j)$ la densità di probabilità congiunta delle due componenti, la generica covarianza tra le componenti è data da:

$$\overline{u_i u_j}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_i(x, t) \cdot u_j(x, t) \cdot p(u_i, u_j) \cdot du_i du_j \quad [3.64d]$$

La varianza delle varie componenti della velocità del fluido o di altre variabili scalari, così come la covarianza tra componenti del vento e variabili scalari o tra variabili scalari è facilmente riconducibile alla relazione (3.62c).

In generale, non è possibile dire molto sulla struttura analitica dei campi stocastici ed ancor meno per i campi delle fluttuazioni. Tuttavia, l'evidenza sperimentale maturata in decenni di osservazione della struttura del *PBL* ci fa concludere che il ritenerli continui e differenziabili nello

spazio e nel tempo è un'ottima ipotesi di lavoro. Se si considera, per semplicità, una variabile scalare T (o una delle componenti cartesiane della velocità del fluido), la derivata spaziale (rispetto ad una coordinata x) può essere espressa come:

$$\frac{dT}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} \quad [3.64e]$$

e dell'esistenza di tale limite abbiamo la conferma dall'esperienza. Calcolando il valor medio della relazione precedente, grazie anche all'integrabilità supposta del campo, si ha che:

$$\frac{d\bar{T}}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{T(x + \Delta x) - T(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\bar{T}(x + \Delta x) - \bar{T}(x)}{\Delta x} = \frac{d\bar{T}}{dx} \quad [3.64f]$$

cosa che ci porta a dire che gli operatori valor medio e derivata commutano tra loro. Analoghe considerazioni possono essere fatte anche per la derivazione temporale (come già fatto in precedenza per i processi stocastici), indipendentemente dal fatto che i campi stocastici siano scalari o vettoriali.

3.1.3.2 Le statistiche N -point

Per una descrizione completa dei campi stocastici o delle rispettive fluttuazioni le statistiche *one-point* non sono sufficienti. Bisogna considerare anche i legami che intercorrono tra variabili in punti diversi dello spazio e ad istanti differenti di tempo. In linea del tutto teorica è possibile definire *PDF N -point* come semplici estensioni di quanto fatto in precedenza. In particolare siano $\{\mathbf{x}^{(n)}, t^{(n)}, n = 1, 2, \dots, N\}$ un insieme di posizioni e tempi. La definizione di una *PDF* relativa, per esempio, al vettore velocità del fluido sarà:

$$p_N(\mathbf{V}^{(1)}, \mathbf{x}^{(1)}, t^{(1)}; \mathbf{V}^{(2)}, \mathbf{x}^{(2)}, t^{(2)}; \dots; \mathbf{V}^{(N)}, \mathbf{x}^{(N)}, t^{(N)})$$

che rappresenta la densità di probabilità di avere $\mathbf{V}^{(1)}$ al punto $\mathbf{x}^{(1)}$ al tempo $t^{(1)}$ e contemporaneamente $\mathbf{V}^{(2)}$ al punto $\mathbf{x}^{(2)}$ al tempo $t^{(2)}$ e così via. E' evidente che la determinazione pratica di questa sequela di *PDF* e di tutto ciò che logicamente ne deriva è un'impresa titanica e di fatto impossibile.

La più semplice statistica contenente informazioni sulla struttura spaziale di un campo stocastico, soprattutto se tale campo è una fluttuazione, è costituita dalla correlazione *two-point/one-time* tra due componenti cartesiane di una variabile vettoriale, definita come:

$$R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, t) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t) \cdot u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)} \quad [3.65a]$$

dove \mathbf{r} è il vettore spostamento spaziale. La correlazione *two-point* evidentemente non è un vettore, ma un *tensore del secondo ordine*. In pratica, tale entità è rappresentabile mediante una matrice quadrata che, nel caso del campo di moto, è una matrice 3x3. Gli indici i e j possono assumere solo valori 1, 2, 3 (col pedice 1 si indica tutto ciò che è diretto secondo l'asse x , col pedice 2 secondo l'asse y e 3 secondo l'asse z). Il vettore spostamento \mathbf{r} , nelle tre orientazioni cartesiane avrà componenti $r_j, j = 1, 2, 3$. Analoghe relazioni possono essere ricavate per le correlazioni tra variabili differenti e per l'autocorrelazione di una generica variabile. La (3.65a) indica come le funzioni di correlazione siano dipendente non solo dal punto considerato, ma anche dallo spostamento effettuato, oltre che dall'istante in cui si opera. Da questa funzione è possibile trarre notevoli informazioni; in particolare è possibile considerare la funzione di autocorrelazione in una particolare direzione (per esempio lungo la direzione $x_1 = x$) e definire una *lunghezza integrale di scala* in quella direzione, che rappresenta di fatto la dimensione spaziale tipica del fenomeno considerato definita come:

$$L_{11}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{R_{11}(0, \mathbf{x}, t)} \int_0^\infty R_{11}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r}, \mathbf{x}, t) \cdot dr \quad [3.65b]$$

dove $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r}$ è la proiezione di \mathbf{r} nella direzione x_1 .

Un'altra statistica *two-point one-time*, all'apparenza molto simile alla correlazione, è la *Funzione di Struttura* D_{ij} , introdotta dai fluidodinamici russi e che useremo spesso al Cap.5. Essa si basa sulla differenza assunta dalle componenti del campo di moto u_i e u_j nei due punti $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ lungo la generica direzione \mathbf{r} . In pratica, essa è definita come:

$$D_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = \overline{[u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u_i(\mathbf{x}, t)] \cdot [u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u_j(\mathbf{x}, t)]} \quad [3.66]$$

Come si nota immediatamente, anche la Funzione di Struttura è un'entità tensoriale.

3.1.3.3 La stazionarietà statistica, l'omogeneità e l'isotropia

A volte ed in certi casi i campi stocastici presentano caratteristiche particolari che consentono decisive semplificazioni.

Il primo caso è la stazionarietà di un campo. Un *campo stocastico* si dice *statisticamente stazionario* se tutte le statistiche (cioè i vari momenti) sono invarianti rispetto ad una traslazione temporale. In termini di *PDF N-point*, ciò significa che la densità di probabilità non cambia se al posto del punto $(\mathbf{x}^{(n)}, t^{(n)})$ si sostituisce il punto $(\mathbf{x}^{(n)}, t^{(n)} + T)$, dove T è una traslazione temporale e ciò per ogni punto dello spazio. Questa è una notevole proprietà del campo che ci consente di ignorare il tempo come variabile. Come abbiamo visto, se si concentra l'attenzione su tempi relativamente piccoli rispetto alle tipiche variazioni *lente* delle variabili del *PBL* (per esempio tempi dell'ordine dell'ora), i campi di interesse micrometeorologico possono essere considerati statisticamente stazionari. Per un campo statisticamente stazionario le Funzioni di Correlazione e la Funzione di Struttura non dipendono dal tempo.

In modo analogo, un campo stocastico si dice *omogeneo* se tutte le sue statistiche sono invarianti rispetto ad una traslazione spaziale. Sempre in termini di *PDF*, ciò significa che la densità di probabilità non cambia se al posto del punto $(\mathbf{x}^{(n)}, t^{(n)})$ si sostituisce il punto $(\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{X}, t^{(n)})$, dove \mathbf{X} è una traslazione spaziale. Una omogeneità completa per il campo di moto ovviamente comporta anche l'omogeneità del valor medio del campo e quindi il campo medio risulta uguale in ogni punto dello spazio. Se ciò avviene, con un opportuno cambio di scala, tale campo medio può essere considerato nullo. Questa situazione è ben poco probabile in un fluido geofisico come l'atmosfera dove sono evidenti i gradienti, soprattutto verticali, del campo di moto medio. Si pensi, per esempio, alla necessità che sia soddisfatta la *no-slip condition*. Si può però considerare l'omogeneità dei campi delle fluttuazioni e, in questo caso meno restrittivo, l'accordo con le risultanze sperimentali è decisamente migliore. Inoltre, anche se un campo non è completamente omogeneo, lo si può considerare tale solo in alcune direzioni. Per esempio, se si considera una porzione limitata di *PBL*, spesso si riscontra una buona isotropia orizzontale. Nel caso di un campo statisticamente omogeneo e stazionario, la Funzione di Correlazione e le Funzioni di Struttura dipendono esclusivamente dallo spostamento spaziale ed è facile dimostrare, poi, che le funzioni di correlazione sono funzioni pari, cioè $R_{ij}(\mathbf{r}) = R_{ij}(-\mathbf{r})$.

Un campo stocastico statisticamente omogeneo è, per definizione, invariante rispetto ad una qualsiasi traslazione. Se è invariante anche rispetto ad ogni rotazione e riflessione degli assi coordinati, allora tale campo si dice *isotropo*. I campi meteorologici all'osservazione si presentano sicuramente lontani dal presentare una tale proprietà, tuttavia vedremo che quando la scala spaziale cui facciamo riferimento risulta molto ristretta si può notare una buona *isotropia locale*.

3.1.3.4 Alcune considerazioni sui campi isotropi

A conclusione della breve descrizione sui campi stocastici (che occupa un immenso spazio nei libri di fluidodinamica statistica, come per esempio quelli di Monin e Yaglom) presentiamo qui di seguito alcune utili considerazioni. Senza limitare la generalità della trattazione, per semplicità (e per importanza) consideriamo solo il *campo del moto* dell'aria $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$. Supponiamo, inoltre, che tale campo sia *stazionario* (almeno in un certo orizzonte temporale) e *statisticamente omo-*

geneo. Ciò comporta che, con un opportuno cambio di scala (sottraendo, in pratica, il valor medio) al posto del campo $U(\mathbf{x},t)$ possiamo considerare il campo delle fluttuazioni relative $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$; in questo modo le funzioni di covarianza e di correlazione coincidono e, quindi, senza perdita di generalità, potremo considerare solo queste ultime.

Statistiche one-point

Consideriamo, in primo luogo, le statistiche *one-point* in una situazione di turbolenza isotropa. In questo caso, se stabiliamo un sistema di assi cartesiani ortogonali nel generico punto $P(x_1, x_2, x_3)$, le fluttuazioni della velocità del fluido saranno u_1, u_2 e u_3 . Se ora ruotiamo tale sistema di riferimento attorno all'asse x_3 di un angolo pari a $-\pi/2$, il vettore fluttuazione della velocità nel nuovo sistema di riferimento avrà componenti v_1, v_2 e v_3 . Le componenti u_i e v_i saranno tra loro legate dalle relazioni:

$$u_1 = -v_2 \quad u_2 = v_1 \quad u_3 = v_3$$

Ciò, ovviamente, deve essere vero per ogni possibile realizzazione. Potremmo realizzare altre rotazioni e riflessioni, ma otterremmo. La lunghezza del vettore fluttuazione non cambia, ovviamente. Le componenti ma mentre:

$$\overline{u_1^2} = \overline{v_2^2}$$

la covarianza tra le componenti 1 e 2 diventa:

$$\overline{u_1 u_2} = -\overline{v_1 v_2}$$

Se, però la turbolenza è isotropa, ogni statistica *one-point* dovrà permanere immutata a fronte di rotazioni e riflessioni degli assi di riferimento e quindi perché ciò accada anche nel caso sopra evidenziato bisogna, che in generale:

$$\overline{u_i u_j} = \delta_{ij} \overline{u^2} \quad [3.67a]$$

Ciò significa che:

- tutti i momenti *one-point* del secondo ordine con $i \neq j$ sono tutti nulli;
- tutti i momenti del secondo ordine con $i = j$ sono uguali, cioè $\overline{u_i u_1} = \overline{u_i^2} = \overline{u^2}$;
- dato che la somma di questi ultimi è pari a due volte l'energia cinetica turbolenta E (che vedremo meglio nel seguito), si ha che per un generico momento del secondo ordine *one-point* vale la relazione generale:

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2E}{3} \delta_{ij} \quad [3.67b]$$

Ritorniamo, ora, al campo delle fluttuazioni nel sistema di riferimento originario e ruotiamo quest'ultimo di un angolo π attorno ad x_3 . Si avrà che le nuove componenti v_i saranno legate alle componenti u_i dalle relazioni seguenti:

$$u_1 = -v_1 \quad u_2 = -v_2 \quad u_3 = v_3$$

E' immediato vedere che in una situazione isotropa tutti i momenti del terzo ordine sono necessariamente nulli.

Statistiche two-point

Come detto, uno dei principali indicatori delle caratteristiche statistiche del campo di moto è la funzione di correlazione spaziale. Essa descrive la correlazione esistente tra la componente u_i , relativa al punto \mathbf{x}_1 , e la componente u_j , relativa al punto $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{r}$ dove \mathbf{r} è un vettore spostamento. In generale al tempo t :

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t) \cdot u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)} \quad [3.68a]$$

Se, però, il campo è *statisticamente stazionario*, verrà meno la dipendenza dal tempo e se tale campo risultasse anche *omogeneo* verrebbe meno anche la dipendenza dallo specifico punto \mathbf{x} dello spazio, per cui:

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \overline{u_i(\mathbf{x}) \cdot u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})} \quad [3.68b]$$

E' immediato constatare che R_{ij} è un tensore di 9 elementi che, nel caso di omogeneità spaziale, presenta solo 6 componenti indipendenti. R_{ij} è, quindi, rappresentabile come una matrice simmetrica i cui elementi diagonali sono le autocorrelazione.

Il quadro si semplifica notevolmente quando il campo, oltre ad essere stazionario ed omogeneo, è anche *isotropo* (almeno localmente). Monin e Yaglom (2007b, pag. 35) hanno sviluppato nel dettaglio l'argomento, giungendo alle seguenti considerazioni di primario interesse:

- essendo il campo omogeneo, il tensore di correlazione R_{ij} non dipenderà dal vettore di stanza \mathbf{r} , ma dal suo modulo $r = |\mathbf{r}|$;
- ovviamente il tensore è simmetrico e delle 9 componenti, solo 6 possono essere considerate diverse da zero e 3 di esse sono gli elementi diagonali (cioè le autocorrelazione);
- per l'isotropia del campo, di questi 6 elementi solo gli elementi diagonali R_{11} , R_{22} e R_{33} sono diversi da zero. R_{11} è la correlazione di u_1 presa lungo la direzione media del vento (coincidente con l'asse x); in generale essa è indicata col termine *correlazione longitudinale* R_{LL} ed è definita come:

$$R_{LL}(r) = \overline{u_1(x) \cdot u_1(x+r)} = \overline{u_L(x) \cdot u_L(x+r)} \quad [3.68c]$$

Come si nota, le quantità x e r nella relazione precedente ora sono scalari e non vettori. R_{22} è la correlazione, sempre lungo l'asse x della componente u_2 del moto. E' nota come la *correlazione trasversale* del moto, è indicata col simbolo R_{NN} ed è definita come:

$$R_{NN}(r) = \overline{u_2(x) \cdot u_2(x+r)} = \overline{u_N(x) \cdot u_N(x+r)} \quad [3.66d]$$

R_{33} è la correlazione, sempre lungo l'asse x della componente verticale u_3 del moto ed è indicata come *correlazione verticale*. Per l'isotropia del campo si ha che:

$$R_{33}(r) = R_{NN}(r) \quad [3.66e]$$

Nella Fig. 3.9 è schematizzata la geometria considerata.

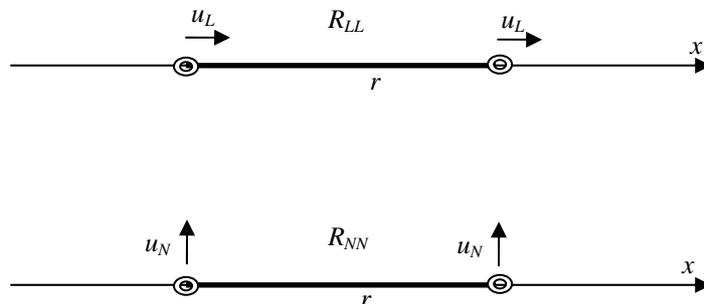


Fig. 3.9: geometria utilizzata per la definizione delle correlazioni longitudinali e trasversali.

Prima di procedere, è interessante considerare un campo di moto *solenoidale*, cioè a divergenza nulla. Anche se ciò non è la situazione più generale, tuttavia molto spesso nella trattazione teo-

rica della turbolenza si assume questa ipotesi. Dato che è sempre possibile definire e costruire un campo medio, consideriamo elusivamente le sue fluttuazioni. Vedremo al Cap. 5 che in un campo solenoidale anche la divergenza delle fluttuazioni è nulla. Ipotizziamo, inoltre per comodità, che il campo sia anche stazionario e quindi il valore delle fluttuazioni (che, indichiamo con u_i) non dipenderà dal tempo. Le funzioni di correlazione della fluttuazione u_1 con le altre componenti in un punto \mathbf{x} saranno definite come:

$$R_{11}(\mathbf{r}) = \overline{u_1(\mathbf{x}) \cdot u_1(\mathbf{x} + \mathbf{r})} \quad R_{12}(\mathbf{r}) = \overline{u_1(\mathbf{x}) \cdot u_2(\mathbf{x} + \mathbf{r})} \quad R_{13}(\mathbf{r}) = \overline{u_1(\mathbf{x}) \cdot u_3(\mathbf{x} + \mathbf{r})}$$

Di queste tre correlazioni solo R_{11} è diversa da zero, per quanto detto in precedenza. Questa proprietà la sfrutteremo tra un po'. Consideriamo ora $R_{12}(\mathbf{r})$. Se \mathbf{r} è piccolo, possiamo sviluppare in serie di Taylor $u_2(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ e, arrestando la serie al termine delle derivate prime, si ha che:

$$u_2(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \cong u_2(\mathbf{x}) + r_1 \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}} + r_2 \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}} + r_3 \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right|_{\mathbf{x}} \quad [3.67a]$$

Dato che:

$$R_{12} = u_1(x) \cdot \left[u_2(\mathbf{x}) + r_1 \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}} + r_2 \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}} + r_3 \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right|_{\mathbf{x}} \right] \quad [3.67b]$$

si ha che:

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial r_2} = u_1(x) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad [3.67c]$$

Relazioni analoghe si ottengono immediatamente per R_{11} e per R_{13} . Se ora sommiamo tra loro le tre derivate delle funzioni di correlazioni R_{ij} , otteniamo:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial R_{ij}}{\partial r_j} = u_1 \cdot \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] = u_1 \cdot \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_{j1}} \right] \quad [3.67d]$$

(si noti che l'ultimo membro di destra è stato scritto con notazione sintetica). Ma dato che il campo è solenoidale:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad [3.67e]$$

e quindi:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial R_{1j}}{\partial r_j} = 0 \quad [3.67f]$$

Tuttavia, delle tre correlazioni R_{ij} , solo R_{11} è diversa da zero e quindi:

$$\frac{\partial R_{1j}}{\partial r_j} = 0 \quad [3.67g]$$

E' facile verificare che vale la relazione generale:

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial r_j} = 0 \quad [3.68a]$$

Per il momento non abbiamo sfruttato l'omogeneità spaziale. Se però il campo è omogeneo, la coppia di punti \mathbf{x} e $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ è equivalente alla coppia di punti $\mathbf{x} - \mathbf{r}$ e \mathbf{x} e quindi è immediato dimostra-

re che vale la relazione:

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial r_j} = \frac{\partial R_{ij}}{\partial r_i} = 0 \quad [3.68b]$$

La correlazione tra due generiche componenti u_i e u_j in due punti qualsiasi dello spazio, separati dalla distanza vettoriale \mathbf{r} (le cui componenti cartesiane sono r_j) e di modulo r deve avere una struttura analitica tale da presentare l'invarianza rispetto a rotazioni e riflessioni del sistema di coordinate. Perché ciò sia vero è necessario che il tensore di correlazione sia genericamente espresso come (Monin e Yaglom, 2007b):

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \alpha(r) \cdot r_i r_j + \beta(r) \cdot \delta_{ij} \quad [3.69a]$$

dove $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\alpha(r)$ e $\beta(r)$ sono generiche funzioni del modulo del vettore distanza. Che questa espressioni sia isotropa lo si vede immediatamente. Per poterla sfruttare meglio, ruotiamo il sistema di riferimento in modo tale che l'asse x_1 sia parallelo a \mathbf{r} . La relazione generica (3.69a) espressione deve dar conto sia di R_{LL} che R_{NN} . In effetti se consideriamo R_{LL} , vediamo che:

$$B_{LL}(r) = \alpha(r) \cdot r^2 + \beta(r) \quad [3.69b]$$

visto che $r_1 r_1 = r^2$. Considerando, invece, R_{NN} , dato che $r_2 r_2 = 0$, si ha che:

$$B_{NN}(r) = \beta(r) \quad [3.69c]$$

quindi la relazione generale che esprime R_{ij} in termini di R_{LL} e R_{NN} è la seguente:

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = [R_{LL}(r) - R_{NN}(r)] \cdot \frac{r_i r_j}{r^2} + R_{NN}(r) \cdot \delta_{ij} \quad [3.70]$$

È facile dimostrare che se $r = 0$, si ha che:

$$R_{LL}(0) = R_{NN}(0) = R_{33}(0) = \frac{1}{3} \overline{[u(x)]^2} \quad [3.71]$$

Se il campo (delle fluttuazioni), oltre ad essere stazionario, omogeneo ed isotropo, è anche *solenoïdale* (cioè per esso vale l'equazione di continuità), è possibile individuare una relazione che lega R_{NN} a R_{LL} (Wingaard, 2010). In effetti, consideriamo la correlazione $R_{11}(\mathbf{r})$; essa sarà espressa dalla relazione generale (3.70) e quindi la sua derivata rispetto a r_1 sarà:

$$\frac{\partial}{\partial r_1} R_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial r_1} \left[[R_{LL}(r) - R_{NN}(r)] \cdot \frac{r_i r_j}{r^2} + R_{NN}(r) \cdot \delta_{ij} \right] = 0 \quad [3.72a]$$

dove l'uguaglianza a zero della derivata esprime il fatto che il campo è solenoïdale. Ricordando che:

$$r_i r_i = r^2 \quad \frac{\partial}{\partial r_i} = \frac{\partial r}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial}{\partial r} = \frac{r_i}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}$$

si ottiene con pochi calcoli la relazione seguente:

$$R_{NN}(r) = R_{LL}(r) + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} R_{LL}(r) \quad [3.72b]$$

Chiaramente si è supposto che R_{LL} fosse derivabile.

Una volta note le funzioni di autocorrelazione R_{LL} e R_{NN} , è possibile definire le rispettive *lunghezze integrali di scala* L_{11} e L_{22} . In particolare si ha che:

$$L_{11} = \frac{1}{R_{LL}(0)} \int_0^{\infty} R_{LL}(r) \cdot dr \quad [3.73]$$

ed una relazione analoga vale per L_{22} . L_{11} è la lunghezza di scala caratteristica dei vortici atmosferici di dimensione maggiore. In condizioni di isotropia si ha che $L_{22} = \frac{1}{2} L_{11}$.

Come già detto, un ulteriore indicatore delle proprietà statistiche di un campo è la *funzione di struttura del secondo ordine* (che è un tensore) definita come:

$$D_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \overline{[u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u_i(\mathbf{x}, t)] \cdot [u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u_j(\mathbf{x}, t)]} \quad [3.74a]$$

E' abbastanza evidente come il tensore di struttura del secondo ordine sia strutturalmente molto simile alla funzione al tensore di correlazione. Quando il campo è stazionario, omogeneo ed isotropo, viene meno la dipendenza dal tempo t e dal punto \mathbf{x} , mentre resta la dipendenza dal vettore di separazione \mathbf{r} . In condizioni di isotropia (Pope, 2000):

- la dipendenza dal vettore \mathbf{r} si perde, sostituita dalla dipendenza dal modulo r del vettore di separazione;
- delle 9 componenti del tensore, 6 risultano nulle per l'isotropia e le uniche componenti non nulle sono quelle diagonali D_{11} , D_{22} , D_{33} ;
- diventano importanti due funzioni di struttura particolari, entrambe determinate lungo la direzione x (del moto medio) e per le quali valgono le considerazioni geometriche di Fig. 3.9., cioè: la *funzione di struttura longitudinale* $D_{LL} = D_{11}$ definita come:

$$D_{LL}(r) = \overline{[u_L(x+r) - u_L(x)]^2} \quad [3.74b]$$

la *funzione di struttura trasversale* $D_{NN} = D_{22} = D_{33}$, definita come:

$$D_{NN}(r) = \overline{[u_N(x+r) - u_N(x)]^2} \quad [3.74c]$$

- ragionamenti sostanzialmente analoghi a quelli fatti in precedenza per il tensore di correlazione, anche il tensore della funzione di struttura D_{ij} può essere espressa in funzione di D_{LL} e D_{NN} mediante la relazione seguente, analoga alla (3.70):

$$D_{ij}(r) = [D_{LL}(r) - D_{NN}(r)] \cdot \frac{r_i r_j}{r^2} + D_{NN}(r) \cdot \delta_{ij} \quad [3.74d]$$

Prima di procedere è interessante notare che è possibile esprimere il tensore di struttura in funzione del tensore di correlazione. In effetti si ha che:

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = \overline{[u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_i(\mathbf{x})][u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_j(\mathbf{x})]} = \frac{\overline{u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \cdot u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})} + \overline{u_i(\mathbf{x}) \cdot u_j(\mathbf{x})} - \overline{u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \cdot u_j(\mathbf{x})} - \overline{u_i(\mathbf{x}) \cdot u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})}}{2} \quad [3.74e]$$

I primi due termini del membro di destra sono statistiche *one-point* che, per l'omogeneità del campo di moto, sono uguali e pari a $R_{ij}(0)$, mentre il terzo termine è $R_{ij}(\mathbf{r})$ ed il quarto è $R_{ij}(-\mathbf{r})$. Pertanto si ha che:

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = 2R_{ij}(0) - R_{ij}(\mathbf{r}) - R_{ij}(-\mathbf{r}) \quad [3.74f]$$

Quando, poi, il campo oltre che essere isotropo è anche solenoidale, D_{NN} è univocamente legata a D_{LL} (che si suppone derivabile) in accordo alla relazione:

$$D_{NN}(r) = D_{LL}(r) + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} D_{LL}(r) \quad [3.74g]$$

A tale relazione si giunge in maniera estremamente semplice, ricordando la (3.74g) ed applicando alle correlazioni le proprietà del campo solenoidale.

3.1.4 IL MODELLO DI REYNOLDS

Riassumendo, l'irregolarità caratteristica della turbolenza del *PBL*, derivante dalle non linearità delle relazioni fluidodinamiche che descrivono lo stato dell'atmosfera, ci ha indotto ad esplorare la possibilità di descrivere i fenomeni atmosferici con un modello stocastico. Precedentemente abbiamo sviluppato l'argomento in maniera del tutto generale, giungendo alla conclusione che le strade percorribili sono due. Da un lato si potrebbe costruire un modello basato sulle funzioni di densità di probabilità relative ai vari campi stocastici descrittivi dell'atmosfera, dall'altro, senza perdere informazioni, si potrebbe ottenere lo stesso risultato impiegando i momenti statistici. Anche se è stato effettivamente sviluppato un modello basato esclusivamente sulle densità di probabilità (Pope, 2003), ad oggi l'applicazione di tale tecnica non è una consuetudine consolidata nel campo della meteorologia e della micrometeorologia. D'altro canto appare comunque un'impresa titanica senza soluzione la conoscenza di tutti i tipi di momenti di tutti gli ordini, per tutti i punti dello spazio-tempo e per tutte le variabili responsabili della turbolenza del *PBL*, cosa del tutto equivalente alla descrizione statistica realizzata mediante le funzioni di densità di probabilità congiunte o meno. Parrebbe, quindi, di essere giunti in un vicolo cieco!

In realtà, l'introduzione di un modello basato sui momenti centrali al posto delle funzioni di densità di probabilità ci può portare ad alcune interessanti e promettenti considerazioni di interesse pratico. E' un dato di fatto che le variabili istantanee che descrivono il *PBL* devono rispettare le leggi di conservazione su cui si basa il modello fluidodinamico, nonostante abbiano marcate caratteristiche caotiche. D'altro canto, va inoltre ricordato che tali leggi di conservazione si presentano in *forma prognostica*, cioè in un dato istante t esse legano il *tasso di variazione temporale* di una generica variabile alla *variazione spaziale* di un sottoinsieme delle variabili rilevanti nell'istante considerato. L'idea operativa che nasce da queste constatazioni è quella di lasciare alle leggi della fluidodinamica la descrizione delle variazioni, nel tempo e nello spazio, non tanto delle variabili meteorologiche, quanto piuttosto dei relativi indicatori statistici (cioè dei momenti).

La seconda considerazione che si può fare è che è pensabile (e sperabile) che i momenti realmente coinvolti nella descrizione della turbolenza siano pochi e quindi, di tutta la infinità di momenti che a rigore sarebbero necessari, ci si possa limitare a considerarne un numero esiguo. Queste due considerazioni rendono ora il panorama decisamente più ottimistico! Tuttavia dobbiamo ancora superare una difficoltà che deriva dal fatto che i momenti centrali, pur essendo dei candidati ideali per la trattazione statistica delle variabili meteorologiche, dipendono in maniera imprescindibile dalla definizione di *media*, che a questo punto diventa il problema cruciale. Fin qui abbiamo sempre adottato come concetto di media il valore atteso statistico. Questo concetto è univoco e non ambiguo, tuttavia non è applicabile nella realtà delle cose, pertanto è necessario individuare una soluzione operativa al problema.

3.1.4.1 L'ipotesi di Reynolds e la definizione di media

Come sottolineato da Monin e Yaglom (2007a), dato un campo scalare qualsiasi $F(\mathbf{x}, t)$, funzione dello spazio e del tempo, si può definire in maniera del tutto generale un campo medio mediante la relazione seguente:

$$\bar{F}(\mathbf{x}, t) = \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3, t - \tau) \cdot \omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) \cdot dx_1 dx_2 dx_3 d\tau \quad [3.75a]$$

dove la funzione $\omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)$ è una generica *funzione peso* (normalmente non negativa) che soddisfa la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int \int \omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) \cdot dx_1 dx_2 dx_3 d\tau = 1 \quad [3.75b]$$

Si può mostrare (Monin e Yaglom, 2007a) che, specificando in maniera opportuna la funzione peso, è possibile ottenere un notevole numero di definizioni diverse di media, tra cui quella spaziale e quella temporale. Che la (3.75a) rappresenti il valore atteso statistico è immediatamente evidente ed in questo caso la funzione peso è identificabile senza indugi nella funzione di densità di probabilità.

A questo punto formuliamo nella sua essenza il modello di Reynolds per lo studio del *PBL*:

1. lo stato del *PBL* è quello tipico di un fluido viscoso turbolento in cui le variabili fisiche che lo caratterizzano presentano evoluzioni prevedibili e di chiaro aspetto deterministico a cui si sovrappone un *rumore* tipicamente stocastico e disordinato;
2. è quindi logico supporre che questa possa essere una chiave interpretativa promettente e fu proprio questo il modo con cui Osborne Reynolds (1894) affrontò lo studio della turbolenza dei fluidi in generale e del *PBL* in particolare, formulando un'*ipotesi di lavoro* secondo cui il valore di una variabile U in un punto dello spazio-tempo è scomponibile in un valor medio ed una fluttuazione:

$$U(x, t) = \bar{U}(x; t) + u'(x; t) \quad [3.76]$$

dove \bar{U} è il *valore medio*, \mathbf{x} è un generico punto dello spazio e u' è la *fluttuazione turbolenta*;

3. le relazioni differenziali di conservazione che costituiscono il modello fluidodinamico del *PBL* (Cap. 2) dovranno essere riscritte tenendo conto di questa scomposizione. Ovviamente, per fare ciò è necessario adottare una definizione di media che abbia come requisito principale quello di ottenere equazioni sufficientemente semplici per i valori medi, una volta introdotta l'*ipotesi di Reynolds* nel modello fluidodinamico.
4. Reynolds postulò che, date due variabili U e V , la media adottata dovesse avere le proprietà seguenti (note come *condizioni di Reynolds*) (Monin e Yaglom, 2007a):

$$\overline{U + V} = \bar{U} + \bar{V} \quad [3.77a]$$

$$\overline{aU} = a\bar{U}, \quad a = \text{costante} \quad [3.77b]$$

$$\bar{a} = a \quad [3.77c]$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_i}, \quad x_i = x, y, z, t \quad [3.77d]$$

$$\overline{UV} = \bar{U} \cdot \bar{V} \quad [3.77e]$$

Le prime quattro condizioni sono soddisfatte da molte definizioni differenti di media (per esempio la media spaziale e la media temporale). Più complessa è la condizione (3.77e); essa a rigore non è soddisfatta né dalla media spaziale né dalla media temporale, mentre è soddisfatta dalla definizione di valore atteso statistico (media d'insieme).

Sembra quindi che le condizioni di Reynolds inducano ad adottare la *media di insieme*, ma è realistico impiegare tale definizione nella pratica? Se il *PBL* fosse un laboratorio, non ci sarebbero problemi: potremmo ripetere l'esperimento tutte le volte che lo volessimo e potremmo stimare agevolmente in maniera campionaria la media d'insieme di ogni variabile. Ma il *PBL* non è un laboratorio e la situazione che osserviamo in un dato istante non si ripeterà mai più, quindi,

anche se la scelta della media di insieme è teoricamente ottimale, in pratica tale scelta non è praticabile. Al contrario, le misure che è realistico fare nel *PBL* allo stato attuale della tecnologia sono costituite prevalentemente da misure realizzate in un dato punto dello spazio (prevalentemente nei pressi del suolo) protratte nel tempo e quindi risulta semplice definire una *media temporale* nel modo seguente:

$$\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt \quad [3.78a]$$

dove T è il tempo di mediazione. Questo tipo di media è realisticamente realizzabile nella pratica, ma non rispetta tutte le condizioni di Reynolds. L'obiettivo che abbiamo di fronte è *stendere un ponte* tra le due definizioni di media, la seconda operativamente semplice da realizzare, la prima fondamentale nella descrizione teorica del *PBL*. Per fare ciò è necessario fare alcune osservazioni, riassumendo quanto già detto i precedenza:

- la *turbolenza è stazionaria* se le proprietà statistiche del sistema sono indipendenti dal tempo e ciò implica quindi l'invarianza statistica rispetto ad una generica traslazione temporale. Le caratteristiche della turbolenza nel *PBL* sono generalmente *non stazionarie*, soprattutto perché la principale forzante del sistema è il sole, col suo caratteristico ciclo giornaliero. La sola eccezione è la componente verticale del vento che normalmente presenta un valore medio nullo. L'ipotesi di stazionarietà per funzioni casuali non stazionarie quali sono le variabili meteorologiche del *PBL* è talvolta accettabile se si considerano intervalli temporali di breve durata (inferiori all'ora) durante i quali i cambiamenti sembrano avvenire per stati quasi stazionari;
- la *turbolenza è omogenea* se il campo è statisticamente invariante rispetto alla traslazione degli assi coordinati nella spazio;
- la *turbolenza è isotropa* se il campo è indipendente dalla traslazione, rotazione e riflessione degli assi coordinati.

Nel caso in cui la turbolenza abbia tutte queste caratteristiche, allora si è in condizioni di *ergodicità* ed in questo caso la *media temporale è equivalente alla media di insieme*. Anche se la turbolenza del *PBL* è ben lontana dalla condizione di ergodicità, tuttavia operativamente non si può fare altro che usare la media temporale al posto della media d'insieme ogni volta che vengono applicate nella pratica le equazioni base che descrivono l'evoluzione del *PBL*. Questo è evidentemente un'approssimazione molto forte, tuttavia inevitabile.

Oltre a ciò, si è già visto che se si è in condizioni di ergodicità vale il *Teorema dell'Ergodicità* secondo cui (Monin e Yaglom, 2007a) per una generica variabile U deve essere verificata la relazione seguente:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T C_{uu}(\tau) \cdot d\tau = 0 \quad [3.78b]$$

Una delle conseguenze del Teorema dell'Ergodicità è la relazione (3.60) da cui è possibile ottenere un tempo di mediazione T che garantisce un prefinito errore tra la media d'insieme e la media temporale e che altrimenti sarebbe scelto con una notevole dose di arbitrarietà.

A supporto di questa ipotesi di lavoro, all'apparenza abbastanza brutale, si possono fare ulteriori considerazioni sulla scorta di quanto indicato da Monin e Yaglom (2007a). Invece di ritenere un generico segnale meteorologico una insieme caotico di valori, è possibile anche pensare che tale segnale sia il risultato *della sovrapposizione di una moltitudine di segnali armonici (seni e coseni) con periodi differenti*. Questa affermazione non è del tutto corretta e nella seconda parte di questo capitolo affronteremo il mondo del dominio delle frequenze in maniera più corretta; per il momento queste idee *fenomenologiche* possono essere sufficienti allo scopo. Secondo questo modo di vedere, che definiremo *armonico*, campionando in un punto dello spazio con un senso-

re ideale possiamo immaginare che passino attraverso il nostro sensore schiere di vortici equispaziati e che ogni schiera regolare di vortici possieda una ben precisa dimensione (per fissare le idee, immaginiamo vortici sferici con diametro costante). Dato che le diverse schiere di vortici passeranno contemporaneamente, il sensore vedrà un segnale risultante dalla somma di tante sinusoidi quanti sono i vortici di ampiezza proporzionale alla dimensione tipica di ciascuna schiera. Interessante è notare come il segnale visto dal sensore questa volta appaia come il risultato della sovrapposizione di un valor medio e di *armoniche*. L'individuazione nel segnale del contributo dei diversi vortici (cioè l'analisi spettrale del segnale), risponde molto semplicemente alla domanda: *quanto pesano le differenti armoniche nel perturbare il segnale rispetto al suo valor medio?* Per rispondere a questa domanda, come vedremo, è sufficiente individuare le varie armoniche e quantificarne l'ampiezza. Senza entrare nei dettagli, un buon indicatore di questo peso è la *densità spettrale* che, in prima approssimazione, può essere definita come il quadrato dell'ampiezza delle singole armoniche, ciascuna differente in frequenza. Se si grafica tale indicatore rispetto alla frequenza caratteristica si otterrà lo spettro della variabile campionata dal sensore. Questa analisi può essere applicata ai vari segnali meteorologici rilevati nei pressi del suolo: se la variabile considerata è la velocità orizzontale del vento e se si considera un tempo di osservazione abbastanza lungo, lo spettro che si ottiene è simile a quanto raffigurato nella Fig.3.10 in cui l'ordinata rappresenta la porzione di energia associata ad un vortice di una particolare dimensione, mentre in ascissa è riportata la dimensione del vortice stesso in termini di frequenza. I vortici più piccoli hanno periodi più corti, mentre i picchi nello spettro mostrano quali vortici contribuiscono di più all'energia complessiva *vista* in un punto *P*. Il picco più a sinistra, con periodo di circa 100 ore, si riferisce a variazioni di velocità del vento associate al passaggio di fronti, mentre l'altro picco, situato attorno alle 24 ore, mostra l'aumento giornaliero della velocità del vento e la sua diminuzione notturna. Il picco più a destra è dunque quello più interessante; esso è dovuto ai vortici a microscala della durata variabile tra 10 secondi e 10 minuti, dovuti alla turbolenza del *PBL* ed individuabili anche negli andamenti mostrati in Fig.2.8.

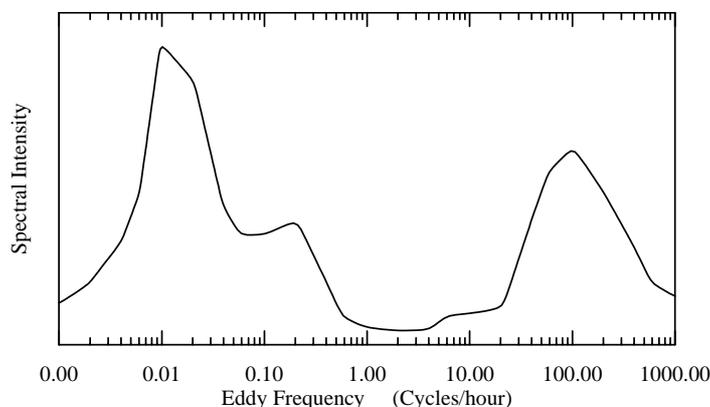


Fig.3.10: spettro della velocità del vento al suolo (Stull, 1988)

Sempre analizzando il picco più a destra, si nota come i vortici più grandi siano anche i più intensi. Dalla figura emerge, poi, una circostanza singolare: sono visibili variazioni nella velocità del vento o dell'ordine di alcune ore (derivanti dai moti a mesoscala) o dell'ordine dei minuti e dei secondi (dovuti alla turbolenza). Non si notano significative variazioni con periodi intermedi. Tale fenomeno è del tutto generale ed è noto col termine *spectral gap*. In figura lo *spectral gap* è molto evidente ed è la valle tra i due picchi. Non era quindi arbitrario definire il *PBL* come *quella porzione di troposfera che risponde alle forzanti su una scala temporale dell'ordine dell'ora* (Stull, 1989); implicito era il fatto che la turbolenza fosse la principale forza motrice agente nel *PBL*. Lo *spectral gap* è quindi un mezzo per separare le influenze turbolente sul *PBL* da quelle influenze che turbolente non sono e la sua presenza consente di individuare un periodo di mediazione da adottare nella stima della media e degli altri momenti di interesse valutabile attorno ai 15÷60 minuti. Adottando una scala temporale dell'ordine dell'ora (Monin e Yaglom,

2007a) l'ipotesi di ergodicità risulta meno arbitraria e la sostituzione della media temporale alla media d'insieme decisamente più realistica.

Da un punto di vista modellistico, nel Cap. 4 riscriveremo tutte le equazioni di conservazione della fluidodinamica scomponendo ogni variabile presente in valor medio e fluttuazioni. Fatto ciò, otterremo una serie di equazioni differenziali alle derivate parziali relative al valor medio e ai principali momenti centrali. Troveremo una bella sorpresa facendo ciò, ma per il momento non ne parliamo. Questo sistema di equazioni differenziali potrà essere risolto (come vedremo non in maniera analitica, ma in maniera numerica, con le tecniche descritte al Cap. 14) ottenendo l'evoluzione temporale dei campi di tutte le variabili di interesse. In teoria potremmo fare tutto ciò senza preoccuparci minimamente del fatto che alla base di tutto lo sviluppo sta la media d'insieme. Il problema si presenta quando confrontiamo i risultati ottenuti dal modello con le misure realizzate campionando le variabili in campo. E qui, l'ipotesi di ergodicità ci consente di confrontare senza troppo timore le previsioni modellistiche con le misure.

Le misure, che tratteremo in dettaglio nei Capitoli 11 e 12, avranno sempre la media temporale come base operativa. In realtà è raro oggi campionario segnali meteorologici in maniera analogica, e quindi continua, mentre è normale ottenere in un periodo di mediazione (che si è detto essere dell'ordine dell'ora) un numero N anche molto alto di campioni discreti. Il valor medio delle variabili ed i relativi momenti e funzioni di covarianza e correlazione verranno, quindi, stimati con l'ausilio degli stimatori campionari descritti ai punti precedenti. Nonostante l'enorme sviluppo tecnologico degli ultimi decenni, le misure meteorologiche sono prevalentemente puntuali, cioè realizzate in un numero discreto e limitato di punti, quasi tutti localizzati presso il suolo e ciò è un problema. Nel prossimo punto si cercherà di aggirarlo, presentando una tecnica ingegnosa basata su un'ipotesi del tutto ragionevole.

3.1.4.2 L'ipotesi di Taylor o del congelamento della turbolenza

La descrizione del *PBL* richiede la conoscenza della distribuzione spazio-temporale dei vortici presenti per determinare le densità di probabilità congiunte o, alternativamente, i momenti centrali corrispondenti. Sfortunatamente, allo stato attuale della tecnologia, è praticamente impossibile fotografare la struttura turbolenta del *PBL*. Di fatto è più difficile misurare ad un certo istante le caratteristiche di una vasta porzione del *PBL* piuttosto che fare misure protratte nel tempo in un punto preciso dello spazio. Se, per esempio, si installa una torre meteorologica dotata a varie quote di un anemometro e di un termometro e si collegano tutti questi sensori ad un sistema di acquisizione dati, si è in grado di fotografare, in quella ristretta porzione di spazio, l'andamento temporale delle variabili meteorologiche rilevate (in questo caso vento e temperatura). La tecnologia disponibile è tale che l'intervallo temporale tra una misura e la successiva può essere ridotto a frazioni di secondo con costi e sforzi organizzativi, nel complesso, accettabili. Il passo verso una descrizione spaziale risulta possibile solo nel senso di un incremento dei punti di misura, fino a ricondursi ad un reticolo tridimensionale di postazioni di misura sufficientemente fitto. Il limite a ciò è l'aumento esponenziale dei costi e l'esplosione combinatoriale dei problemi organizzativi e logistici. L'introduzione attuale di *sensori remote sensing* come il *RADAR* per la misura della pioggia e del vento radiale, il *SODAR* per la misura del vettore vento ed il *RASS* per la misura della temperatura, pur avendo indotto sensibili miglioramenti in questa problematica, non ha comunque risolto tutte le difficoltà.

Da sempre l'impossibilità di misurare ha prodotto, per reazione, un notevole sforzo intellettuale volto alla costruzione di modelli o allo sviluppo di teorie con cui aggirare le difficoltà sperimentali stesse. Proprio in tale direzione deve essere inquadrato il lavoro di *G.I. Taylor* che, nel 1938, formulò la celebre *ipotesi di congelamento della turbolenza*, secondo cui *la turbolenza dei vari vortici poteva essere considerata congelata durante il loro transito nelle vicinanze di un sensore*. Così era possibile impiegare la velocità media del vento per trasformare la variazione temporale della turbolenza in una corrispondente variazione spaziale. Tale ipotesi non è vera in generale, ma lo diventa in tutti quei casi in cui i vortici turbolenti evolvono con una scala temporale

maggiore del tempo da loro impiegato nel transitare per il sensore (Powell e Elderkin, 1974). Se un vortice di dimensione caratteristica λ è trasportato da un vento medio orizzontale U , il tempo che intercorre tra l'istante in cui il sensore inizia a sentire il vortice e l'istante in cui ciò si esaurisce sarà P , legato al modulo della velocità del vento ed alla dimensione caratteristica del vortice dalla relazione:

$$P = \lambda/U \quad [3.79a]$$

In concreto, si consideri la temperatura come variabile caratteristica del vortice. Durante il suo transito nei pressi del termometro, si noterà una variazione della temperatura misurata dal termometro. Si ipotizzi che la dimensione caratteristica del vortice sia $\lambda = 100$ m e che, nel momento in cui il vortice lambisce il termometro, la temperatura misurata sia 10°C , mentre quando il vortice lascia il termometro la temperatura sia di 5°C , evidenziando una variazione di temperatura di -5°C . Se U è pari a 10 m/s, in 10 s tutto il vortice è passato per il termometro e, se non ha subito evoluzioni, la variazione di temperatura misurata coincide col gradiente termico del vortice. Quindi, localmente si è vista una variazione temporale di temperatura di $dT/dt = -0.5$ $\text{K}\cdot\text{m}^{-1}$ per il passaggio del vortice caratterizzato da un gradiente termico spaziale pari a $dT/dx = 5\text{K}/100$ m = 0.05 $\text{K}\cdot\text{m}^{-1}$, dove x è misurata parallelamente alla direzione del vento medio. E' quindi immediato constatare che:

$$\frac{dT}{dt} = -U \frac{dT}{dx} \quad [3.79b]$$

Tale relazione esprime analiticamente l'ipotesi di Taylor per la temperatura, in termini monodimensionali però. In termini tridimensionali, per una generica variabile meteorologica ξ , la formulazione generale dell'ipotesi di Taylor è la seguente:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -V_x \frac{\partial \xi}{\partial x} - V_y \frac{\partial \xi}{\partial y} - V_z \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad [3.79c]$$

L'ipotesi di Taylor può essere ritenuta valida quando si è sicuri che il vortice non subisce cambiamenti significativi nel transito per il sensore e quindi quando l'intensità della turbolenza è piccola rispetto alla velocità del vento. Quantitativamente, tale ipotesi risulta valida quando $\sigma_U < 0.5 U$, dove σ_U è la deviazione standard della velocità del vento.

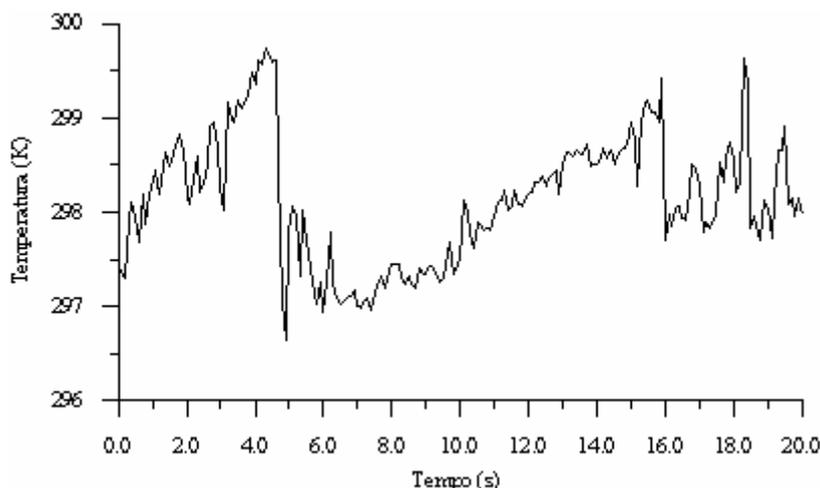


Fig. 3.11: andamento nel tempo della temperatura in una situazione convettiva.

La (3.79b) probabilmente non evidenzia a sufficienza la *potenza applicativa* dell'ipotesi di Taylor, pertanto è opportuno completare quanto si è detto con una formulazione meno rigorosa, ma più orientata alle applicazioni pratiche. Si consideri a tal proposito una serie di temperature T_i ($i = 1, 2, \dots, N$) rilevate in un punto del *PBL* vicino al suolo. Tali rilevazioni siano state fatte

agli istanti t_i ($i = 1, 2, \dots, N$) equidistanti nel tempo ($\Delta t = t_{i+1} - t_i = \text{costante}$ per ogni i). Si ipotizzi, inoltre, che durante la misura la velocità media del vento sia pari a U e che siano soddisfatte le condizioni di applicabilità dell'Ipotesi di Taylor.

Per essere concreti, in Fig. 3.11 è riportato un esempio tipico di una serie temporale di temperature rilevate durante una situazione convettiva con velocità media del vento di $5.7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, proveniente da ovest. La temperatura è stata misurata con una frequenza di campionamento di 10 Hz. Come si può vedere, nel segnale di temperatura sono evidenti le caratteristiche rampe tipiche delle situazioni convettive. Si consideri ora la (3.79b) e se ne realizzi una semplice discretizzazione alle differenze finite nello spazio e nel tempo:

$$\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t} = -U \cdot \frac{T_{k+1} - T_k}{x_{k+1} - x_k} \quad [3.79d]$$

Va rilevato che la posizione del vortice al tempo t_i è x_i e quindi $T_i = T_k = T_{ik}$. Dalla relazione precedente si ha che:

$$T_{k+1} = T_{ik} - \frac{x_{k+1} - x_k}{U \cdot \Delta t} \cdot (T_{i+1} - T_{ik}) \quad [3.79e]$$

Se è valida l'Ipotesi di Taylor, a quale distanza x_{k+1} si verrà a trovare la porzione di vortice avente una temperatura $T_{k+1} = T_{i+1}$ (cioè pari alla temperatura rilevata dalla postazione fissa di misura all'istante t_{i+1})? E' facile verificare che:

$$x_{k+1} = x_k - U \cdot \Delta t \quad [3.79f]$$

quindi ad una distanza *sopravvento* alla postazione pari a $U \cdot \Delta t$. Nel caso specifico mostrato in Fig. 3.10, se si pone $x_l = 0$, si ha quanto riportato in Fig. 3.12. E' facile rendersi conto che se si facesse transitare la struttura termica di questa figura senza deformarla (*congelata*, quindi) alla velocità media del vento attraverso il punto di misura, ciò che verrebbe rilevato è effettivamente quanto mostrato in Fig. 3.12.

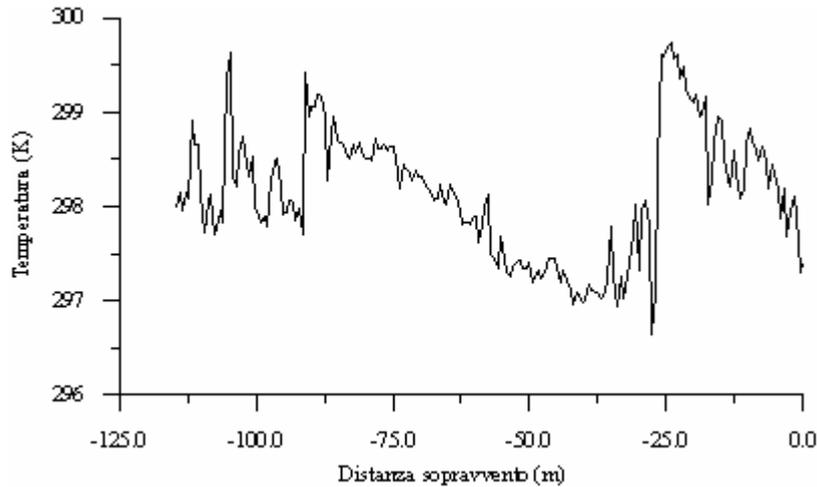


Fig. 3.12: trasformazione della struttura termica di Fig. 3.10 operata dall'ipotesi di Taylor.

Precedentemente abbiamo introdotto le funzioni di covarianza e di correlazione e le funzioni di struttura come indicatori statistici della struttura *spaziale* dei campi stocastici. Per la loro determinazione campionaria è evidentemente necessario disporre di misure realizzate in punti differenti dello spazio e ciò non è sempre possibile o semplice. E' però interessante rilevare come l'ipotesi di Taylor consenta di aggirare il problema. Limitandoci per brevità alla sola funzione di struttura (per le funzioni di covarianza e di correlazione il ragionamento è analogo), l'uso operativo dell'ipotesi di Taylor consente di ottenere funzioni di struttura *streamline* anche disponendo

di misure in un solo punto dello spazio. Infatti, se il vento medio in questo punto è pari a U , per l'ipotesi di Taylor due misure *separate nel tempo* di $j \Delta t$ (*time-lag*), risulterebbero *separate nello spazio* (in direzione *streamline*) di $\Delta x = U \cdot j \Delta t$ e quindi la funzione di struttura *streamline* di una generica variabile A campionata a N istanti discreti può essere stimata come:

$$D_{AA}(j\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [A_k - A_{k+j}]^2 \quad [3.79g]$$

3.1.4.3 L'Energia Cinetica turbolenta

Per ogni particella d'aria dotata di velocità propria è definibile l'*energia cinetica* corrispondente che, se ci si riferisce ad una massa unitaria, è data da:

$$e = 1/2 \cdot (u^2 + v^2 + w^2) \quad [3.80a]$$

dove le componenti del vento considerate sono le *componenti cartesiane istantanee*. Se si considera un intervallo di tempo di osservazione, è definibile un'*energia cinetica media* per la particella come:

$$\bar{e} = 1/2 \overline{(u^2 + v^2 + w^2)} \quad [3.80b]$$

Ricordando che le componenti istantanee del vento sono il risultato della somma di una componente media (nell'intervallo di mediazione considerato) e di un termine fluttuante (variabile nell'intervallo di mediazione, ma a media nulla), si ha che:

$$\bar{e} = 1/2 \left\{ \overline{u^2 + v^2 + w^2} + \overline{u'^2 + v'^2 + w'^2} \right\} \quad [3.80c]$$

Il primo dei due addendi è l'*energia cinetica media* della particella, proprietà derivante dal moto medio della particella stessa, mentre il secondo addendo:

$$TKE = E = 1/2 \overline{u'^2 + v'^2 + w'^2} \quad [3.80d]$$

prende il nome di *energia cinetica turbolenta* e rappresenta l'energia cinetica che la particella incorpora a causa della turbolenza caratteristica del *PBL*. Questa grandezza, come si vedrà poi, riveste una notevole importanza nella modellizzazione matematica del *PBL*. Va rilevato inoltre, come i tre addendi nella (3.80d) altro non siano che le varianze delle tre componenti del vento.

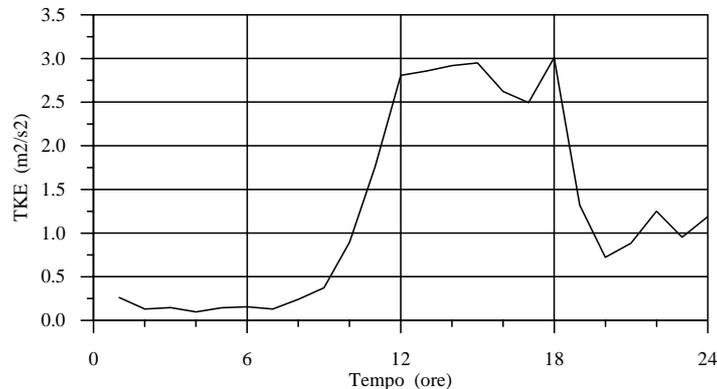


Fig. 3.13: evoluzione diurna dell'energia cinetica turbolenta (Sozzi et al, 2002).

In Fig.3.13 è presentata una tipica variazione diurna della *TKE* rilevata nei pressi del suolo. Da essa si nota come i valori maggiori di *TKE* si abbiano in corrispondenza delle ore a maggior soleggiamento e con maggior velocità del vento. Durante il giorno, il galleggiamento consente alle particelle di aria di accelerare nella parte centrale del *ML*, quindi la varianza della componente

verticale del vento risulta un contributo importante per la TKE . In queste situazioni il profilo verticale di TKE decresce lentamente con la quota sino all'*entrainment*, dove si ha una brusca diminuzione di TKE che tende ad annullarsi tanto più quanto ci si innalza nell'atmosfera libera. Con cielo nuvoloso, invece, il riscaldamento del suolo è limitato e la turbolenza è generata prevalentemente dallo *shear* e dall'attrito superficiale dovuto agli ostacoli del terreno. In questo caso i termini più importanti per la TKE sono dovuti alle componenti orizzontali del vento. Anche in questo caso la TKE decresce con la quota, ma più velocemente, sino a cadere bruscamente in corrispondenza della base delle nuvole. Durante la notte la stabilità sopprime la TKE causando una sua rapida diminuzione con la quota: anche in questo caso la poca turbolenza è generata al suolo dallo *shear* del vento. La TKE è sempre in generale bassa e decresce velocemente con la quota.

L'energia cinetica turbolenta varia nel tempo, come si vedrà al Cap.4, in accordo con una opportuna legge prognostica. E' però importante fin da subito fare alcuni commenti in proposito. Il tasso di variazione di energia cinetica turbolenta in un generico istante ed in un punto qualsiasi del PBL deriva dalla somma algebrica di alcuni termini:

- un termine di produzione meccanica legato agli stress di Reynolds (di cui si parlerà successivamente) ed allo *shear* del vento,
- un termine di trasporto turbolento,
- un termine derivante dal gradiente delle fluttuazioni di pressione,
- un termine dovuto al galleggiamento,
- un termine che rappresenta la dissipazione viscosa di energia cinetica in calore.

Questo ultimo termine, normalmente denominato tasso di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta ed indicato col simbolo ε , riveste un ruolo estremamente rilevante nello studio del PB .

3.1.4.4 I Flussi Cinematici ed i Flussi Turbolenti

Il moto delle masse d'aria nel PBL (sia in senso orizzontale che in senso verticale) comporta che in un punto $P(x,y,z)$ e ad un istante t si stabiliscano dei flussi di quantità di moto, di calore, di vapor d'acqua e di specie chimiche. Come vedremo, questi flussi non sono solo la conseguenza dei moti medi delle masse d'aria ma anche dei moti turbolenti.

Si consideri inizialmente il flusso di calore. Se in $P(x,y,z)$ si prende in considerazione una superficie infinitesima dS la cui normale è diretta lungo x , il calore che l'attraversa nell'intervallo di tempo dt dipende dal valore di temperatura T posseduto dall'aria in P e dal valore della componente u del vento nel punto P e nell'istante considerato secondo la relazione:

$$dQ = \rho C_p \cdot T \cdot u \cdot dS \cdot dt \quad [3.81]$$

Quindi, il flusso istantaneo di calore in direzione x nel punto P all'istante t risulta pari a:

$$Q_x(P,t) = \rho C_p \cdot u \cdot T \quad [3.82a]$$

Analogamente si ottengono le relazioni seguenti per i flussi istantanei nelle direzioni y e z :

$$Q_y(P,t) = \rho C_p \cdot v \cdot T \quad [3.82b]$$

$$Q_z(P,t) = \rho C_p \cdot w \cdot T \quad [3.82c]$$

Il flusso di calore istantaneo è quindi una quantità vettoriale che, nel punto P ed al tempo t risulta pari a:

$$\mathbf{Q}(P,t) = (Q_x, Q_y, Q_z) = (\rho C_p u T, \rho C_p v T, \rho C_p w T) \quad [3.82d]$$

Normalmente il flusso di calore istantaneo è di ben poca utilità, dato che varia in modo pressoché casuale col variare nel tempo delle tre componenti del vento e della temperatura. Di interesse molto maggiore è invece il flusso di calore medio in un intervallo temporale τ . Anche tale

flusso è un'entità vettoriale e per ottenerne le tre componenti cartesiane si può considerare ancora una volta la superficie infinitesima dS orientata lungo l'asse x da cui passa il flusso di calore istantaneo dato dalla (3.82a). Se consideriamo due istanti successivi t_1 e $t_2 = t_1 + \tau$, il valor medio di Q_x sarà pari a:

$$\overline{Q_x}(P) = \frac{\rho C_p}{\tau} \int_{t_1}^{t_1+\tau} u(t) \cdot T(t) \cdot dt \quad [3.83a]$$

Se si adotta l'ipotesi di Reynolds e si ricorda che il valor medio delle fluttuazioni è nullo, la relazione precedente si trasforma nella relazione seguente:

$$\overline{Q_x}(P) = \overline{Q_{x_cin}}(P) + \overline{Q_{x_turb}}(P) = \rho C_p \overline{U} \cdot \overline{T} + \rho C_p \overline{u' T'} \quad [3.83b]$$

da cui si nota come la componente media lungo x del flusso di calore in P sia la somma di $\overline{Q_{x_cin}}$, che è il flusso cinematico di calore dovuto al trasporto medio di calore nella direzione x operato dal moto medio delle masse d'aria, e di $\overline{Q_{x_turb}}$ che è il flusso turbolento di calore causato dai moti turbolenti. Sorprendentemente, si nota che, *in assenza* di un movimento medio delle masse d'aria lungo la direzione x , la sola turbolenza è comunque in grado di trasferire calore. Analogamente, considerando sia la direzione y che la z , si ha che:

$$\overline{Q_y}(P) = \overline{Q_{y_cin}}(P) + \overline{Q_{y_turb}}(P) = \rho C_p \overline{V} \cdot \overline{T} + \rho C_p \overline{v' T'} \quad [3.83c]$$

$$\overline{Q_z}(P) = \overline{Q_{z_cin}}(P) + \overline{Q_{z_turb}}(P) = \rho C_p \overline{W} \cdot \overline{T} + \rho C_p \overline{w' T'} \quad [3.83d]$$

Nel caso particolare del flusso verticale di calore ($\overline{Q_z}$), se il terreno è piatto e se si considera un punto P molto vicino al suolo (entro il SL , in particolare) per la *no-slip condition* la componente media verticale del vento è nulla e quindi il flusso medio verticale di calore coincide col flusso turbolento. Ciò sta a significare che il flusso verticale di calore sensibile, responsabile della generazione e dell'evoluzione degli enormi vortici che spazzano l'intero PBL , è esclusivamente di origine turbolenta! Dato che questa circolazione di vortici è l'elemento vitale di tutto il PBL , risulta evidente come la turbolenza sia il meccanismo principale presente nel PBL e quindi anche il meccanismo più efficace di rimescolamento degli inquinanti in esso emessi.

Considerazioni del tutto analoghe possono essere fatte per il vapor d'acqua. Se si utilizza il concetto di umidità assoluta a , adottando ancora una volta l'ipotesi di Reynolds e seguendo la metodologia precedente, si giunge facilmente alla determinazione del flusso medio di vapor d'acqua in un punto P :

$$\overline{F_{H_2O}}(P) = (\overline{F_{H_2Ox}}, \overline{F_{H_2Oy}}, \overline{F_{H_2Oz}}) \quad [3.84a]$$

dove

$$\overline{F_{H_2Ox}}(P) = \overline{F_{H_2Ox_cin}}(P) + \overline{F_{H_2Ox_turb}}(P) = \overline{a} \cdot \overline{U} + \overline{a' u'} \quad [3.84b]$$

$$\overline{F_{H_2Oy}}(P) = \overline{F_{H_2Oy_cin}}(P) + \overline{F_{H_2Oy_turb}}(P) = \overline{a} \cdot \overline{V} + \overline{a' v'} \quad [3.84c]$$

$$\overline{F_{H_2Oz}}(P) = \overline{F_{H_2Oz_cin}}(P) + \overline{F_{H_2Oz_turb}}(P) = \overline{a} \cdot \overline{W} + \overline{a' w'} \quad [3.84d]$$

Anche in questo caso, se il punto di osservazione sta nel SL ed il terreno è piatto, il flusso cinematico verticale di vapor d'acqua è nullo e quindi l'intero flusso verticale di umidità (l'*evapotraspirazione* del suolo) è totalmente dovuto alla turbolenza. Naturalmente, perché sia presente del vapor d'acqua in aria è necessario che venga speso del calore di evaporazione. Se ci limitiamo a considerare il solo flusso verticale di vapor d'acqua, ad esso sarà associato un *flusso verticale di calore latente* che, indicando con λ il calore latente di vaporizzazione, sarà pari a:

$$\overline{Q_{Lz}}(P) = \overline{Q_{Lz_cin}}(P) + \overline{Q_{Lz_turb}}(P) = \lambda \cdot \overline{a} \cdot \overline{W} + \lambda \cdot \overline{a' w'} \quad [3.84e]$$

Nel SL e con terreno piatto, la componente cinematica del flusso latente verticale è nulla e tutto il flusso di calore latente verticale è dovuto al solo effetto della turbolenza.

Se si considera poi la concentrazione c di una grandezza scalare, per esempio la concentrazione in aria di una specie chimica, il suo flusso, analogamente al caso del vapor d'acqua, è dato da:

$$\overline{F_c}(P) = (\overline{F_{cx}}, \overline{F_{cy}}, \overline{F_{cz}}) \quad [3.85a]$$

dove

$$\overline{F_{cx}}(P) = \overline{F_{cx_cin}}(P) + \overline{F_{cx_turb}}(P) = \bar{c} \cdot \bar{U} + \overline{c' u'} \quad [3.85b]$$

$$\overline{F_{cy}}(P) = \overline{F_{cy_cin}}(P) + \overline{F_{cy_turb}}(P) = \bar{c} \cdot \bar{V} + \overline{c' v'} \quad [3.85c]$$

$$\overline{F_{cz}}(P) = \overline{F_{cz_cin}}(P) + \overline{F_{cz_turb}}(P) = \bar{c} \cdot \bar{W} + \overline{c' w'} \quad [3.85d]$$

Da quanto detto si nota come la *parte turbolenta del flusso* in una delle direzioni cardinali sia *proporzionale* alla *covarianza* della variabile considerata con la componente del vento lungo la direzione cardinale stessa. Ciò sta a significare che il vettore delle covarianze tra uno scalare c (temperatura, umidità o sostanze chimiche) ed il vento ($\overline{c' u'}$, $\overline{c' v'}$, $\overline{c' w'}$) coincide, a meno di una costante di proporzionalità, col vettore dei flussi turbolenti medi. Se il punto P in cui si determina il flusso si trova entro il SL ed il terreno è piatto, risultano di estrema importanza nello studio del PBL i flussi seguenti:

- il flusso verticale di calore H_0 , normalmente indicato come Flusso Turbolento di Calore Sensibile, definito come:

$$H_0 = \rho C_p \overline{w' \theta'} \quad [3.86a]$$

- il flusso di galleggiamento H_{0v} , definito come:

$$H_{0v} = \rho C_p \overline{w' \theta'_v} \quad [3.86b]$$

- il flusso di calore latente H_E , dato da:

$$H_E = \lambda a' \overline{w'} \quad [3.86c]$$

- l'evapotraspirazione E , data da:

$$E = a' \overline{w'} \quad [3.86d]$$

- il flusso turbolento di un generico scalare c , F_c dato da:

$$E = c' \overline{w'} \quad [3.86e]$$

Un'altra proprietà importante è la *quantità di moto* di cui è dotata una generica particella di aria in movimento. Essa è un'entità vettoriale che, nel caso di una particella con volume unitario, è pari a:

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = (\rho u, \rho v, \rho w) \quad [3.87]$$

in cui ρ è la densità dell'aria e quindi della particella considerata. Dato che le componenti u , v e w sono valori istantanei, il vettore \mathbf{p} nel punto P dovrà essere considerato istantaneo e varierà irregolarmente nel tempo a causa della turbolenza presente nel PBL . Non è immediato definire il flusso istantaneo di quantità di moto in un punto P dello spazio ad un istante t .

Consideriamo inizialmente una superficie infinitesima dS con normale parallela all'asse delle x . Attraverso tale superficie sono definibili tre *flussi istantanei*: il flusso di p_x , p_y e p_z , cioè:

$$F_{p_x}^x = \rho \cdot u \cdot u \quad [3.88a]$$

$$F_{p_x}^y = \rho \cdot v \cdot u \quad [3.88b]$$

$$F_{p_x}^z = \rho \cdot w \cdot u \quad [3.88c]$$

Mentre nel caso del flusso di una variabile scalare in P lungo la direzione x , il flusso era uno scalare, nel caso della quantità di moto il *flusso è un vettore*. Analoghe considerazioni possono essere fatte per il flusso di quantità di moto in direzione y ed in direzione z ed in entrambi i casi si giunge alla conclusione che questi flussi direzionali sono entità vettoriali. Pertanto, il *flusso istantaneo (non direzionale)* in P all'istante t sarà un *tensore* così definito:

$$F_p = \left(\underline{F_p^x}, \underline{F_p^y}, \underline{F_p^z} \right) = \rho \cdot \begin{vmatrix} uu & vu & wu \\ uv & vv & wv \\ uw & vw & ww \end{vmatrix} \quad [3.88d]$$

Finora si è considerato il *flusso istantaneo di quantità di moto*, ma, in generale, siamo interessati al *Flusso Medio di Quantità di Moto*. Se consideriamo solo $F_{p_x}^y$ dato dalla (3.88b) e ne facciamo la media tra l'istante t_1 e l'istante $t_2 = t_1 + \tau$, utilizzando l'ipotesi di Reynolds si ottiene:

$$\overline{F_{p_y}^x} = \frac{\rho}{\tau} \cdot \int_{t_1}^{t_1+\tau} [\overline{U} + u'(t)] \cdot [\overline{V} + v'(t)] \cdot dt = \rho \cdot [\overline{U} \cdot \overline{V} + \overline{u'v'}] \quad [3.90a]$$

La stessa metodologia può essere applicata a tutte le 9 componenti del *tensore* che rappresenta il flusso di quantità di moto, giungendo alla definizione seguente di *Flusso Medio di Quantità di Moto* in un punto P del *PBL* :

$$F_p = \rho \cdot \begin{vmatrix} \overline{U \cdot U} & \overline{V \cdot U} & \overline{W \cdot U} \\ \overline{U \cdot V} & \overline{V \cdot V} & \overline{W \cdot V} \\ \overline{U \cdot W} & \overline{V \cdot W} & \overline{W \cdot W} \end{vmatrix} + \rho \cdot \begin{vmatrix} \overline{u'u'} & \overline{v'u'} & \overline{w'u'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'v'} & \overline{w'v'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'w'} \end{vmatrix} \quad [3.90b]$$

in cui il primo termine del membro di destra rappresenta il *Flusso Cinematico della Quantità di Moto* ed il secondo il *Flusso Turbolento di Quantità di Moto*. A questo punto è possibile fare alcune considerazioni:

- il *Flusso Turbolento Medio di Quantità di Moto*, a meno di una costante di proporzionalità pari alla densità dell'aria, coincide con la *matrice di varianza-covarianza* delle 3 componenti del vento;
- è possibile dimostrare che quando il moto è turbolento al *tensore degli sforzi viscosi* si sovrappone un'altra causa di deformazione delle particelle d'aria, derivante dai moti turbolenti. Ciò è riassunto nel tensore degli sforzi turbolenti, normalmente indicato come *tensore degli Sforzi di Reynolds* che è dato da:

$$\tau_{Reynolds} = -\rho \cdot \begin{vmatrix} \overline{u'u'} & \overline{v'u'} & \overline{w'u'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'v'} & \overline{w'v'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'w'} \end{vmatrix} \quad [3.90c]$$

che, a parte il segno è il *Flusso Turbolento di Quantità di Moto*. In particolare, detto τ il tensore degli sforzi di Reynolds, si ha che $F_p = -\tau$;

- se si considera un punto P entro il *SL* ed un terreno piatto, lo *Sforzo Verticale di Taglio* si riduce a due sole componenti ($\tau_{xz} = -\rho \overline{u'w'}$) , ($\tau_{yz} = -\rho \overline{v'w'}$) ed il modulo di tale vettore risulta pari a:

$$|\tau_{Reynolds}| = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \quad [3.91a]$$

Storicamente è stata definita una *velocità di scala* u_* , nota come *friction velocity* , nel modo

seguinte:

$$u_*^2 = \sqrt{u'w'^2 + v'w'^2} \quad [3.91b]$$

da cui si ha ovviamente che:

$$|\tau_{Reynolds}| = \rho \cdot u_*^2 \quad [3.91c]$$

Infine, riprendendo in considerazione il Flusso Turbolento di Calore Sensibile H_0 (o il Flusso di Galleggiamento H_{0v}), durante una *giornata non perturbata* (senza temporali, pioggia, ecc.), tale variabile presenta delle situazioni tipiche:

- nelle situazioni convettive, cioè nelle ore diurne soleggiate, quando l'apporto di energia solare garantisce il trasferimento al *PBL* dell'energia necessaria per la generazione di vortici convettivi di grandi dimensioni, è necessario che $H_0 > 0$ (ed anche H_{0v}). Quindi $\overline{w'\theta'} > 0$ e $\overline{w'\theta_v'} > 0$.
- nelle situazioni stabili, cioè in ore notturne poco ventose, H_0 e H_{0v} sono negativi e ciò implica che $\overline{w'\theta'} < 0$ e $\overline{w'\theta_v'} < 0$. La turbolenza è quindi di origine meccanica con vortici di dimensione estremamente limitata;
- nelle situazioni adiabatiche, corrispondenti alla transizione da situazioni convettive a situazioni stabili (e viceversa) o a ore con velocità del vento elevate, $H_0 = H_{0v} = 0$ e quindi $\overline{w'\theta'} = 0$ e $\overline{w'\theta_v'} = 0$.

La convettività è quindi attiva solo in presenza di un adeguato apporto energetico solare, mentre la turbolenza meccanica è sempre presente e costituisce l'unico contributo nelle situazioni adiabatiche e stabili. Per questo ed anche per come è stata definita, la *friction velocity* u_* risulta sempre positiva.

3.1.4.5 I parametri caratteristici della turbolenza atmosferica

È conveniente ora riassumere gli elementi essenziali fin qui esposti. Di tutti i parametri statistici che possono essere ottenuti dalle fluttuazioni delle variabili meteorologiche nel *PBL*, i momenti centrali del secondo ordine in cui sono presenti le componenti del vento sono i più importanti, visto che ad essi è attribuito il compito di *trasportare* le principali proprietà del fluido.

Alle varianze delle tre componenti cartesiane del vento è attribuito il compito di trasportare attraverso il *PBL* una porzione di energia, quella che deriva dai movimenti turbolenti delle masse d'aria e che si somma alla porzione di energia cinetica derivante dal moto medio delle masse d'aria. Alle covarianze (in cui è presente una delle componenti del vento) è attribuito, invece, il significato di flusso che una particolare proprietà (temperatura, umidità, quantità di moto, concentrazione di sostanze passive) subisce a causa del movimento turbolento ed irregolare dell'aria nel *PBL*. Di fatto questi flussi sono le *forzanti del PBL* che ne alimentano la turbolenza.

Il parametro che descrive la forzante convettiva del *PBL* è sicuramente il flusso turbolento di calore sensibile definito come:

$$H_0 = \rho C_p \overline{w'\theta'} \quad [3.92a]$$

Il parametro che descrive lo scambio di vapor d'acqua tra il suolo ed il *PBL* è il Flusso Turbolento di Calore Latente H_E , dato da

$$H_E = \lambda \cdot \overline{a'w'} \quad [3.92b]$$

La *turbolenza meccanica*, derivante dallo *shear* del vento, è parametrizzata dalla *friction velocity* u_* (*velocità di scala dello Strato Superficiale*), definita come:

$$u_* = \left[\overline{u'w'^2} + \overline{v'w'^2} \right]^{0.25} \quad [3.92c]$$

Questi parametri sono necessari e sufficienti per descrivere completamente le forzanti convettive e meccanica del *SL*, tuttavia è consuetudine definire altri parametri caratteristici:

- la *temperatura di scala* T_* : essa nasce dal fatto che H_{0v} , diviso per ρC_p ha le dimensioni di una velocità per una temperatura. Da ciò deriva la definizione di una temperatura di scala seguente:

$$T_* = -\overline{w'\theta'_v} / u_* \quad [3.92d]$$

- l'*umidità di scala* q_* : tale parametro viene definito nel modo seguente:

$$q_* = -\overline{w'a'} / u_* \quad [3.92e]$$

- la *lunghezza di Monin-Obukhov* L : essa è stata introdotta dai due ricercatori russi per definire una *lunghezza di scala* per il *SL*. Essa è definita come:

$$L = -\frac{\overline{T}}{kg} \frac{u_*^3}{\overline{w'\theta'_v}} \quad [3.92f]$$

dove T è la temperatura media del *SL*, g è l'accelerazione di gravità e k è la costante di von Karman (pari a 0.4). L , in valore assoluto, è la quota in corrispondenza della quale si ha il bilancio tra la turbolenza meccanica e la turbolenza termica e quindi tale valore è in pratica dello stesso ordine dell'estensione verticale della *SL*. È interessante osservare come le situazioni convettive siano caratterizzate da valori di L negativi, mentre le situazioni stabili da un valore positivo. È poi immediato verificare che in modulo L aumenta all'avvicinarsi dell'adiabaticità, tendendo a $+\infty$ se l'avvicinamento avviene da situazioni stabili e a $-\infty$ se da situazioni convettive. Questo bizzarro comportamento di L ne fa un parametro scomodo nella pratica; come si vedrà nel seguito, verrà estesamente utilizzato il parametro $1/L$ o meglio ancora z/L , dove z è la quota di misura, che non presenta questi problemi.

Riassumendo quanto si è detto, risulta che:

- la velocità di frizione u_* è sempre positiva, e ciò è la diretta conseguenza del fatto che la turbolenza meccanica è sempre presente e deriva dallo *shear* del vento,
- nelle situazioni convettive, $H_{0v} > 0$ e $L < 0$,
- nelle situazioni stabili, $H_{0v} < 0$ e $L > 0$,
- nelle situazioni adiabatiche $H_{0v} = 0$ e $|L| = \infty$.

Quelli sopra elencati sono i parametri caratteristici della turbolenza entro il *SL*. Ad essi si devono affiancare altri parametri che completano il quadro della turbolenza dell'intero *PBL*.

Nelle situazioni convettive, la *lunghezza di scala dell'intero PBL* è la sua estensione verticale z_i . Oltre a ciò si definisce anche una *velocità di scala convettiva* w_* , data da:

$$w_* = \left(\frac{g}{T} \cdot \overline{w'\theta'_v} \cdot z_i \right)^{1/3} \quad [3.92g]$$

A tale variabile (ovviamente non definibile nelle situazioni stabili e normalmente posta arbitrariamente a zero in tali situazioni) si può attribuire il significato di velocità ascensionale caratteristica degli *eddy* entro il *ML*. Questa velocità è normalmente piuttosto rilevante; in effetti, se si

considera una tipica situazione convettiva con $T = 300\text{K}$, $H_{ov} = 150 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ e $z_i = 1000$, w_* risulta pari a $2.6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Ciò comporta che un vortice turbolento che si forma al suolo impiega un tempo pari a circa 10 minuti per raggiungere la sommità del *PBL*! Questa considerazione rafforza ulteriormente la scelta di un periodo di mediazione di $15\div 60$ minuti per le variabili meteorologiche.

Per quanto riguarda invece il *PBL stabile*, la velocità di scala caratteristica è solo la *friction velocity* e come scala spaziale caratteristica può essere considerata solo la sua estensione verticale h_m .

3.2 ANALISI NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

Nella prima parte del capitolo abbiamo predisposto la struttura statistica con cui trattare i campi meteorologici nell'ipotesi che tali variabili siano descrivibili come campi stocastici del tutto generici. Questo apparato statistico verrà impiegato nel prossimo capitolo e vedremo che ci condurrà ad una riformulazione del problema fluidodinamico più trattabile in pratica. In effetti giungeremo ad una struttura matematica che consentirà di simulare e prevedere lo stato e l'evoluzione dell'atmosfera in generale e del *PBL* in particolare.

In questa seconda parte del capitolo ci faremo guidare dalle misure, ormai molto numerose, che vengono realizzate nel *PBL* ed in laboratorio. Mentre le misure in campo tuttora soffrono del fatto che i punti di misura sono necessariamente poco numerosi, prevalentemente localizzati nei pressi del suolo ed inevitabilmente limitati all'analisi di serie temporali, gli esperimenti fisici in laboratorio offrono molti più elementi su cui riflettere. Possono essere ripetuti, le condizioni sperimentali possono essere accuratamente controllate e le misure possono essere sia spaziali che temporali. Un esempio splendido in questo senso è dato dal lavoro di quasi un decennio di Willis e Deardorff (1974, 1976a, 1976b, 1978, 1981) che hanno esplorato in laboratorio i segreti del *PBL* e della dispersione degli inquinanti in aria e che hanno prodotto la maggior parte delle informazioni che ancora oggi usiamo e che faticosamente ricaviamo nelle attività sperimentali in campo. Ciò che emerge dalla lettura di queste misure è la struttura intricata presentata dagli andamenti spaziali e temporali delle variabili meteorologiche in condizioni di turbolenza e ciò appare ad un primo sguardo una sfida a qualsiasi tipo di analisi.

Ad una lettura più attenta, però, soprattutto degli esperimenti in laboratorio, ciò che si nota è un modello concettuale, totalmente congruente col modello stocastico generico presentato in precedenza. Secondo questo nuovo modello concettuale, deducibile immediatamente dagli esperimenti, l'aria dell'intero *PBL* è costituita da un insieme di strutture coerenti o parzialmente coerenti di varie dimensioni ed in continua evoluzione nello spazio e nel tempo. Ogni struttura di questo tipo viene chiamata *vortice (eddy)*. Essa si genera, come visto, sia per effetti convettivi che per effetti meccanici, viene trascinata dal moto medio delle masse d'aria ed evolve in continuazione. Kolmogorov ha studiato questo modello giungendo a formulare una celebre ipotesi che sarà l'argomento principale del Cap. 5 e che sta alla base della teoria della turbolenza atmosferica. Anticipando sinteticamente ciò, si può dire che i vortici nascono di dimensioni più o meno ragguardevoli (in pratica dello stesso ordine di grandezza dell'estensione verticale del *PBL*), quasi sempre a struttura asimmetrica e polarizzata direzionalmente dal moto medio delle masse d'aria ed evolvono disgregandosi progressivamente in vortici di dimensione sempre più piccole fino a scomparire. Ognuna di queste strutture porta con sé dell'energia che progressivamente trasferisce ai vortici figli di dimensioni inferiori fino a che questa energia viene totalmente dissipata in calore. Se ci ponessimo con un anemometro in un punto qualsiasi del *PBL* (o in un punto qualsiasi della struttura sperimentale di Willis e Deardorff), ciò che rileveremmo è un segnale delle tre componenti della velocità dell'aria estremamente irregolare e tormentato. Ad *occhio* però non ci sfugge il comportamento medio del segnale (il moto medio delle masse d'aria) e non ci sfugge neppure il fatto che le irregolarità, se viste con maggior attenzione, pre-

sentano caratteristiche approssimativamente periodiche. Ciò che ci proponiamo in questa seconda parte del capitolo è mettere a punto delle tecniche matematico-statistiche in grado di far emergere dal caos i vortici turbolenti e l'energia ad essi associata.

Molte sono le tecniche matematiche che possono candidarsi a tale scopo. La tecnica delle Wavelets potrebbe essere la più indicata, ma ad oggi non è immediato un loro utilizzo estensivo nell'ambito della turbolenza atmosferica. La trasformata di Laplace potrebbe essere un buon candidato, ma il fatto che essa sia decisamente più parente dei fenomeni impulsivi che di quelli periodici la esclude di fatto dal gioco. La *gloriosa* analisi di Fourier pare decisamente lo strumento più indicato allo scopo, vista la sua versatilità intrinseca e la sua dichiarata vocazione alla descrizione di fenomeni periodici o quasi periodici. Per questo sarà proprio l'analisi di Fourier il tema che svilupperemo e che applicheremo nei capitoli successivi.

Ma che tipo di analisi dobbiamo fare? Un'analisi delle serie temporali, cioè lo studio dei processi stocastici che rappresentano l'andamento nel tempo di una generica variabile meteorologica in un punto dello spazio o un'analisi dei campi stocastici, il vero tema della nostra ricerca? In linea teorica, non ci sono dubbi: l'analisi da fare è quella dei campi, quindi un'analisi *nello spazio*. Ci arriveremo, ma le complicazioni formali sono numerose e la possibilità di avere riscontri sperimentali in campo è veramente scarsa al livello attuale della tecnologia disponibile. D'altro canto, un'analisi *nel tempo* di una serie storica è decisamente più semplice, si fonda su una solida base dell'analisi dei segnali ed ha riscontri sperimentali in campo numerosi e facilmente trattabili. Che fare?

Dovendo mantenere una linea espositiva coerente, è stata realizzata una sintesi ragionevolmente completa dell'analisi di Fourier delle serie storiche che costituisce l'Appendice C. In essa si presenterà il consueto materiale relativo all'analisi dei segnali, sia continui che discreti, e fornirà le basi matematiche su cui poggiare il resto del ragionamento. Oltre a ciò, in un primo insieme dei paragrafi si studierà nei dettagli l'analisi nel tempo dei *segnali meteorologici* e si impiegherà l'ipotesi di Taylor per ricondurre tale analisi all'analisi nella direzione *streamline* (sottovento). Infine si tratterà il problema generale dell'analisi di Fourier nello spazio tridimensionale e si evidenzierà il legame esistente tra ciò che si ottiene da questa analisi e quanto si ottiene dall'analisi nel tempo combinata con l'ipotesi di Taylor. L'esposizione è abbastanza elementare e non completamente rigorosa, per diminuirne le difficoltà analitiche. Chi fosse interessato ad un'esposizione formalmente più corretta può far riferimento a Monin e Yaglom (2007b).

3.2.1 L'ANALISI SPETTRALE DI PROCESSI E CAMPI STOCASTICI

Poniamoci in un punto del *PBL* e consideriamo le variabili meteorologiche in questo punto. Esse possono essere descritte come processi stocastici che possiamo ritenere stazionari, se considerati in un opportuno orizzonte temporale. Una volta effettuato un campionamento, si otterranno degli andamenti temporali, ovviamente relativi al punto considerato. L'obiettivo che ci si pone è quello di isolare le differenti scale di moto sulla base delle realizzazioni disponibili. La trattazione che segue è decisamente poco rigorosa, ma sufficiente per i nostri scopi. Per una trattazione più rigorosa si rimanda a Monin e Yaglom (2007b) e a Pope (2000).

3.2.1.1 Concetti di base

Definizioni

Consideriamo un processo stocastico $U(t)$ con realizzazione $u(t)$. Tale processo (per esempio, una delle componenti del vento) sia stazionario ed anche ergodico con valor medio noto. La condizione di ergodicità, poi, garantisce che l'analisi nel tempo di una realizzazione equivale all'analisi dell'insieme di tutte le possibili realizzazioni del processo. La conoscenza del valor medio, costante nel tempo per la stazionarietà del processo, ci consente inoltre di individuare l'andamento della fluttuazione $u'(t)$, anch'esso un processo stocastico stazionario ed ergodico. Nel seguito, senza perdere in generalità, si assumerà sempre che i processi stocastici considerati

siano a media nulla. Si supponga, inoltre, di conoscere la relativa funzione di auto-correlazione $R_{uu}(\tau)$ che dipende solo dal *time-lag* τ . Dato, poi, che si sta considerando la fluttuazione attorno al valor medio, la funzione di auto-correlazione coincide con la funzione di auto-covarianza.

Anche se a priori non si può dire nulla sulle caratteristiche analitiche di tale funzione, l'evidenza sperimentale ci assicura che essa, oltre che essere simmetrica e pari, presenta una rapida diminuzione con l'aumentare del *time-lag*, come si è detto in precedenza. Come noto:

$$R_{uu}(\tau) = E[u'(t) \cdot u'(t + \tau)] \quad [3.93a]$$

che, quando $\tau = 0$, risulta essere:

$$R_{uu}(0) = \sigma_u^2 \quad [3.93b]$$

Se la variabile è una delle componenti del vento, $R_{uu}(0)$ è due volte l'energia cinetica turbolenta specifica associata alla componente della velocità. Ipotizziamo, inoltre, che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_{uu}(\tau)| \cdot d\tau < \infty \quad [3.93c]$$

cosa sempre vera in pratica per un andamento temporale di lunghezza finita. In questo caso, ricordando quanto riportato nell'Appendice C, è possibile definire una Trasformata di Fourier della funzione di auto-correlazione. In pratica la *Trasformata di Fourier* vale:

$$S_{uu}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uu}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad [3.94a]$$

dove con f si è indicata la frequenza (Hz) e con j l'unità immaginaria. Da questa relazione è possibile riottenere la funzione di autocorrelazione mediante l'*antitrasformata*:

$$R_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{uu}(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} df \quad [3.94b]$$

La coppia di relazioni (3.94) prendono il nome di relazioni di Wiener-Khinchine e la funzione $S_{uu}(f)$ è nota come *densità spettrale two-sided* o *spettro*.

E' interessante notare come queste relazioni ci indichino un nuovo modo di descrivere il processo stocastico. Infatti, il processo stocastico considerato condensa completamente nel dominio del tempo le proprie auto-dipendenze nella funzione di auto-correlazione (coincidente con la funzione di auto-covarianza quando il processo ha media nulla), funzione che stabilisce ai diversi valori di *time-lag* τ il grado di auto-dipendenza e quindi di *memoria* del processo. Questa descrizione, comunque completa, non è molto espressiva. Se consideriamo, invece, la (3.94b) vediamo come questo grado di auto-correlazione del processo (la funzione di auto-correlazione, appunto) può essere vista come la sovrapposizione di infiniti segnali periodici complessi (*armoniche*), ciascuno a differente frequenza f e ciascuno *pesato* dai pesi dati dalla (3.94a).

Dato che ciascuna armonica è caratterizzata da un ben precisa frequenza (e quindi da un ben preciso periodo), l'analisi spettrale del segnale fa emergere le varie scale temporali che lo influenzano. Infatti, si vede immediatamente che, quando il *time-lag* diventa nullo, si ha che:

$$R_{uu}(0) = \sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{uu}(f) \cdot df \quad [3.94c]$$

Se la variabile considerata è una delle componenti del vento, è immediato vedere che il peso con cui tale segnale è scomposto in armoniche rappresenta il doppio dell'energia cinetica turbolenta attribuibile alla singola armonica.

Prima di procedere con la discussione, è indispensabile ricordare che coesistono nella letteratura scientifica molte convenzioni con cui trasformare ed antitrasformare il segnale. Quella qui presentata, basata sulla frequenza f , è la convenzione maggiormente adottata in matematica e nell'analisi dei segnali, mentre nei testi di fluidodinamica sono presenti molte altre convenzioni, prevalentemente basate sulla *frequenza angolare* $\omega = 2\pi f$. Tra tutte queste, quella più comune è (Monin e Yaglom, 2007b; Pope, 2000) la seguente:

$$\Phi_{uu}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uu}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \quad [3.95a]$$

$$R_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{uu}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega \quad [3.95b]$$

Dato che spesso è conveniente ragionare in termini di frequenza angolare piuttosto che in termini di frequenza f , è necessario stabilire delle regole per passare da una rappresentazione all'altra. Per fare ciò, si osservi che, perché ci sia congruenza tra le due convenzioni bisogna che le (3.94b) e (3.95b) siano uguali, cioè che:

$$\begin{aligned} R_{uu}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{uu}(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{uu}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \cdot \Phi_{uu}(\omega) \cdot e^{j2\pi f\tau} df \end{aligned} \quad [3.96a]$$

cioè:

$$S_{uu}(f) = 2\pi \cdot \Phi_{uu}(\omega) \quad [3.96b]$$

E' immediato constatare come l'impiego della frequenza angolare consenta una maggiore compattezza nella scrittura delle diverse relazioni spettrali, anche se l'uso della frequenza f è molto più comodo quando si debbano analizzare le misure.

La funzione di autocorrelazione di un processo stocastico reale è una funzione reale e pari, mentre lo spettro è, in generale, una funzione complessa. Perché la funzione di auto-correlazione sia reale è necessario, ricordando la relazione di Eulero per i numeri complessi, che:

$$\begin{aligned} R_{uu}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{uu}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{uu}(\omega) \cdot (\cos \omega\tau + j \sin \omega\tau) \cdot d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{uu}(\omega) \cdot \cos \omega\tau \cdot d\omega = 2 \int_0^{+\infty} \Phi_{uu}(\omega) \cdot \cos \omega\tau \cdot d\omega \end{aligned} \quad [3.97a]$$

E' interessante notare come nell'ultima espressione a destra della relazione l'integrale sia esteso all'intero semiasse positivo delle frequenze, cosa decisamente più naturale dal punto di vista fisico. Dato poi che la funzione di auto-correlazione è una funzione pari, $R_{uu}(\tau)$ deve essere uguale a $R_{uu}(-\tau)$ e quindi:

$$\begin{aligned} \Phi_{uu}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uu}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uu}(-\tau) \cdot e^{j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uu}(\tau) \cdot \cos \omega\tau \cdot d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} R_{uu}(\tau) \cdot \cos \omega\tau \cdot d\tau \end{aligned} \quad [3.97b]$$

Anche in questo caso, nell'ultima espressione a destra della relazione precedente l'integrale è

esteso all'intero semiasse positivo dei *time-lag*.

Queste relazioni rappresentano un'altra espressione, decisamente più semplice, delle relazioni di Wiener-Khinchine per una funzione di autocorrelazione reale e pari. Esse suggeriscono, poi, una più comoda alternativa all'utilizzo della densità spettrale *two-sided*. Infatti, si può definire una densità spettrale one-sided come:

$$G_{uu}(f) = 2S_{uu}(f) = 4 \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau) \cdot \cos 2\pi f \tau \cdot d\tau = 4\pi \cdot \Phi_{uu}(\omega) \quad [3.98a]$$

cioè:

$$R_{uu}(\tau) = \int_0^{+\infty} G_{uu}(f) \cdot \cos 2\pi f \tau \cdot df \quad [3.98b]$$

Se si opera in frequenza angolare, le relazioni equivalenti alle precedenti sono:

$$E_{uu}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} R_{uu}(\tau) \cdot \cos \omega \tau \cdot d\tau \quad [3.98c]$$

$$R_{uu}(\tau) = \int_0^{+\infty} E_{uu}(\omega) \cdot \cos \omega \tau \cdot d\omega \quad [3.98d]$$

$$E_{uu}(\omega) = 2 \cdot \Phi_{uu}(\omega) \quad [3.98e]$$

Fig. 3.14: andamento delle tre componenti del vento in una situazione convettiva nei pressi del suolo.

Nel Cap.12 verrà presentato il metodo per poter ottenere le densità spettrali dalle misure che si

realizzano nel *PBL*. Nelle figure che seguono vengono presentati alcuni esempi di densità spettrali *one-sided*. I processi stocastici considerati sono le tre componenti del vento e di essi è stata considerata una realizzazione rilevata in prossimità del suolo durante una situazione convettiva (*Fig. 3.14*). Le densità spettrali *one-sided* relative ai segnali di *Fig.3.14*, ottenute col metodo descritto al Cap.12, sono riportate nelle *Figg. 3.15* e *3.16*. Rimandando ai capitoli successivi una discussione relativa alla loro forma funzionale, per il momento è necessario fare alcuni commenti su come esse sono state rappresentate graficamente. In primo luogo si nota che per una generica variabile x :

$$\sigma_x^2 = \int_0^{\infty} G_{xx}(f) \cdot df = \int_0^{\infty} f \cdot G_{xx}(f) \cdot d(\ln f) \quad [3.99]$$

Fig. 3.15: spettro della componente longitudinale e trasversale del vento il cui andamento è rappresentato in Fig. 3.14

Fig. 3.16: spettro della componente verticale del vento il cui andamento è rappresentato in Fig. 3.14

Quindi l'area sotto la funzione $G_{xx}(f)$ in un diagramma lineare in f è uguale all'area sotto la funzione $f \cdot G_{xx}(f)$ in un diagramma semilogaritmico ed entrambe le aree sono pari alla varianza di x . In effetti, nelle figure la densità spettrale moltiplicata per la frequenza (prodotto che ha le dimensioni della varianza) è rappresentata in un diagramma semilogaritmico in frequenza e ciò preserva la varianza, ma un'altra ragione che sta alla base di questa rappresentazione è che la funzione $f \cdot G_{xx}(f)$ tende a zero quando la frequenza tende sia a zero che a infinito e quindi avrà uno o più massimi a frequenze finite. Il reciproco delle frequenze in corrispondenza dei massimi vengono interpretate come i tempi principali di scala del moto.

Rappresentazione spettrale delle derivate di processi stocastici stazionari

Dato un processo stocastico stazionario $U(t)$ con generica realizzazione $u(t)$, si definisce *derivata del processo* la funzione du/dt definita come:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{du}{dt} - \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} \right| = 0 \quad [3.100a]$$

Questa definizione comporta il fatto che la presenza dell'operatore media d'insieme elimina la dipendenza della derivata dalle singole realizzazioni, facendo sì che la derivata sia caratteristica dell'intero processo. Un processo stocastico che ammette la derivata definita sopra è detto *processo differenziabile* ed in questo caso si può dimostrare che ogni sua realizzazione è singolarmente differenziabile. In modo analogo è possibile definire derivate di un generico ordine n . Concettualmente è abbastanza facile immaginare di costruire funzioni di auto-covarianza per le derivate di ordine n . Per vedere ciò, operiamo come segue. Per semplicità e congruenza con Monin e Yaglom (2007b), qui di seguito invece di considerare la densità spettrale *two-sided*, consideriamo l'equivalente densità spettrale *one-sided* $E_{uu}(\omega)$.

Si può dimostrare che esiste una relazione tra la funzione di auto-correlazione $R(\tau)$ del processo $U(t)$ e la funzione di autocorrelazione $R_n(\tau)$ della sua derivata n -esima e che esiste anche una relazione tra lo spettro *one-sided* $E(\omega)$ e l'equivalente spettro $E_n(\omega)$ di $R_n(\tau)$ e tali relazioni sono:

$$R_n(\tau) = (-1)^n \frac{d^{2n} R(\tau)}{d\tau^{2n}} \quad [3.100b]$$

$$E_n(\omega) = \omega^{2n} E(\omega) \quad [3.100c]$$

Alcune considerazioni su funzioni di auto-correlazione e spettri

E' stato formulato e dimostrato da Khinchin (Monin e Yaglom, 2007b) che: *ogni funzione che possiede una Trasformata di Fourier non negativa ha le caratteristiche per poter essere una funzione di correlazione per un processo stocastico stazionario*. Perciò, per verificare se una funzione candidata può essere o meno una funzione di auto-correlazione di un processo stocastico stazionario, bisogna in primo luogo calcolare la relativa Trasformata di Fourier e successivamente verificare che essa sia sempre non negativa. Alcune funzioni candidate ad essere funzioni di autocorrelazione sono elencate qui di seguito:

$$R(\tau) = C \cdot e^{-\alpha|\tau|} \quad [3.101a]$$

$$R(\tau) = C \cdot e^{-\alpha\tau^2} \quad [3.101b]$$

$$R(\tau) = C \cdot e^{-\alpha\tau} \cos \beta\tau \quad [3.101c]$$

$$R(\tau) = C \cdot (\alpha\tau)^\nu K_\nu(\alpha\tau) \quad [3.101d]$$

In esse C , α e β sono costanti positive, ν è un intero positivo e $K_\nu(x)$ è la Funzione di Bessel modificata del terzo ordine. Le corrispondenti Trasformate di Fourier $E(\omega)$ sono:

$$E(\omega) = \frac{2C\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \quad [3.102a]$$

$$E(\omega) = \frac{4C\alpha}{\pi} \cdot \frac{\sin^2(\omega/2\alpha)}{\omega^2} \quad [3.102b]$$

$$E(\omega) = \frac{2C\alpha(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{\pi \left[(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2 \right]} \quad [3.102c]$$

$$E(\omega) = \frac{2^{\nu-1} C \cdot \Gamma(\nu+1/2) \cdot \alpha^{2\nu}}{\sqrt{\pi} (\alpha^2 + \omega^2)^{\nu+1/2}} \quad [3.102d]$$

Come si può vedere, le Trasformate di Fourier delle (3.101) sono tutte positive e quindi tali funzioni possono essere funzioni di auto-correlazione di processi stocastici stazionari.

Spettri di potenza

Considerando l'andamento degli spettri alle alte frequenze (elevati valori di ω e quindi di f), si nota come essi diminuiscano molto rapidamente in un modo simile ad una legge di potenza. Come vedremo al Cap.5, questa non è solo una sensazione visiva, ma anche una realtà. Partendo da questa constatazione, cerchiamo di studiare più approfonditamente spettri di questo genere. Tra l'altro, se consideriamo la possibile funzione di auto-correlazione (3.101d), vediamo che lo spettro corrispondente (3.102d) alle alte frequenze è sicuramente uno spettro di potenza. Prima, però, di addentarci nella discussione, è conveniente utilizzare anche la *funzione di struttura del secondo ordine* $D(\tau)$ che dobbiamo mettere in relazione alla funzione di auto-correlazione. In effetti, è facile verificare che:

$$D(\tau) = \overline{[u(t) - u(t+\tau)]^2} = 2 \cdot [R(0) - R(\tau)] \quad [3.103a]$$

e quindi:

$$D(\tau) = 2 \int_0^{\infty} [1 - \cos \omega\tau] \cdot E(\omega) \cdot d\omega \quad [3.103b]$$

Premesso ciò, immaginiamo che alle alte frequenze:

$$E(\omega) \approx A \cdot \omega^{-p} \quad [3.103a]$$

e che per *time-lag* piccoli:

$$D(\tau) = \tau^q \quad [3.103b]$$

L'obiettivo è capire il significato dei particolari valori di p e q e la connessione tra loro.

In primo luogo sappiamo che $R(0)$ è pari alla varianza del processo (che abbiamo supposto essere a media nulla) e richiediamo che tale varianza sia finita. Dato che si ha:

$$R(0) = \int_0^{\infty} A \omega^{-p} d\omega = \frac{A}{1-p} \left[\omega^{1-p} \right]_0^{\infty} \quad [3.103b]$$

perché la varianza sia finita e (e quindi l'integrale converga) è necessario che $p > 1$.

In secondo luogo, possiamo richiedere al processo stocastico che sia anche differenziabile e che l'auto-correlazione della derivata di ordine n abbia anch'essa varianza finita. Pertanto, ricordando le relazioni (3.98) che descrivono le funzioni di auto-correlazione delle derivate del processo ed i rispettivi spettri, si ha che:

$$\overline{\left(\frac{d^n u}{dt^n}\right)^2} = R_n(0) = \int_0^\infty E_n(\omega) \cdot d\omega = \int_0^\infty \omega^{2n} E_n(\omega) \cdot d\omega \quad [3.104a]$$

e quindi

$$\overline{\left(\frac{d^n u}{dt^n}\right)^2} = \int_0^\infty \omega^{2n} E_n(\omega) \cdot d\omega = A \int_0^\infty \omega^{2n-p} \cdot d\omega = \left[\frac{A \cdot \omega^{1+2n-p}}{1+2n-p} \right]_0^\infty \quad [3.104b]$$

Perché la varianza sia finita (e quindi l'integrale converga) è necessario che sia soddisfatta anche la seguente disequazione: $p > 2n + 1$.

In terzo luogo consideriamo la funzione di struttura del secondo ordine e la funzione di auto-correlazione data dalla funzione (3.99d). Tale funzione è particolarmente complessa, ma per piccoli valori di τ può essere approssimata (Pope, 2000) in modo tale che:

$$D(\tau) = \begin{cases} 4 \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} (\alpha\tau)^{2\nu} \dots (\nu < 1) \\ 2(\nu-1) \cdot (\alpha\tau)^2 \dots (\nu > 1) \end{cases} \quad [3.105]$$

quindi, la funzione di struttura presenta un andamento secondo una legge di potenza con esponente:

$$\begin{aligned} q &= 2\nu, \text{ se } \nu < 1 \\ q &= 2, \text{ se } \nu > 1 \end{aligned}$$

Da ultimo, se si considera lo spettro (3.100d) corrispondente alla funzione di correlazione espressa dalla (3.99d), si ha che la potenza dello spettro alle alte frequenze deve essere:

$$p = 1 + 2\nu$$

In sintesi, tra l'esponente dello spettro p , l'esponente della legge di potenza che descrive la funzione di struttura del secondo ordine q , il grado di differenziabilità del processo stocastico n ed il parametro ν della (3.100d) si ha che:

$$\begin{aligned} p &> 1 \\ p &> 2n + 1 \\ q &= 2\nu, \text{ se } \nu < 1 \\ q &= 2, \text{ se } \nu > 1 \\ p &= 1 + 2\nu \end{aligned}$$

A questo punto è solo l'evidenza sperimentale che potrà indicare il valore appropriato di p e q . Se, come vedremo al Cap.5, risulta evidente sperimentalmente e teoricamente che $p = 5/3$, allora si avrà che $\nu = 1/3$, $q = 2/3$ ed il processo non risulta differenziabile.

Tempi e lunghezze euleriane di scala

La funzione di autocorrelazione $R(\tau)$ di un processo stocastico stazionario $U(t)$ in qualche modo misura il grado di memoria del proprio stato iniziale che il processo mantiene dopo un *time-lag* τ . E' naturale, quindi, cercare di ottenere da tale funzione un tempo caratteristico di decorrelazione del segnale. Tale tempo caratteristico T_{Eu} , noto come *Tempo caratteristico euleriano di scala* (o anche *tempo integrale di scala*), è definito come:

$$T_{Eu} = \frac{1}{R(0)} \int_0^\infty R(\tau) \cdot d\tau = \frac{1}{\sigma_u^2} \int_0^\infty R(\tau) \cdot d\tau \quad [3.106a]$$

Ricordando la relazione che esiste tra funzione di auto-correlazione e spettro, è facile dimostrare

che:

$$T_{Eu} = \frac{1}{4\sigma_u^2} G_{uu}(f)_{f=0} = \frac{1}{2\sigma_u^2} S_{uu}(f)_{f=0} = \frac{\pi}{2\sigma_u^2} E_{uu}(\omega)_{\omega=0} = \frac{\pi}{\sigma_u^2} \Phi_{uu}(\omega)_{\omega=0} \quad [3.106b]$$

Una volta noto il tempo caratteristico di scala per un dato processo, grazie all'ipotesi di Taylor è immediato ottenere l'equivalente *Lunghezza caratteristica euleriana di scala* (o anche *lunghezza integrale di scala*) L_{Eu} data da:

$$L_{Eu} = U \cdot T_{Eu} \quad [3.106c]$$

dove U è la velocità media del vento.

3.2.1.2 Lo spettro streamline

L'ipotesi di Taylor ci consente di convertire le osservazioni fatte a tempi diversi in misure relative a diversi punti lungo la linea sottovento grazie alla trasformazione: $x = U \cdot t$, dove U è la velocità media del vento. Così facendo, una realizzazione $u(t)$ di una variabile stocastica U si può trasformare in una realizzazione $u(x) = u(U \cdot t)$. Una discussione approfondita sull'argomento viene presentata in Wynggard e Clifford (1977) cui si rimanda il lettore interessato.

A questo punto è possibile costruire una nuova densità spettrale nello spazio piuttosto che nel tempo. In primo luogo le armoniche non saranno più temporali, ma spaziali e al posto della frequenza f , avremo il *numero d'onda* k_1 lungo la *direzione streamline* definito come:

$$k_1 = 2\pi f / U \quad [3.107a]$$

Per ottenere una relazione tra la densità spettrale $G_{uu}(f)$ e l'analogia densità spettrale $F_{uu}(k_1)$, entrambe densità *one-side*, è conveniente considerare la relazione seguente:

$$\int_0^{\infty} G_{uu}(f) \cdot df = \sigma_u^2 = \int_0^{\infty} F_{uu}(k_1) \cdot dk_1 \quad [3.107b]$$

Da questa relazione e considerando che $dk_1 = 2\pi/U \cdot df$, si ha che:

$$G_{uu}(f) = \frac{2\pi}{U} \cdot F_{uu}(k_1)_{k_1=2\pi f/U} \quad [3.107c]$$

e anche:

$$f \cdot G_{uu}(f) = k_1 \cdot F_{uu}(k_1) \quad [3.107d]$$

3.2.1.3 I Cross-spettri

Lo spettro di una serie temporale rivela la distribuzione di energia rispetto alla frequenza. Possiamo sperare anche che, date due segnali (per esempio le componenti u e v del vento), sia possibile assicurarsi a quali frequenze esse siano simili.

Per semplicità, consideriamo due segnali meteorologici a media nulla e stazionarie. La funzione di cross-correlazione tra esse è:

$$R_{uv}(\tau) = E[u(t) \cdot v(t + \tau)] \quad [3.108]$$

e non è una funzione né pari né dispari. Anche in questo caso è possibile ottenere le relazioni di Wiener-Khinchine che, in questo caso, sono:

$$R_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{uv}(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} df \quad [3.109a]$$

$$S_{uv}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uv}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad [3.109b]$$

La funzione $S_{uv}(f)$ (qualunque siano le variabili u e v) è detto *cross-spettro* di u e v . Va ricordato che esiste la seguente relazione di simmetria:

$$R_{uv}(-\tau) = R_{vu}(\tau) \quad [3.110a]$$

e quindi si ha:

$$S_{xy}(-f) = S_{xy}^*(f) = S_{yx}(f) \quad [3.110b]$$

dove con S_{vu}^* si è indicato la complessa coniugata di S_{vu} . Per un *time-lag* nullo, la funzione di cross-correlazione risulta pari alla covarianza tra le due variabili e quindi dalla (3.109a) si ha che:

$$R_{uv}(0) = \overline{u'v'} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{uv}(f) \cdot df \quad [3.111]$$

Il cross-spettro S_{uv} è quindi una funzione complessa della frequenza f e può essere formalmente scomposto in due parti $C(f)$ e $Q(f)$ legate tra loro dalla relazione:

$$S_{uv}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uv}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau = C(f) - jQ(f) \quad [3.112a]$$

dove la parte pari è detta *co-spettro* ed è definita come:

$$C_{uv}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uv}(\tau) \cdot \cos 2\pi f\tau \cdot d\tau = \int_0^{+\infty} [R_{uv}(\tau) + R_{uv}(-\tau)] \cdot \cos 2\pi f\tau \cdot d\tau \quad [3.112b]$$

mentre la parte dispari è detta *spettro di quadratura* ed è definita come:

$$Q_{uv}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uv}(\tau) \cdot \sin 2\pi f\tau \cdot d\tau = \int_0^{+\infty} [R_{uv}(\tau) - R_{uv}(-\tau)] \cdot \sin 2\pi f\tau \cdot d\tau \quad [3.112c]$$

Dato che il cross-spettro è una funzione complessa, può anche essere espresso come:

$$S_{uv}(f) = |S_{uv}(f)| \cdot e^{-j\theta(f)} \quad [3.113a]$$

dove l'*ampiezza del cross-spettro* è data da:

$$|S_{uv}(f)|^2 = [C_{uv}(f)]^2 + [Q_{uv}(f)]^2 \quad [3.113b]$$

e l'*angolo di fase* tra $u(t)$ e $v(t)$ alla frequenza f è:

$$\theta(f) = \tan^{-1}(Q_{uv}(f)/C_{uv}(f)) \quad [3.113c]$$

Normalizzando il quadrato dell'ampiezza con le densità spettrali dei singoli segnali si ottiene la *coerenza* data dalla relazione:

$$\Gamma(f) = \frac{[C_{uv}(f)]^2 + [Q_{uv}(f)]^2}{S_{uu}(f) \cdot S_{vv}(f)} \quad [3.113d]$$

3.2.1.4 Metodi alternativi per determinare le densità spettrali

In precedenza gli spettri ed i cross-spettri sono stati determinati partendo dalle funzioni di auto-correlazione e cross-correlazione e per ottenerli, in pratica, sarebbe stato necessario stimare queste funzioni, cosa che poteva essere fatta con algoritmi di stima ben poco efficienti. Una via alternativa, che di fatto è l'unica realmente utilizzata, è delineata qui di seguito e si basa sulla trasformata di Fourier dei segnali originari.

Per generalità, si considerino due processi stocastici congiunti $X(t)$ e $Y(t)$ che presentano come realizzazione k -esima le funzioni $x_k(t)$ ed $y_k(t)$ in un periodo di campionamento finito T . L'estensione ad un solo processo è del tutto immediata. Definiamo:

$$S_{xy}(f, T, k) = \frac{1}{T} X_k^*(f, T) \cdot Y_k(f, T) \quad [3.114a]$$

dove

$$X_k(f, T) = \int_0^T x_k(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$Y_k(f, T) = \int_0^T y_k(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad [3.114b]$$

Le quantità $X_k(f, T)$ e $Y_k(f, T)$ rappresentano le *trasformate di Fourier finite* delle realizzazioni $x_k(t)$ e $y_k(t)$ rispettivamente, mentre $X_k^*(f, T)$ è la complessa coniugata di $X_k(f, T)$. Queste trasformate di Fourier finite esistono praticamente sempre nelle situazioni pratiche, visto che il tempo di campionamento è necessariamente finito.

Ora dimostriamo che la densità spettrale $S_{xy}(f)$ deriva dalla densità campionaria $S_{xy}(f, T, k)$ secondo la relazione seguente:

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E[S_{xy}(f, T, k)] \quad [3.114d]$$

Infatti, usando differenti variabili d'integrazione per evitare confusioni, la (3.114a) diventa:

$$S_{xy}(f, T, k) = \frac{1}{T} \int_0^T x_k(\alpha) \cdot e^{j2\pi f\alpha} d\alpha \cdot \int_0^T y_k(\beta) \cdot e^{-j2\pi f\beta} d\beta =$$

$$\frac{1}{T} \iint_{R_{\alpha\beta}} x_k(\alpha) \cdot y_k(\beta) \cdot e^{-j2\pi f(\beta-\alpha)} d\alpha d\beta \quad [3.115a]$$

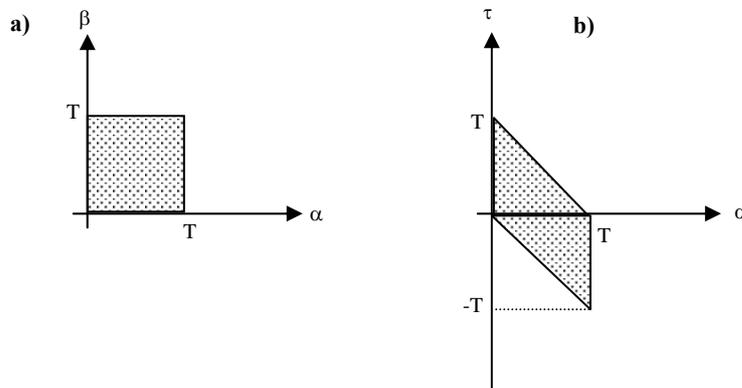


Fig. 3.17: regioni di integrazione nel sistema di variabili (α, β) e (α, τ)

In questa relazione $R_{\alpha\beta}$ è la regione di integrazione, mostrata in Fig.3.17a. Manteniamo, ora, la

variabile di integrazione α e sostituiamo β con $\tau = \beta - \alpha$, quindi $d\tau = d\beta$. La regione di integrazione, originariamente di forma quadrata, ora è cambiata come mostrato in Fig.3.17b. In effetti, si ha che:

$$\int_0^T \int_0^T d\alpha \cdot d\beta = \int_{-T}^0 \int_{-\tau}^T d\alpha \cdot d\tau + \int_0^{T-T} \int_0^{T-\tau} d\alpha \cdot d\tau \quad [3.115b]$$

Pertanto:

$$S_{xy}(f, T, k) = \int_{-T}^0 \left[\frac{1}{T} \int_{-\tau}^T x_k(\alpha) y_k(\alpha + \tau) \cdot d\alpha \right] \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau + \int_0^{T-T} \left[\frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} x_k(\alpha) y_k(\alpha + \tau) \cdot d\alpha \right] \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad [3.115c]$$

Per definizione, la cross-correlazione $R_{xy}(\tau)$ è data dal valore atteso di:

$$R_{xy}(\tau) = E[x_k(\alpha) y_k(\alpha + \tau)]$$

quindi il valore atteso della (3.115c) è:

$$E[S_{xy}(f, T, k)] = \int_{-T}^0 \left[\frac{1}{T} \int_{-\tau}^T R_{xy}(\tau) \cdot d\alpha \right] \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau + \int_0^{T-T} \left[\frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} R_{xy}(\tau) \cdot d\alpha \right] \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) \cdot R_{xy}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

Quando T tende all'infinito, la relazione precedente diventa:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[S_{xy}(f, T, k)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad [3.115d]$$

Abbiamo, quindi dimostrato l'equivalenza tra questo metodo, basato sulla Trasformata di Fourier di realizzazioni di variabili, e quello generale basato sulla conoscenza delle funzioni di correlazione.

L'importanza di questo metodo è molteplice. In primo luogo non è necessario stimare in maniera campionaria le funzioni di correlazione, cosa piuttosto pesante dal punto di vista computazionale. In secondo luogo, è possibile campionare una realizzazione dei processi per un periodo di campionamento T sufficientemente lungo, ripartire queste osservazioni in sottoperiodi più piccoli, stimare lo spettro campionario e stimare il relativo valore atteso. Tutto ciò rende questo metodo l'unico che attualmente viene impiegato nella pratica.

I metodi fin qui introdotti per la rappresentazione spettrale di un processo stocastico non sono completamente corretti dal punto di vista formale e non sono stati usati nelle trattazioni teoriche. Qui di seguito vengono presentati gli elementi essenziali del metodo preferito negli studi teorici. Per i dettagli si rimanda a Monin e Yaglom (2007b). Anche se un processo stocastico $u(t)$ in generale non è né periodico né integrabile, tuttavia sotto condizioni molto larghe, può essere espanso in un altro processo stocastico $Z(\omega)$ secondo la relazione seguente:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dZ(\omega) \quad [3.116a]$$

Questo è noto come Integrale Stocastico di Fourier-Stieltjes. Il processo $Z(\omega)$, che in generale è complesso, ha la proprietà seguente:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-jbt} - e^{-jat}}{-jt} u(t) \cdot dt = Z(b) - Z(a) \quad [3.116b]$$

L'integrale è stato scritto in questo modo in maniera tale che non sia necessario ritenere differenziabile il processo $Z(\omega)$. Per rendere più familiari queste due relazioni, possiamo porre $a = \omega$ e $b = \omega + \Delta\omega$. In questo caso si ha che:

$$\frac{e^{-jbt} - e^{-jat}}{-jt} = \frac{e^{-j\omega t} e^{-j\Delta\omega t} - e^{-j\omega t}}{-jt}$$

Espandendo in serie $e^{-j\Delta\omega t} \cong 1 - j\Delta\omega t$, la relazione precedente diventa:

$$\frac{e^{-jbt} - e^{-jat}}{-jt} \cong \Delta\omega \cdot e^{j\omega t}$$

e quindi la (3.116b) può essere riscritta, dopo aver diviso per $\Delta\omega$ ed aver preso il limite per $\Delta\omega \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-jbt} - e^{-jat}}{-jt} u(t) \cdot dt \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} u(t) \cdot dt = \frac{dZ}{d\omega} \quad [3.116c]$$

ipotizzando l'esistenza di $Z(\omega)$. Così, in questo caso, la relazione precedente è la trasformata di Fourier di $u(t)$. Inoltre, la (3.116a) può essere ora riscritta come:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \frac{dZ}{d\omega} d\omega \quad [3.116d]$$

Come detto, il processo $Z(\omega)$ è in generale complesso. Definiamo, ora, la densità spettrale $\Phi(\omega)$ come:

$$\overline{dZ(\omega) \cdot dZ^*(\omega)} = dF(\omega) = \Phi(\omega) \cdot d\omega \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega') \cdot d\omega' \quad [3.117a]$$

La funzione di auto-correlazione di $u(t)$ è $R_{uu}(\tau)$ ed è legata alla densità spettrale dalla relazione:

$$R_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} \Phi(\omega) \cdot d\omega \quad [3.117b]$$

e quindi:

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_{uu}(\tau) \cdot d\tau \quad [3.117c]$$

3.2.2 L'ANALISI SPETTRALE DEI CAMPI STOCASTICI

A questo punto non ci rimane che analizzare i campi stocastici nel dominio delle frequenze. Mentre l'analisi dei processi stocastici vedeva il tempo come elemento essenziale e ricercava nel segnale armoniche temporali, la caratteristica principale dei campi stocastici è proprio la sua spazialità e quindi l'analisi armonica relativa consiste nell'individuare nella sua distribuzione spaziale *armoniche spaziali* cui è dato il nome di *modi di Fourier*.

3.2.2.1 I concetti di base

Si definisce *modo di Fourier* (o armonica spaziale) una funzione complessa del tipo:

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + j \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \quad [3.118a]$$

dove col simbolo \bullet si è indicato il prodotto cartesiano tra due vettori. Tale funzione è un'onda piana che si propaga nella direzione del *vettore numero d'onda* \mathbf{k} e che è costante in tutti i punti dei piani normali a \mathbf{k} . Il modo è quindi una struttura armonica tridimensionale. Il numero d'onda è un vettore e , indicando con k il suo modulo, e con \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 i versori relativi agli assi cartesiani usati, esso può essere scomposto secondo le direzioni cardinali nel modo seguente:

$$\mathbf{k} = k \cdot \mathbf{n} = k_0(\mathbf{e}_1 n_1 + \mathbf{e}_2 n_2 + \mathbf{e}_3 n_3) \quad [3.118b]$$

Di conseguenza, ogni singolo modo può esser visto come la sovrapposizione di tre armoniche spaziali monodimensionali, ciascuna che si propaga nella direzione degli assi cartesiani:

$$e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{k_0 n_1} e^{k_0 n_2} e^{k_0 n_3} \quad [3.118c]$$

Limitiamoci, per semplicità, a considerare il campo stocastico vettoriale ed omogeneo della velocità del moto del fluido. Il fatto che il campo sia stazionario ed omogeneo implica, come visto, che la velocità media sia costante e che quindi possa essere sottratta punto a punto, trasformando il campo originario nel relativo campo delle fluttuazioni. Nel seguito, quindi, considereremo solo il campo delle fluttuazioni $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ e per un campo di questo tipo le funzioni di covarianza e di correlazione coincidono.

Il tensore delle correlazioni tra le componenti cartesiane del moto (costituito da 9 componenti) è dato da:

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \overline{u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \cdot u_j(\mathbf{x})} \quad [3.119a]$$

Come nel caso dell'analisi spettrale dei processi stocastici, anche in questo caso si cerca di esprimere le funzioni di correlazione come combinazione lineare dei modi di Fourier. In pratica, definita la *Trasformata di Fourier Spaziale* del tensore di correlazione come il tensore seguente:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\mathbf{r}) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dr_1 dr_2 dr_3 \quad [3.119b]$$

il corrispondente tensore delle correlazioni è dato dalla combinazione lineare di infiniti modi di Fourier, ciascuno pesato col proprio valore di Φ_{ij} , cioè:

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \cdot e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dk_1 dk_2 dk_3 \quad [3.119c]$$

che è l'*antitrasformata*. Le (3.119) sono le relazioni di Wiener-Khinchine nel caso spaziale. Il tensore complesso Φ_{ij} è detto *spettro della velocità*. È interessante notare come il tensore Φ_{ij} abbia le dimensioni di (velocità)² x (numero d'onda)³. Dato che le dimensioni del numero d'onda sono (lunghezza)⁻¹, le dimensioni di Φ_{ij} sono (velocità)² x (lunghezza)³. Le sue proprietà generali dipendono dalle caratteristiche del tensore di correlazione cui è legato funzionalmente; in particolare si ha che:

- dato che il tensore di correlazione R_{ij} è simmetrico rispetto all'origine ed è una grandezza reale, si ha che:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \Phi_{ij}^*(\mathbf{k}) = \Phi_{ij}(-\mathbf{k}) \quad [3.120a]$$

dove Φ_{ij}^* è il complesso coniugato di Φ_{ij} .

- se il fluido è incomprimibile (ipotesi decisamente buona nel *PBL*) si può dimostrare che vale la seguente relazione di ortogonalità:

$$k_i \Phi_{ij}(\mathbf{k}) = k_j \Phi_{ij}(\mathbf{k}) = 0 \quad [3.120b]$$

- le componenti diagonali Φ_{ii} del tensore sono reali e non negative.

Lo spettro della velocità $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ è una grandezza di estrema importanza, dato che rappresenta la controparte, nello spazio dei numeri d'onda, degli Stress di Reynolds, cioè $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ rappresenta il contributo per unità di volume, dello spazio dei numeri d'onda, del modo $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ allo stress $\overline{u_i u_j}$. In particolare è facile vedere che:

$$R_{ij}(0) = \overline{u_i u_j} = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \cdot dk_1 dk_2 dk_3 \quad [3.120c]$$

Dato che le componenti diagonali Φ_{ii} del tensore sono reali e non negative e che a $\mathbf{r} = 0$ vale la (3.120c), si ha che l'energia cinetica turbolenta e può essere espressa come:

$$2e = \sum_{i=1}^3 R_{ii}(0) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ii}(\mathbf{k}) \cdot dk_1 dk_2 dk_3 \quad [3.120d]$$

Le informazioni contenute in Φ_{ij} sono:

- gli indici i e j rappresentano la direzione della velocità nello spazio fisico. Per esempio $\Phi_{22}(\mathbf{k})$ si riferisce interamente al campo della componente $u_2(\mathbf{x})$;
- la direzione $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ del vettore numero d'onda è la direzione di propagazione del modo di Fourier;
- il modulo k del numero d'onda determina la lunghezza caratteristica di scala l del modo, visto che $l = 2\pi/|\mathbf{k}|$.

Fig. 3.18: rappresentazione schematica della funzione di energia spettrale.

L'informazione direzionale contenuta nel tensore dello spettro della velocità può essere rimossa, giungendo alla definizione di *funzione di energia spettrale* (o *energy spectrum*, *three dimensional spectrum*) $E(k)$ che è uno scalare e che dipende solo dal modulo k del vettore numero d'onda. Per giungere alla sua definizione, si considera la traccia di Φ_{ij} (cioè la somma dei suoi elementi diagonali) e la si integra su una superficie sferica nello spazio dei numeri d'onda di raggio $k = |\mathbf{k}|$, ottenendo:

$$E(k) = \frac{1}{2} \oint \Phi_{ii}(\mathbf{k}) \cdot d\sigma \quad [3.121a]$$

dove $d\sigma$ è una porzione infinitesima della sfera su cui è esteso l'integrale. $E(k)$ è reale e non negativo ed è facile veder come:

$$e = \int_0^{\infty} E(k) \cdot dk \quad [3.121b]$$

In pratica $E(k)$ rappresenta il contributo all'energia cinetica turbolenta dei modi di Fourier con numero d'onda (in modulo) compresi tra k e $k + dk$.

Una rappresentazione schematica di $E(k)$ è riportata in *Fig. 3.18*. Come si vede, tale spettro presenta un picco e tende a zero ai due estremi dell'asse dei numeri d'onda. Nel Cap. 5 si approfondirà tutto ciò.

3.2.2.2 Considerazioni sulla misura dello spettro della velocità

La misura diretta del tensore della densità spettrale della velocità è al di là delle possibilità tecnologiche attuali, soprattutto in atmosfera. Ciò che, però, è possibile fare è realizzare misure in campo, protratte nel tempo ma in un numero limitato di punti, ed usare (con cautela) l'ipotesi di Taylor stimando, quindi, le funzioni di correlazione lungo la direzione del vento medio. In particolare, si è in grado di stimare le correlazioni R_{LL} , R_{NN} e R_{33} lungo la direzione $(r,0,0)$, se l'asse x è allineato con la direzione media del moto. In questo caso possono essere determinati gli *spettri monodimensionali* (ed anche quello verticale) definiti come:

$$\Phi_{11}(\kappa_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{LL}(r,0,0) \cdot e^{-j\kappa_1 r} dr \quad [3.122a]$$

$$\Phi_{22}(\kappa_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{NN}(r,0,0) \cdot e^{j\kappa_1 r} dr \quad [3.122b]$$

Analogamente si può procedere per la stima dello spettro della componente verticale del moto. In generale si ha che:

$$\Phi_{ij}(\kappa_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(r,0,0) \cdot e^{j\kappa_1 r} dr \quad [3.122c]$$

Si noti come gli elementi diagonali siano reali e pari. Seguendo la convenzione quasi universalmente adottata in Letteratura, invece di usare Φ_{11} , Φ_{22} , Φ_{33} ed in generale Φ_{ij} , si considerano spettri monodimensionale $E_{11}(k_1) = 2\Phi_{11}$, $E_{22}(k_1) = \Phi_{22}$ e $E_{33}(k_1) = \Phi_{33}$. Quindi, si ottiene immediatamente che:

$$R_{11}(r,0,0) = \int_0^{\infty} E_{11}(k_1) \cdot \cos(k_1 r) dr \quad [3.122d]$$

e relazioni analoghe per le altre auto-correlazioni. Gli spettri monodimensionali sono legati al tensore di densità spettrale della velocità dalle relazioni:

$$E_{11}(k_1) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11}(\mathbf{k}) \cdot dk_2 dk_3 \quad [3.123a]$$

$$E_{22}(k_1) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{22}(\mathbf{k}) \cdot dk_2 dk_3 \quad [3.123b]$$

Queste due ultime relazioni (e quella analoga per E_{33}) evidenziano un problema. Gli spettri monodimensionale non dipendono solo dal modo di numero d'onda k_l nella direzione x , ma anche da tutti gli altri modi che si propagano nello spazio in direzioni diverse e con numeri d'onda, in modulo, superiori a k_1 . Questo fenomeno prende il nome di *aliasing*. Tale fenomeno non è un serio problema ad elevati numeri d'onda, poiché i vortici di piccole dimensioni tendono ad avere approssimativamente la medesima dimensione in tutte le direzioni come si vedrà al Cap. 5.

3.2.2.3 Conseguenze dell'isotropia

In generale il tensore dello spettro di velocità $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ contiene molte più informazioni di quante ne contenga l'*energy spectrum* $E(k)$. Tuttavia in condizioni di turbolenza isotropa si può mostrare che l'intero tensore $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ è completamente determinato da $E(k)$. Senza entrare nei dettagli (si veda Pope, 2000, pag. 222), si ha che in caso di isotropia:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \cdot \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \quad [3.124a]$$

dove k_i e k_j sono le proiezioni del vettore \mathbf{k} nelle direzioni cardinali i e j .

Oltre a ciò, sempre in condizioni stazionarie ed omogenee, è anche isotrope, gli spettri monodimensionali sono determinati anche dall'*energy spectrum* $E(k)$. In effetti (Pope, 2000, pag 226) si mostra che:

$$E_{11}(k_1) = \int_{k_1}^{\infty} \frac{E(k)}{k} \cdot \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2} \right) \cdot dk \quad [3.124b]$$

Questa relazione sottolinea ancora una volta che l'*aliasing* è presente negli spettri monodimensionali. $E_{11}(k_1)$ è una funzione monotona decrescente e presenta il valore massimo a $k_l = 0$, come si può vedere differenziando la relazione precedente. La (3.124b) può, poi, essere invertita per ottenere $E(k)$ in termini di $E_{11}(k_l)$, ottenendo:

$$E(k) = \frac{k^3}{2} \cdot \frac{d}{dk} \left[\frac{1}{k} \cdot \frac{dE_{11}(k)}{dk} \right] \quad [3.124c]$$

Ciò significa che la conoscenza di $E(k)$ consente di conoscere $E_{11}(k)$ e viceversa, purché $E(k)$ sia integrabile e $E_{11}(k)$ sia differenziabile. Analoghi ragionamenti possono essere fatti per gli spettri E_{22} ed E_{33} giungendo alle relazioni seguenti:

$$E_{22}(k_1) = E_{33}(k_1) = \frac{1}{2} \int_{k_1}^{\infty} \frac{E(k)}{k} \cdot \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2} \right) \cdot dk \quad [3.124d]$$

$$E(k) = -k \left\{ \frac{dE_{11}(k)}{dk} + \int_k^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{dE_{22}(k_1)}{dk_1} \cdot dk_1 \right\} \quad [3.124e]$$

Inoltre, con calcoli piuttosto laboriosi, si può ottenere anche la relazione seguente che lega tra loro lo spettro longitudinale E_{11} e quello trasversale E_{22} :

$$E_{22}(k_1) = \frac{1}{2} \left[E_{11}(k_1) - k_1 \cdot \frac{dE_{11}(k_1)}{dk_1} \right] \quad [3.124f]$$

Si verifica facilmente da queste relazioni che se $E(k)$ è descritto, almeno ad elevati valori del numero d'onda, da una legge di potenza proporzionale a k^p , anche E_{11} e E_{22} avranno un analogo andamento. In particolare, se $p = 5/3$ (come si vedrà al Cap.5), allora $E_{22}(k) = 4/3 E_{11}(k)$, come si è riscontrato sperimentalmente.

3.2.3 SPETTRI SCALARI

Finora abbiamo trattato solo spettri relativi alla al campo di moto. In realtà è possibile realizzare l'analisi spettrali di variabili scalari, quali la temperatura, il contenuto d'acqua, ecc. Immaginiamo di analizzare segnali presi nel tempo in un punto dello spazio. A tali segnali si applica completamente quanto già visto per l'analisi spettrale dei processi stocastici. Più raramente si realizza un'analisi spettrale di campi stocastici scalari e, quando la si realizza, è per ottenere gli spettri monodimensionali per i quali vale quanto già detto a proposito del campo di moto. Ulteriori informazioni verranno date in proposito al Cap.5.

3.3 BASI TEORICHE DELLA TURBOLENZA LAGRANGIANA

Fin qui si è descritto il moto dell'atmosfera e la sua turbolenza in *modo Euleriano*, cioè studiando il campo di moto vettoriale $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ del fluido (nel nostro caso l'aria del *PBL*) e gli altri campi scalari che lo caratterizzano, campi considerati stocastici ai fini pratici; essi descrivevano le caratteristiche fisiche del sistema attraverso il valore assunto nei vari punti del dominio spaziale d'interesse e nei vari istanti temporali. Questo non è l'unico modo per descrivere fluidodinamicamente l'atmosfera, come abbiamo brevemente accennato al Cap.1, infatti, se ad un certo istante iniziale t_0 ipotizziamo di individuare le varie porzioni infinitesime che costituiscono l'atmosfera e le seguiamo una per una nel loro moto all'interno del dominio di indagine e negli istanti successivi al rilascio, abbiamo realizzato una *descrizione Lagrangiana dell'atmosfera*.

Il perno su cui si basa la descrizione Lagrangiana è il *concetto di particella*. Una particella è un'astrazione matematica il cui corrispettivo fisico è una porzione d'aria avente dimensioni lineari molto maggiori della distanza tra le singole molecole, ma sufficientemente piccola che la velocità, la pressione e le altre proprietà fisiche del fluido possono essere considerate costanti entro il suo volume. Col passare del tempo, la particella abbandona la propria posizione originaria, muovendosi nello spazio come un'entità individuale senza un'apprezzabile deformazione e percorrendo una propria traiettoria. In altre parole, la particella è un punto identificabile del volume del fluido che si muove entro il dominio d'indagine secondo le leggi della fluidodinamica descritte al Cap.2.

3.3.1 LE PARTICELLE LAGRANGIANE

La descrizione Lagrangiana del moto dell'atmosfera consiste, in linea di principio, nel descrivere nel tempo il *movimento* (cioè la posizione e la velocità) di tutte le particelle che costituiscono l'atmosfera. Perché ciò sia possibile, almeno in linea di principio, è necessario ipotizzare che le varie particelle siano singolarmente identificabili, sia ad un arbitrario istante iniziale t_0 che negli istanti successivi. E' subito chiaro che la descrizione lagrangiana risulta teoricamente molto attraente e naturale, ma estremamente difficile da adottare quando ci si appresta a realizzare misure, al contrario della visione euleriana. Anche se sono state realizzate misure Lagrangiane in laboratorio, in atmosfera ancora oggi è veramente difficile realizzarle (Haugen 1966, Angell e al. 1971, Hanna 1981), anche accettando una buona dose di incertezza. Di fatto, (Dosio et al., 2005) lo studio della dinamica lagrangiana di un fluido e delle sue caratteristiche stocastiche oggi viene fatto usando modelli numerici DNS (Direct Numerical Simulation) e LES (Large Eddy Simulation) cui si accennerà successivamente. Anche se tali modelli non sono veramente in grado di simulare una porzione significativa di atmosfera reale, tuttavia costituiscono una sorta di *laboratorio numerico* da cui vengono tratte preziose informazioni.

Consideriamo, ora, una singola particella che al tempo t_0 si trova nella posizione \mathbf{x}_0 . A tale istante essa possiede una velocità che coincide con quella euleriana caratteristica del fluido in quel punto e quell'istante temporale, visto che la particella coincide col volume di fluido in quel pun-

to e in quell'istante. Negli istanti successivi la particella abbandonerà la propria posizione iniziale, descrivendo una *traiettoria* nello spazio, descritta dalla funzione:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t) \quad [3.125a]$$

Si noti che nell'espressione precedente si è indicato che $\mathbf{X}(t)$ è la posizione raggiunta al tempo t dalla particella che al tempo t_0 stava in \mathbf{x}_0 . Definita la traiettoria (che si suppone una funzione continua e derivabile), la velocità \mathbf{V} della particella (*velocità lagrangiana*) risulta inevitabilmente data da:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t) \quad [3.125b]$$

Come detto, la particella altro non è che il volume di atmosfera che al tempo t si trova in \mathbf{X} , quindi al tempo t essa dovrà necessariamente possedere una velocità pari al valore del campo di moto euleriano $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ in quel punto e in quell'istante; pertanto:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{u}[\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t), t] \quad [3.125c]$$

E' immediato, perciò, ridefinire la traiettoria della particella, evidenziandone la dipendenza dalla velocità che progressivamente essa assume durante il moto, ottenendo:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t') \cdot dt' \quad [3.126]$$

Al Cap.2 sono state introdotte le relazioni fluidodinamiche che descrivono l'atmosfera in termini istantanei; esse sono state scritte in forma euleriana ed in tale forma esse vengono normalmente impiegate. Tuttavia, come già chiarito al Cap.2, se vengono riscritte impiegando la derivata sostanziale (che elimina la derivata parziale euleriana ed i termini avvevativi), esse costituiscono la descrizione fluidodinamica lagrangiana dell'atmosfera.

L'impressione che si ha da queste considerazioni è che la particella sia un'entità deterministica. In realtà così non è e lo si capisce dal fatto che durante il proprio moto nello spazio essa assume il valore di velocità proprio del punto in cui transita, valore che è una delle possibili realizzazioni del campo stocastico euleriano di moto in quel punto e in quell'istante. Pertanto le caratteristiche di una particella, cioè la sua traiettoria e la sua velocità variabile nel tempo, altro non sono che una delle possibili realizzazioni di un processo stocastico. Più precisamente, se si considera un punto \mathbf{x}_0 al tempo t_0 , potremmo emettere contemporaneamente un numero N arbitrariamente grande di particelle. Esse avranno in comune il fatto di essere *nate* allo stesso istante e nello stesso punto, ma le loro traiettorie saranno differenti e rappresenteranno N realizzazioni indipendenti del processo stocastico *movimento di una particella emessa da \mathbf{x}_0 al tempo t_0* . Per completare la descrizione Lagrangiana, dovremmo naturalmente considerare tutti i possibili punti del dominio di indagine e far partire da essi infinite particelle per *campionare in termini lagrangiani* il dominio e quindi per *catturare* le caratteristiche stocastiche che descrivono le infinite particelle. Ovviamente, dal punto di vista sperimentale, tutto ciò è impossibile.

3.3.2 CONCETTI GENERALI DI STATISTICA LAGRANGIANA

Per una descrizione statistica della turbolenza dell'atmosfera in termini lagrangiani è necessario, in primo luogo, indicare quali entità hanno carattere stocastico. Per quanto detto, il moto delle particelle emesse da un punto del dominio di interesse è l'entità stocastica cercata. E' immediato, però, constatare che c'è un parametro totalmente deterministico ed arbitrario che condiziona le considerazioni successive ed è la posizione iniziale \mathbf{x}_0 assunta dalle varie particelle considerate. Inizialmente consideriamo un ben preciso \mathbf{x}_0 e sviluppiamo i necessari concetti statistici che dovranno essere ripetuti poi per ogni punto iniziale possibile. Fissato \mathbf{x}_0 , il moto di una particel-

la è descritto da due variabili distinte: la posizione della particella nei vari istanti successivi a t_0 e la velocità che essa assume durante il proprio movimento. Pertanto le due variabili stocastiche considerate sono:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{V}(\mathbf{X}, t') \cdot dt' \\ \mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t) &= \mathbf{u}[\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t), t]\end{aligned}$$

funzioni stocastiche degli argomenti \mathbf{x}_0 e t .

3.3.2.1. Le densità di probabilità

Introduciamo ora le densità di probabilità Lagrangiane. Esse sono tutte densità di probabilità condizionata, visto che, come minimo, sono condizionate dalla posizione iniziale \mathbf{x}_0 assunta dalla generica particella considerata.

La più semplice di esse è legata alla probabilità P_X di trovare nella posizione $\mathbf{X}+d\mathbf{X}$ al tempo t una particella partita da \mathbf{x}_0 a t_0 . Da essa è immediato definire la densità di probabilità $p(\mathbf{X} | \mathbf{x}_0, t)$. Per chiarire le idee, ragioniamo in termini campionari ed immaginiamo di emettere a t_0 dal punto \mathbf{x}_0 M particelle identiche e di registrarne il movimento nello spazio fisico fino al tempo t . Esse seguiranno traiettorie anche molto diverse tra loro e lungo tali traiettorie ogni particella mostrerà una storia della propria velocità diversa dalle altre. Siano, però, N le particelle che si vengono a trovare a t in una posizione attorno al punto \mathbf{X} (più esattamente nelle posizioni comprese tra \mathbf{X} e $\mathbf{X}+d\mathbf{X}$), indipendentemente dalle traiettorie seguite per raggiungere tale posizione. La probabilità P_X è stimabile dal rapporto N/M e la PDF $p(\mathbf{X} | \mathbf{x}_0, t)$ sarà pari a $N/M \cdot d\mathbf{X}$.

Un secondo esempio è dato dalla probabilità che le particelle, emesse da \mathbf{x}_0 a t_0 , assumano al tempo t una velocità \mathbf{V} . In questo caso la situazione considerata è meno intuitiva. In effetti immaginiamo di emettere M particelle da \mathbf{x}_0 e di lasciarle evolvere liberamente nello spazio. Facciamo ora la *fotografia* della situazione al tempo t . Vedremo che una parte di esse avrà raggiunto il generico punto \mathbf{X} con velocità \mathbf{V} , ma anche altre avranno la stessa velocità, ma si troveranno in punti diversi dello spazio. Quello che cerchiamo è la probabilità che una qualsiasi delle particelle emesse abbia la velocità data, indipendentemente da dove si è venuta a trovare. Ciò è descritto dalla PDF seguente:

$$p(\mathbf{V} | \mathbf{x}_0, t) = \int p(\mathbf{V} | \mathbf{X}, t) \cdot p(\mathbf{X} | \mathbf{x}_0, t) \cdot d\mathbf{X} \quad [3.127a]$$

In sostanza, la relazione precedente afferma che la PDF cercata è il prodotto della probabilità che una particella si venga a trovare al tempo t in un generico punto \mathbf{X} dello spazio per la probabilità che, in quel punto, essa assuma la velocità richiesta, il tutto sommato per ogni punto dello spazio. Si noti che $p(\mathbf{V} | \mathbf{X}, t)$ è la PDF che descrive la probabilità che al tempo t e in posizione \mathbf{X} la velocità della particella è \mathbf{V} , ma questa densità di probabilità coincide con l'analogo PDF euleriana per il campo di moto $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

Consideriamo ora la probabilità che una particella, emessa a t_0 da \mathbf{x}_0 , raggiunga al tempo t_1 la posizione \mathbf{X}_1 e al tempo t_2 la posizione \mathbf{X}_2 . Tale probabilità è descritta dalla PDF congiunta: $p(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 | \mathbf{x}_0, t_1, t_2)$. Nota tale distribuzione, risulta immediato definire la probabilità che, nella traiettoria di una particella rilasciata a t_0 da \mathbf{x}_0 , al tempo t_1 la velocità sia \mathbf{V}_1 e al tempo t_2 sia \mathbf{V}_2 . Infatti, tale densità di probabilità congiunta risulta pari a:

$$\begin{aligned}p(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 | \mathbf{x}_0, t_1, t_2) &= \\ &\int p(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 | \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, t_1, t_2) \cdot p(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 | \mathbf{x}_0, t_1, t_2) \cdot d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2\end{aligned} \quad [3.127b]$$

In termini campionari, emettiamo da \mathbf{x}_0 a t_0 N particelle, ognuna delle quali avrà una propria traiettoria nello spazio delle fasi. Di queste N particelle, individuiamo quelle M particelle che a t_1 presentano velocità \mathbf{V}_1 e a t_2 velocità \mathbf{V}_2 . Il rapporto M/N è la PDF campionaria cercata.

Quelle presentate sono solo esempi semplici di *PDF* che possono essere convenientemente generalizzate a seconda degli usi richiesti, ovviamente con un aumento delle complicazioni formali. Definite le *PDF* è possibile definire anche i momenti che, però, non sono di comprensione così immediata come nel caso euleriano.

3.3.2.2 I momenti

Anche nel caso Lagrangiano l'alternativa ad una descrizione basata sulle densità di probabilità è costituita dai momenti, tuttavia essi risultano molto meno intuitivi degli analoghi euleriani.

Consideriamo per primo il concetto di *velocità media di una particella* emessa da \mathbf{x}_0 a t_0 . Ragionando in termini campionari, immaginiamo di emettere da tale punto un numero elevato di particelle. Esse, nel tempo, seguiranno traiettorie differenti, occupando posizioni differenti con velocità differenti. In sostanza, le loro traiettorie nello spazio delle fasi (le cui coordinate sono la posizione e la velocità, quindi uno spazio a 6 dimensioni) saranno differenti. Al tempo t registriamo la posizione che ognuna di esse ha raggiunto e la relativa velocità. Facciamo la media di quest'ultima e questa è la velocità media di una particella emessa a t_0 da \mathbf{x}_0 , visto che le varie particelle emesse altro non erano che realizzazioni indipendenti del processo stocastico originario. In maniera più formale, si ha che:

$$\overline{\mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t)} = \int \mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t) \cdot p(\mathbf{V} | \mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{V} \quad [3.128a]$$

Essa rappresenta il valor medio delle velocità che tutte le infinite particelle emesse da \mathbf{x}_0 possiedono, indipendentemente da dove si vengono a trovare effettivamente al tempo t . Nota la velocità media della particella (vista come processo stocastico), la *fluttuazione* che una ben precisa realizzazione presenta al tempo t è necessariamente:

$$\mathbf{V}'(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t) - \overline{\mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t)} \quad [3.128b]$$

La definizione delle fluttuazioni apre, ovviamente, la strada alla costruzione dei momenti centrali, esattamente come nel caso euleriano trattato in precedenza. Se poi il moto del fluido entro cui si viene a trovare la particella in movimento è statisticamente stazionario, dal fatto che in ogni posizione della traiettoria della particella la velocità lagrangiana della particella e quella euleriana del fluido coincidono, scende di conseguenza che anche la velocità media della particella è costante, come quella del fluido e le due coincidono. In questo caso è sempre lecito eseguire un cambiamento di scala per rendere più *comoda* la situazione. In effetti se si sottrae punto a punto il vento medio, il campo lagrangiano che ne consegue coincide col campo delle fluttuazioni.

Introduciamo, ora, i *momenti del secondo ordine*. Rammentando la (3.127b) ed il fatto che la velocità \mathbf{V} della particella è un vettore con componenti V_j , il momento del secondo ordine più generale che si possa concepire tra le componenti V_i al tempo t_1 e V_j al tempo t_2 è data da:

$$\begin{aligned} \overline{V_i(\mathbf{x}_0, t_1) \cdot V_j(\mathbf{x}_0, t_2)} = \\ \int V_i(\mathbf{x}_0, t_1) \cdot V_j(\mathbf{x}_0, t_2) \cdot p(V_i, V_j | \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, t_1, t_2) \\ \cdot p(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 | \mathbf{x}_0, t_1, t_2) \cdot d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 dV_i dV_j \end{aligned} \quad [3.129]$$

In una condizione generale di moto, i momenti euleriani e lagrangiani sono a priori non coincidenti. Tuttavia, quando si è in condizioni stazionarie ed omogenee, per definizione i momenti lagrangiani ed euleriani *one-point* coincidono. Anche se il *PBL* non è stazionario ed omogeneo, tuttavia le componenti orizzontali della velocità delle particelle nei pressi del suolo possono essere considerate campi omogenei ed isotropi.

Ciò nonostante, anche in condizioni ideali (stazionarie, omogenee ed isotrope) le altre statistiche lagrangiane, come le funzioni di correlazione (che è facile definire dalla 3.129) e gli spettri, so-

no differenti da quelle euleriane. In particolare, se paragoniamo le fluttuazioni temporali euleriane delle componenti del vento con le analoghe lagrangiane, vediamo importanti differenze. Per esempio, se osserviamo contemporaneamente un misuratore di direzione del vento ed un pennacchio di fumo che esce da un camino vicino, vediamo che le fluttuazioni della velocità locale del vento sono decisamente più rapide delle fluttuazioni contemporanee del pennacchio di fumo. Ciò comporta che le statistiche temporali lagrangiane abbiano tempi di scala maggiori di quelle euleriane.

3.3.2.3 Il tempo integrale lagrangiano di scala

Una volta introdotta la formulazione generale del momento del secondo ordine, è anche possibile definire una scala temporale caratteristica, detta *Tempo Integrale Lagrangiano di scala* (*Lagrangian integral time scale*, *Lagrangian correlation time*). In effetti, per una generica componente V_i del moto della particella, la definizione del corrispondente tempo lagrangiano di scala è:

$$T_{Li} = \int_{t_0}^{\infty} \frac{\overline{V_i(\mathbf{x}_0, t) \cdot V_i(\mathbf{x}_0, t_0)}}{\left[\overline{V_i^2(\mathbf{x}_0, t) \cdot V_i^2(\mathbf{x}_0, t_0)} \right]^{1/2}} \cdot dt \quad [3.130]$$

Questo tempo di scala è forse il parametro più interessante della descrizione lagrangiana del moto. Infatti, ogni particella rilasciata al tempo t_0 dalla posizione \mathbf{x}_0 percorrerà una traiettoria nello spazio delle fasi che è profondamente influenzata dalle proprie caratteristiche iniziali. Tuttavia, col tempo questa *memoria* delle condizioni iniziali tende a diminuire ed in sostanza si assiste ad una decorrelazione col tempo della particella rispetto alle proprie condizioni iniziali. Il tempo caratteristico di scala T_{Li} può essere interpretato come il tempo necessario perché la componente V_i della velocità di una particella dimentichi il proprio valore iniziale.

3.3.2.4 Le funzioni di autocorrelazione e gli spettri

In condizioni stazionarie ed omogenee la varianza delle componenti lagrangiane del moto coincide con la corrispondente varianza euleriana e ciò vale anche per tutte le altre statistiche *one-point*. Così non è, come si è visto, per le funzioni di autocorrelazione e per le densità spettrali. Come si è riscontrato nelle poche campagne sperimentali disponibili e nelle analisi numeriche, generalmente le componenti

3.3.3 AUTOCORRELAZIONE E SPETTRI IN CONDIZIONI STAZIONARIE E OMOGENEE

In condizioni stazionarie ed omogenee la varianza delle componenti lagrangiane del moto coincide con la corrispondente varianza euleriana e ciò vale anche per tutte le altre statistiche *one-point*. Così non è, come si è visto, per le funzioni di autocorrelazione e per le densità spettrali. Ciò deriva dal fatto che, come si è riscontrato nelle poche campagne sperimentali disponibili e nelle analisi numeriche, generalmente le componenti lagrangiane della velocità di una particella fluttuano più lentamente delle analoghe componenti euleriane e gli spettri lagrangiani sono concentrati a frequenze inferiori rispetto agli analoghi spettri euleriani (Hanna, 1981).

Consideriamo ora una situazione stazionaria ed omogenea. In una tale situazione il moto di una particella è anch'esso statisticamente stazionario ed omogeneo e la velocità media della particella risulta costante. Sottraendo punto a punto il valor medio (vettore) della velocità, le componenti risultanti del moto della particella coincidono con le relative fluttuazioni. Se consideriamo una delle componenti lagrangiane del moto della particella (per esempio la componente orizzontale trasversale v'), che per definizione ha valor medio nullo, in analogia a quanto già detto per la controparte euleriana e in accordo con ciò che è stato presentato in precedenza, possiamo definire la funzione di autocorrelazione come:

$$R_{Lv}(\tau) = \overline{v'(t) \cdot v'(t+\tau)} \quad [3.131]$$

indipendente da t (per la stazionarietà e l'omogeneità) e dipendente solo dal *time-lag*. Analoghe relazioni definiscono le funzioni di autocorrelazione per le altre componenti del moto.

Sempre in analogia con la trattazione euleriana, è possibile definire la densità spettrale *two-sided* $S_{Lv}(f)$ relativa alla componente v del moto come la trasformata di Fourier della relativa funzione di autocorrelazione $R_{Lv}(\tau)$. In particolare, detta f la frequenza (in Hz) si ha che:

$$S_{Lv}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{Lv}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad [3.132a]$$

$$R_{Lv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{Lv}(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} df \quad [3.132b]$$

Dato che il moto è stazionario ed omogeneo, le relazioni tra densità spettrali e varianze euleriane e lagrangiane sono date da:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{Lv}(f) \cdot df = \sigma_{Lv}^2 = \sigma_{Ev}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{Ev}(f) \cdot df \quad [3.132c]$$

Come nel caso euleriano, la funzione di autocorrelazione lagrangiana è una funzione pari e perciò le (3.132 a e b) diventano:

$$S_{Lv}(f) = 2 \int_0^{\infty} R_{Lv}(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau \quad [3.133a]$$

$$R_{Lv}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_{Lv}(f) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot df \quad [3.133b]$$

Tutte queste considerazioni fatte per la componente v possono essere ripetute anche per le altre due componenti del moto.

Prendendo ancora a riferimento la componente orizzontale trasversale v del moto di una particella (analoghi ragionamenti si possono fare ovviamente anche per le altre componenti), nota la funzione di autocorrelazione è immediato definire il *Tempo Lagrangiano di Scala*:

$$T_{Lv} = \int_0^{\infty} R_{Lv}(\tau) \cdot d\tau \quad [3.134]$$

il cui significato fisico è il tempo necessario alla particella per *dimenticare* il valore iniziale della componente v del moto.

Ritorniamo alle considerazioni iniziali. Come si è detto, le componenti lagrangiane del moto fluttuano meno rapidamente delle analoghe componenti euleriane e ciò risulta evidente sia dai risultati delle esperienze in campo (Hanna, 1981) che dalle sperimentazioni numeriche. Di conseguenza, i tempi caratteristici lagrangiani saranno maggiori di quelli euleriani e gli spettri lagrangiani saranno concentrati a frequenze inferiori. Se indichiamo con T_L il Tempo Lagrangiano di Scala caratteristico di una delle componenti v e con T_E l'analogo tempo caratteristico euleriano, il rapporto $\beta = T_L/T_E$ rappresenta una sorta di *fattore di rallentamento* che lega il moto lagrangiano a quello euleriano. Corrsin (1963) ha proposto una *congettura* secondo cui le forme funzionali delle funzioni di autocorrelazione e delle densità spettrali sono simili; ciò in cui le quantità euleriane e lagrangiane differiscono è la scala. Tale congettura, anche se non esatta, o-

perativamente rappresenta una buona approssimazione, come confermato dalle misure sperimentali. Matematicamente tale congettura risulta espressa come:

$$R_L(\beta\tau) = R_E(\tau) \quad [3.135a]$$

$$f \cdot S_L(f) = \beta f \cdot S_E(\beta f) \quad [3.135b]$$

L'importanza pratica di questa congettura sta nel fatto che le misure lagrangiane in atmosfera sono difficilissime da realizzare mentre quelle euleriane sono decisamente più abordabili. Se da queste ultime otteniamo le funzioni di autocorrelazione e le densità spettrali, la congettura di Corrsin ci consente di ottenere una stima realistica della loro controparte lagrangiana. Nella Fig.3.19 è riportata una rappresentazione schematica della congettura di Corrsin.

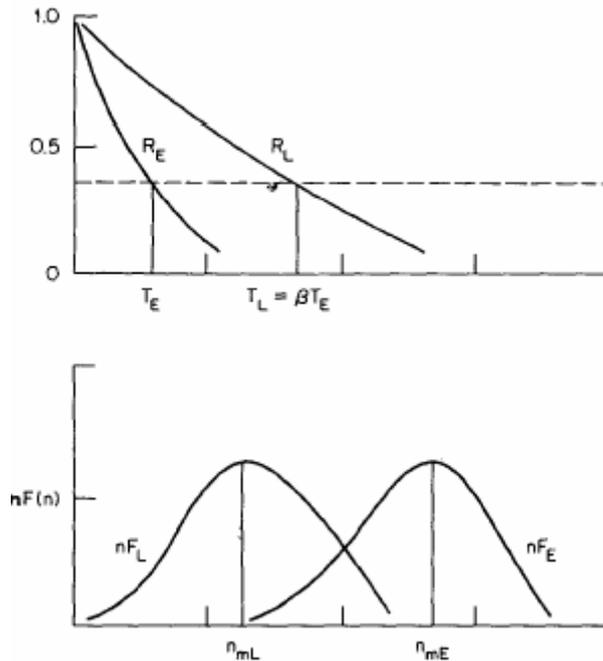


Fig. 3.19: rappresentazione schematica della congettura di Corrsin (Hanna, 1981)

Perché essa possa essere applicata in pratica è indispensabile conoscere il valore del rapporto β . Per prima cosa va detto che β non è una generica costante, ma dipende dal livello di turbolenza presente nel PBL. In effetti vale circa 2 nelle situazioni convettive, circa 4 nelle condizioni adiabatiche e circa 10 nelle condizioni stabili. Più precisamente Wandel e Kofoed-Hanse (1962) hanno evidenziato che β dipende dall'intensità di turbolenza $i = \sigma_i/U_i$ (dove i è una delle componenti del moto e U_i è la rispettiva velocità media) secondo la relazione:

$$\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{U_i}{\sigma_i} = \gamma/i \quad [3.135c]$$

dove la costante γ vale circa 0.44. Degrazia e Anfossi (1998), conducendo un'analisi differente, sono giunti ad un valore per la costante γ di 0.55. Comunque, l'importante è notare come il rapporto β sia inversamente proporzionale all'intensità della turbolenza e, a priori, variabile a seconda della componente del moto considerata.

Attualmente la congettura di Corrsin viene ancora impiegata operativamente quando mancano altre informazioni sulle funzioni di autocorrelazione e sulle densità spettrali lagrangiane, anche se in effetti la similarità funzionale tra funzioni lagrangiane ed euleriane non è completa. Ciò è quanto emerge da raffinate misure realizzate in esperimenti condotti in galleria a vento. Oltre a ciò, come meglio si vedrà al Cap. 5, le densità spettrali lagrangiane ed euleriane differiscono si-

stematicamente alle alte frequenze (*inertial subrange*); in particolare, mentre le densità euleriane risultano proporzionali a $f^{-5/3}$, quelle lagrangiane sono proporzionali a f^{-2} .

3.3.4 LO SPOSTAMENTO DI UNA PARTICELLA IN TURBOLENZA OMOGENEA

Il moto di una particella che al tempo iniziale t_0 si trova nella posizione \mathbf{x}_0 è completamente descritto dalla sua traiettoria $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t)$. Un modo alternativo è anche quello di descrivere lo spostamento di una particella nello spazio con il vettore *spostamento* \mathbf{Y} durante un intervallo temporale τ , definito come:

$$\mathbf{Y}(\tau) = \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t_0 + \tau) - \mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t) \cdot dt \quad [3.136a]$$

3.3.4.1 Considerazioni statistiche generali

Una descrizione completa del vettore $\mathbf{Y}(\tau)$ richiede l'assegnazione della funzione di densità di probabilità tridimensionale $p(\mathbf{Y} | \tau; \mathbf{x}_0, t_0)$ che dipende in generale dall'intervallo di tempo τ e dalle condizioni iniziali \mathbf{x}_0 e t_0 . E' intuitivo vedere (Monin e Yaglom, 2007a) che per intervalli τ molto inferiori al Tempo Lagrangiano di scala T_L , questa *PDF* può essere espressa mediante le consuete statistiche euleriane. Infatti, se $\tau \ll T_L$, la velocità lagrangiana della particella non varia apprezzabilmente durante l'intervallo τ e quindi:

$$\mathbf{Y}(\tau) \cong \mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t_0) \cdot \tau = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) \cdot \tau \quad [3.136b]$$

Il valor medio di tale vettore è sicuramente dato dalla consueta relazione:

$$\overline{\mathbf{Y}(\tau)} = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \overline{\mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t)} \cdot dt \quad [3.137a]$$

che, per quanto detto, è sempre possibile ridurre a:

$$\overline{\mathbf{Y}(\tau)} = \mathbf{U} \cdot \tau \quad [3.137b]$$

una volta individuato un opportuno vettore medio \mathbf{U} . Una volta definito il valor medio del vettore spostamento, la relativa fluttuazione risulta immediatamente da:

$$Y'(\tau) = Y(\tau) - \overline{\mathbf{Y}(\tau)} = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t) \cdot dt - \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \overline{\mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t)} \cdot dt = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \mathbf{V}'(\mathbf{x}_0, t) \cdot dt \quad [3.137c]$$

in cui con \mathbf{V}' si è indicata la fluttuazione del vettore velocità. A questo punto la definizione del *tensore momento del secondo ordine* è immediata e risulta pari a:

$$D_{ij}(\tau) = \overline{Y'_i(\tau) \cdot Y'_j(\tau)} = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} dt_1 \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \overline{V'_i(\mathbf{x}_0, t_1) \cdot V'_j(\mathbf{x}_0, t_2)} \cdot dt_2 \quad [3.138a]$$

Se $\tau \ll T_L$:

$$Y'(\tau) \cong u'(\mathbf{x}_0, t_0) \cdot \tau \quad [3.138b]$$

quindi la (3.136a) assume la forma asintotica seguente:

$$D_{ij}(\tau) \cong \overline{u'_i(\mathbf{x}_0, t_0) \cdot u'_j(\mathbf{x}_0, t_0)} \cdot \tau^2 = B_{ij}(\tau) \cdot \tau^2 \quad [3.138c]$$

dove $B_{ij}(\tau)$ è il momento euleriano del secondo ordine.

Se la turbolenza è stazionaria ed omogenea, allora la velocità media euleriana è costante nello spazio e nel tempo e quindi:

$$\overline{\mathbf{V}(\mathbf{x}_0, t)} = \overline{\mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t), t)} = \overline{\mathbf{u}} \quad [3.139a]$$

$$\overline{Y(\tau)} = \overline{\mathbf{u}} \cdot \tau \quad [3.139b]$$

Inoltre, le fluttuazioni della velocità della particella avranno le stesse caratteristiche in tutti i punti del dominio spaziale, saranno statisticamente stazionarie e non dipenderanno da \mathbf{x}_0 . Quindi, indicando con $B_{ij}^{(L)}$ il momento del secondo ordine delle componenti i e j del moto lagrangiano, si ha:

$$\overline{V_i'(x_0, t_1) \cdot V_j'(x_0, t_2)} = B_{ij}^{(L)}(t_2 - t_1) = \left(\overline{u_i'^2} \cdot \overline{u_j'^2} \right) \cdot \rho_{ij}^{(L)}(t_2 - t_1) \quad [3.140a]$$

dove con $\rho^{(L)}$ è stata indicata la funzione di autocorrelazione lagrangiana normalizzata. Facendo riferimento a tale relazione, si può poi dimostrare (Monin e Yaglom, 2007a) che la generica componente del tensore momento del secondo ordine risulta pari a:

$$D_{ij}(\tau) = \left(\overline{u_i'^2} \cdot \overline{u_j'^2} \right) \cdot \int_0^\tau (\tau - s) \cdot \left[\rho_{ij}^{(L)}(s) + \rho_{ji}^{(L)}(s) \right] \cdot ds \quad [3.140b]$$

e quindi le varianze sono date da:

$$D_{ii}(\tau) = 2 \cdot \overline{u_j'^2} \cdot \int_0^\tau (\tau - s) \cdot \rho_{ii}^{(L)}(s) \cdot ds \quad [3.140c]$$

Consideriamo, ora le due situazioni asintotiche che si possono avere. Se $\tau \ll T_L$, allora vale la (3.138c) che richiede una dipendenza quadratica da τ del momento del secondo ordine dello spostamento della particella.

Quando, invece, $\tau \gg T_L$, se, come intuitivo, si assume che al tendere di s all'infinito $\rho_{ii}^{(L)}$ tende a zero così rapidamente da consentire l'esistenza degli integrali:

$$T_L = \int_0^\infty \rho_{ii}^{(L)}(s) \cdot ds \quad [3.140d]$$

$$S_i = \int_0^\infty s \cdot \rho_{ii}^{(L)}(s) \cdot ds \quad [3.140e]$$

si giunge alla relazione asintotica:

$$D_{ii}(\tau) = 2 \cdot \overline{u_j'^2} \cdot (T_L \tau - S_i) \quad [3.140f]$$

Se $\tau \gg T_L$, il termine lineare in τ supera l'altro termine in parentesi e quindi si giunge alla relazione asintotica definitiva:

$$D_{ii}(\tau) = 2 \cdot \overline{u_j'^2} \cdot T_L \tau \quad [3.140g]$$

Quindi per τ molto grandi rispetto al tempo lagrangiano, la varianza dello spostamento nella direzione i -esima di una particella presenta una dipendenza lineare da τ e, di fatto, risulta indipendente dalla forma funzionale della funzione di autocorrelazione normalizzata.

3.3.4.2 Processi con incrementi stazionari

Un altro modo di affrontare il problema dello spostamento di una particella in situazioni stazionario e (almeno localmente) omogenee ed isotrope parte dalle considerazioni seguenti (Monin e Yaglom, 2007b). Consideriamo il moto di una particella in un fluido e sia $\mathbf{X}(t)$ la sua traiettoria. Il processo (cioè lo spostamento nello spazio e nel tempo della particella), in generale, non sarà stazionario, neppure se il moto del fluido in cui si muove la particella è stazionario, visto che la probabilità che essa, posta in \mathbf{x}_0 a t_0 , si allontani dalla sua posizione iniziale aumenta col tempo. Se, tuttavia, le proprietà euleriane del moto del fluido sono indipendenti dal tempo ed il moto è omogeneo ed isotropo, la distribuzione di probabilità del percorso fatto da una particella in un intervallo temporale τ (cioè da t a $t + \tau$, t e τ generici) sarà indipendente dal tempo. Inoltre, la PDF multidimensionale per le variabili stocastiche:

$$\mathbf{X}(t + t_2) - \mathbf{X}(t + t_1); \mathbf{X}(t + t_4) - \mathbf{X}(t + t_3); \dots; \mathbf{X}(t + t_{2n}) - \mathbf{X}(t + t_{2n-1})$$

per ogni valore di n e t , t_1, t_2, \dots, t_{2n} sarà anch'essa indipendente dal tempo. In altre parole la PDF multidimensionale

$$\mathbf{X}(t + t_2) - \mathbf{X}(t + t_1); \mathbf{X}(t + t_4) - \mathbf{X}(t + t_3); \dots; \mathbf{X}(t + t_{2n}) - \mathbf{X}(t + t_{2n-1})$$

non verrà alterata da un arbitrario spostamento lungo l'asse dei tempi. Diremo, quindi, che il processo $\mathbf{X}(t)$ è un processo con incrementi stazionari.

Studiamo, ora i momenti del processo stocastico $\Delta u_\tau = u(t + \tau) - u(t)$ rappresentato dagli incrementi stazionari del processo generico $u(t)$ e che è indipendente da τ . Il più semplice è il momento primo definito come:

$$m(\tau) = \overline{u(t + \tau) - u(t)} \quad [3.141a]$$

E' facile dimostrare che:

$$m(\tau_1 + \tau_2) = m(\tau_1) + m(\tau_2) \quad [3.141b]$$

Inoltre, sviluppando in serie di Taylor $m(\tau)$ (supposto una funzione continua e derivabile) e ricordando che gli incrementi sono stazionari e dipendono solo da τ , si ha che:

$$m(\tau) = c_1 \tau \quad [3.141c]$$

dove c_1 è una costante. Se poi esiste il valor medio del processo $u(t)$ al tempo $t = 0$, per le caratteristiche del modo inevitabilmente deve essere costante e pari a c_0 . Scrivendo il processo con incrementi costanti come:

$$[u(t) - u(0)] + u(0)$$

otteniamo:

$$\overline{u(t)} = c_0 + c_1 t \quad [3.141d]$$

Se il generico processo $u(t)$ rappresenta il movimento di una particella, c_0 è la posizione iniziale e c_1 è la velocità media lungo il percorso effettuato durante l'intervallo temporale τ .

Consideriamo, ora, il momento secondo congiunto di $\Delta u_\tau = u(t + \tau) - u(t)$. Esso sarà dato da:

$$D(t_2 - t_1, \tau_1, \tau_2) = \overline{[u(t_1 + \tau_1) - u(t_1)] \cdot [u(t_2 + \tau_2) - u(t_2)]} \quad [3.142a]$$

In questa relazione il momento del secondo ordine dipende apparentemente da tre variabili, tuttavia se il moto del fluido è stazionario, omogeneo ed isotropo (almeno localmente) si può dimostrare (Monin e Yaglom, 2007b, pag. 83) che, una volta definita la *funzione di struttura del processo* $u(t)$:

$$D(\tau) = \overline{[u(t+\tau) - u(t)]^2} \quad [3.142b]$$

tale momento congiunto generico può essere espresso più semplicemente come:

$$D(t, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2} \cdot [D(t+\tau_2) + D(t-\tau_2) - D(t-\tau_1+\tau_2) - D(t)] \quad [3.142c]$$

dove $t = t_2 - t_1$. La funzione di struttura è, quindi, una grandezza di estrema importanza. Essa è una funzione pari, è nulla per $\tau = 0$ e cresce con τ .

I processi con incrementi stazionari considerati erano monodimensionale per semplicità espositiva. La generalizzazione di quanto detto a processi multidimensionale è sostanzialmente immediata.

3.3.5 TEORIA LAGRANGIANA DI TAYLOR

A conclusione della breve esposizione sulla teoria lagrangiana della turbolenza, consideriamo l'emissione da un punto dello spazio e ad un certo istante di un gran numero di particelle identiche. L'osservazione sperimentale ci garantisce che tali particelle (astrazione di una sostanza inquinante emessa da un camino) si disperdono nell'aria a causa dei moti turbolenti dell'atmosfera distanziandosi progressivamente le une dalle altre. Le traiettorie delle varie particelle saranno realizzazioni differenti di un processo stocastico descritto statisticamente dalla PDF $p(\mathbf{X}, \mathbf{x}_0, t)$ in cui \mathbf{x}_0 è il punto di emissione all'istante t_0 e \mathbf{X} è la posizione della particella al tempo t . Se all'insieme delle particelle emesse attribuiamo una massa Q , la concentrazione della sostanza nel punto \mathbf{X} al tempo t sarà data dalla relazione seguente:

$$C(\mathbf{X}, t) = Q \cdot p(\mathbf{X}, \mathbf{x}_0, t) \quad [3.143]$$

L'obiettivo che ci si prefigge è quello di determinare una legge statistica di tipo lagrangiano che descriva la dispersione delle particelle emesse. Tale legge è stata ottenuta nel 1921 da uno studio di Taylor, studio che è ormai un classico della teoria della turbolenza dell'atmosfera.

3.3.5.1 Teoria statistica delle diffusione turbolenta

Consideriamo un fluido (per esempio l'aria del PBL) caratterizzato da un moto turbolento stazionario e omogeneo in orizzontale (situazione tipica del PBL) e da un moto medio solo lungo l'asse x (il vento medio). Consideriamo, ora, il moto lungo l'asse y (trasversale rispetto al moto medio) di un elevato numero (virtualmente infinito) di particelle rilasciate all'istante al tempo $t_0 = 0$ e nella posizione $y = 0$. L'omogeneità ipotizzata per il campo di moto dell'aria comporta che quanto si otterrà per la dispersione trasversale potrà essere esteso anche alle altre direzioni. Ciascuna particella emessa avrà nella direzione y una velocità (lagrangiana) nulla e, rappresentando il rilascio di una sostanza passiva, il suo inserimento nel fluido non ne altererà il grado e la natura della turbolenza.

Tra queste particelle emesse, consideriamone una in particolare. Essa, una volta rilasciata, si muoverà con le stesse proprietà statistiche del fluido circostante, seguendo una *traiettoria monodimensionale* descritta dalla variazione nel tempo della propria coordinata trasversale $y(t)$. Come in precedenza, si ipotizza (senza peccare di esagerato ottimismo) che la funzione $y(t)$ sia continua e derivabile. Ad ogni istante temporale la velocità della particella sarà quindi data, per definizione, da:

$$v'(t) = \frac{dy}{dt} \quad [3.144a]$$

Nella relazione precedente la velocità della particella è stata indicata col simbolo $v'(t)$, cioè col simbolo normalmente usato per le fluttuazioni. In effetti, la particella avrà al generico tempo t la

stessa velocità del fluido nel punto da lei occupato, velocità che, essendo il fluido a media nulla in quella direzione, coinciderà con la relativa fluttuazione. Dopo un intervallo di tempo τ_1 la particella avrà percorso una distanza che dipenderà dalle fluttuazioni turbolente presentate dal fluido lungo la traiettoria percorsa e quindi:

$$y(t) = \int_0^{\tau_1} v(\tau) \cdot d\tau \quad [3.144b]$$

Moltiplicando la (3.144a) con la (3.144b) si ha che:

$$y \frac{dy}{dt} = v'(t) \cdot \int_0^t v'(\tau) \cdot d\tau \quad [3.144c]$$

che, integrata rispetto al tempo da 0 ad un generico istante t , diventa:

$$y^2 = 2 \int_0^t v'(\tau_1) \int_0^{\tau_1} v'(\tau_2) \cdot d\tau_2 \cdot d\tau_1 \quad [3.144d]$$

Il rilascio di una particella da un punto entro un fluido turbolento è un processo stocastico di cui la traiettoria di una ben precisa particella è solo una realizzazione. Se ora, assieme alla particella considerata finora, venissero rilasciate, sempre nel punto $t_0 = 0$ e a $y = 0$ dello spazio-tempo, numerose particelle identiche a quella fin qui considerata, la traiettoria che caratterizza ciascuna di esse evidenzerebbe un gran numero di realizzazioni indipendenti del campo di moto turbolento. Avendo a disposizione, quindi, un numero elevato di realizzazioni indipendenti del campo di moto trasversale (che, per ipotesi, viene considerato ai fini pratici un processo stocastico), risulta possibile ottenere il valor medio della dispersione laterale delle particelle al tempo t . A tale scopo è sufficiente mediare la (3.144d) ottenendo:

$$\sigma_y^2(t) = \overline{y^2} = 2 \int_0^t \int_0^{\tau_1} \overline{v'(\tau_1) \cdot v'(\tau_2)} \cdot d\tau_2 \cdot d\tau_1 \quad [3.145a]$$

Prima di procedere è conveniente ricordare che la funzione lagrangiana di autocorrelazione normalizzata relativa alla dispersione laterale delle particelle è definita come:

$$\rho_L(\tau) = \frac{\overline{v'(t) \cdot v'(t+\tau)}}{v'^2(t)} \quad [3.145b]$$

Pur non avendo informazioni a priori sulla forma funzionale della funzione di autocorrelazione normalizzata, si possono fare comunque alcune considerazioni. In primo luogo, per *time-lag nulli* $\rho_L(0) = 1$, per definizione. Inoltre, sulla base delle evidenze sperimentali, tale funzione tende rapidamente a zero col tendere all'infinito del *time-lag*. A priori ρ_L potrebbe avere una forma funzionale qualsiasi, potrebbe essere discontinua e non derivabile, tuttavia sempre in base alle conoscenze sperimentali, si può ipotizzare realisticamente che essa sia continua, integrabile e derivabile. Usando questa definizione e ricordando l'omogeneità e la stazionarietà del moto del fluido, la (3.145a) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sigma_y^2(t) = \overline{y^2} = 2 \overline{v'^2} \cdot \int_0^t \int_0^{\tau_1} \rho_L(\tau) \cdot d\tau \cdot d\tau_1 \quad [3.146a]$$

in cui compare la varianza della velocità delle particelle, pari a quella del fluido, che non dipende dal tempo vista la stazionarietà del moto del fluido in cui si muovono le particelle.

Dalla (3.144c), mediata su tutte le possibili realizzazioni, e tenendo conto anche della definizione di $\rho_L(\tau)$, si ottiene la versione differenziale dell'equazione precedente, nota anche col nome

di *Teorema di Taylor*:

$$\frac{d\sigma_y^2}{dt} = 2 \cdot \overline{v'^2} \int_0^t \rho_L(\tau) \cdot d\tau \quad [3.146b]$$

Va ora sottolineato il fatto che la varianza della velocità della particella (che eguaglia quella del fluido) non solo è indipendente dalla posizione (essendo il moto orizzontalmente omogeneo) ma anche dal tempo (essendo il moto stazionario). Integrando per parti l'integrale doppio della relazione precedente si ha:

$$\int_0^t \int_0^{\tau_1} \rho_L(\tau) \cdot d\tau \cdot d\tau_1 = \tau_1 \int_0^{\tau_1} \rho_L(\tau) \cdot d\tau \Big|_0^t - \int_0^t \tau_1 \rho_L(\tau_1) \cdot d\tau_1 = \int_0^t (t-\tau) \cdot \rho_L(\tau) \cdot d\tau \quad [3.146c]$$

e quindi:

$$\sigma_y^2(t) = 2\overline{v'^2} \cdot \int_0^t (t-\tau) \cdot \rho_L(\tau) \cdot d\tau_1 \quad [3.146d]$$

La funzione di autocorrelazione normalizzata ρ_L è una funzione pari e con il massimo (pari a 1) all'origine (cioè per *time-lag* nulli). Se la supponiamo continua e derivabile (come risulta sperimentalmente), avremo che $d\rho_L/d\tau|_0 = 0$. Tale funzione, in linea di principio analiticamente ignota, può essere espressa nella forma di una serie di Taylor. Se arrestiamo tale serie ai primi tre termini e ricordiamo che $\rho_L(0) = 1$ si ha che:

$$\rho_L(\tau) = \rho_L(0) + \tau \frac{d\rho_L}{d\tau}(0) + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2\rho_L}{d\tau^2}(0) + \dots \approx 1 - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \quad [3.147a]$$

dove λ è la *microscala temporale lagrangiana*, definita come:

$$-\frac{2}{\lambda^2} = \frac{d^2\rho_L}{d\tau^2}(0) \quad [3.147b]$$

che, come si verifica immediatamente, è l'intercetta della parabola tangente nell'origine alla funzione di autocorrelazione normalizzata. Sostituendo la (3.147a) nella (3.146d) e ricordando la (3.147b), si ha che:

$$\sigma_y^2(t) = \overline{v'^2} \cdot t^2 \left(1 - \frac{t^2}{6\lambda^2} \right) \quad [3.147c]$$

Le relazioni (3.146d) e (3.147c), che descrivono il tasso di crescita dello spostamento quadratico medio di una particella in funzione dell'autocorrelazione lagrangiana della velocità della particella stessa (e quindi del fluido in cui essa si muove), esatte in condizioni di turbolenza omogenea e stazionaria, sono il famoso risultato ottenuto da Sir Geoffrey Ingram Taylor nel 1921. Esse nulla dicono sulla forma della distribuzione nello spazio delle particelle, ma si concentrano esclusivamente sul momento secondo della distribuzione incognita. Non sono neppure particolarmente utili nella pratica, almeno in apparenza, visto che non sono particolarmente visibili soluzioni teoriche e che è estremamente difficile realizzare misure di tipo lagrangiano. Va però rilevato che, come mostrato in Sorbjan (1989, pag. 227-229), con ipotesi del tutto ragionevoli è relativamente facile prevedere che la distribuzione delle particelle nella direzione y è una distribuzione gaussiana a media nulla e con la varianza pari a quanto previsto da dalla (3.146d). Comunque, pur non essendo attesa una soluzione teorica della (3.146d), può risultare utile verificare alcune sue proprietà asintotiche, ovviamente nell'ipotesi che tale soluzione esista.

Prima di considerare possibili soluzioni asintotiche per lo spostamento quadratico medio tra-

sversale delle particelle è opportuno ricordare la definizione di *Tempo integrale Lagrangiano*:

$$T_L = \int_0^{\infty} \rho_L(\tau) \cdot d\tau \quad [3.148]$$

Questa scala definisce l'intervallo temporale in cui c'è una sostanziale correlazione tra la velocità delle differenti particelle nel loro movimento turbolento. Per quanto detto sulle proprietà della funzione di autocorrelazione normalizzata, quando il *time-lag* tende all'infinito, la funzione di autocorrelazione normalizzata tende a zero rapidamente.

La prima considerazione asintotica è quella di *campo vicino* e si riferisce al caso in cui l'intervallo di *tempo di volo* della particella (l'intervallo temporale dal suo rilascio) è molto breve. In questo caso si ha che $t \ll T_L$ e quindi la (3.147c) si riduce a:

$$\overline{y^2} = \sigma_y^2 \cong v^2 t^2 \quad \text{cioè} \quad \sigma_y = \sigma_v t \quad [3.149]$$

dove con σ_y si è indicata la deviazione standard della velocità trasversale della particella (o, che è lo stesso, della componente trasversale euleriana della velocità del fluido). Si vede quindi che nel campo vicino le particelle emesse si disperdono trasversalmente in modo lineare. Naturalmente questo è il classico risultato della meccanica Newtoniana: la distanza percorsa dalla particella trasversalmente è pari al prodotto di una velocità caratteristica per il tempo di volo. Quindi, per tempi di rilascio molto brevi, la dispersione trasversale delle particelle non è un processo di diffusione, ma è semplicemente un'avvezione ad una velocità stocastica inizialmente costante.

La seconda considerazione asintotica comporta il considerare tempi di volo molto lunghi ($t \gg T_L$ *campo lontano*). Per tempi così lunghi la funzione di autocorrelazione tende a zero, ma il suo integrale rimane finito. Un modo per ottenere la forma asintotica della (3.146d) corrispondente al campo lontano è quello di riscriverla nel modo seguente:

$$\sigma_y^2 = 2 \cdot \overline{v^2} \cdot t \cdot \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) \cdot \rho_L(\tau) \cdot d\tau \quad [3.150a]$$

Se $\tau \ll t$, $\tau/t \cong 0$. Ricordando, poi, che per tempi di volo così lunghi:

$$\int_0^t \rho_L(\tau) \cdot d\tau \cong \int_0^{\infty} \rho_L(\tau) \cdot d\tau = T_L \quad [3.1450]$$

si ha che in campo lontano:

$$\sigma_y^2 = 2 \cdot \sigma_v^2 \cdot t \cdot T_L \quad \text{cioè} \quad \sigma_y = \sqrt{2 \cdot \sigma_v^2 \cdot T_L} \cdot \sqrt{t} \quad [3.150c]$$

Questo è il risultato del tutto simile a quanto si ottiene dalla teoria cinetica dei gas per i fenomeni di diffusione. Quindi, quando i tempi di volo sono di molto superiori al tempo caratteristico lagrangiano T_L , la dispersione turbolenta delle particelle in un campo di moto turbolento omogeneo e stazionario è analoga alla diffusione molecolare. Per avere un'idea degli ordini di grandezza in gioco, si consideri una situazione convettiva con $\sigma_v \cong 0.7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ e $T_L \cong 210 \text{ s}$. Se al moto turbolento trasversale si sovrappone un moto orizzontale di traslazione di circa 2 ms^{-1} , si può affermare che le condizioni di campo lontano si instaurano per tempi di volo molto superiori a 210 s (diciamo 1050 s) e a distanze dal punto di emissione superiori a 420 m (diciamo 2100 m).

3.3.5.1 Rappresentazione spettrale della teoria di Taylor

La teoria di Taylor, partendo dalla sola ipotesi di stazionarietà ed omogeneità ed isotropia locale del campo di moto, è giunta a descrivere la dispersione (laterale, nel caso considerato) delle par-

ticelle emesse in un punto dello spazio ad un istante iniziale. In pratica, ha descritto la dispersione laterale di un pennacchio emesso (senza galleggiamento) da un camino. La relazione ottenuta è:

$$\sigma_y^2(t) = 2\overline{v'^2} \cdot \int_0^t (t-\tau) \cdot \rho_L(\tau) \cdot d\tau_1 \quad [3.151a]$$

ed è stata scritta nel dominio del tempo. Ci si può domandare come possa essere tale relazione nel dominio delle frequenze. Ricordando che tra lo spettro lagrangiano S_{L_v} (*two-sided*) della componente trasversale v del moto di una particella, la sua funzione di autocorrelazione $R_{L_v}(\tau)$ e la funzione di autocorrelazione normalizzata $\rho_{L_v}(\tau)$ valgono le relazioni seguenti:

$$S_{L_v}(f) = 2 \int_0^\infty R_{L_v}(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau \quad [3.151b]$$

$$R_{L_v}(\tau) = 2 \int_0^\infty S_{L_v}(f) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot df \quad [3.151c]$$

$$R_{L_v}(\tau) = \overline{v'^2} \cdot \rho_{L_v}(\tau) \quad [3.151d]$$

Sostituendo la (3.151c) nella (3.151a) si ottiene la relazione:

$$\sigma_y^2(t) = 4 \int_0^\infty S_{L_v}(f) \cdot \left[\int_0^t (t-\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau \right] \cdot df \quad [3.152a]$$

che, integrata rispetto al tempo τ , diventa:

$$\sigma_y^2(t) = t^2 \int_0^\infty S_{L_v}(f) \cdot \frac{\sin^2(\pi ft)}{(\pi ft)^2} \cdot df \quad [3.152b]$$

E' di estrema importanza notare come nell'integrale presente nella relazione precedente ci sia la densità spettrale lagrangiana $S_{L_v}(f)$ moltiplicata per la funzione $F(ft)$:

$$F(ft) = \frac{\sin^2(\pi ft)}{(\pi ft)^2} \quad [3.152c]$$

funzione riportata in Fig. 3.20.

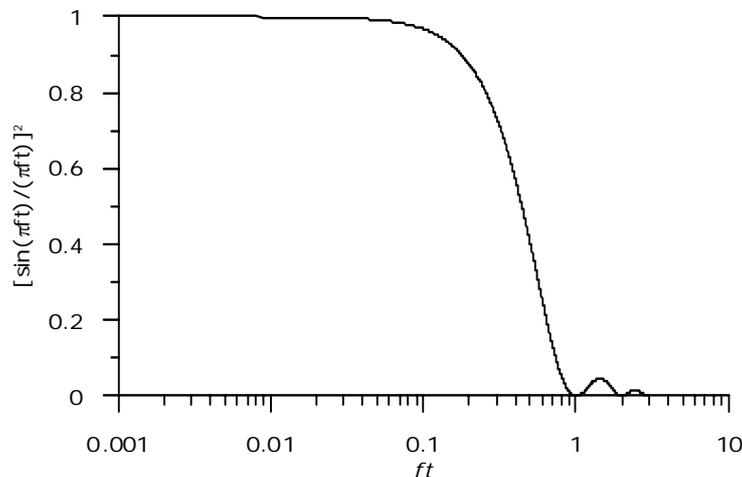


Fig. 3.20: la funzione filtro nella rappresentazione spettrale della legge di Taylor

Tale funzione ha un comportamento molto interessante. Se il tempo t è molto piccolo, la particella è appena stata rilasciata e si trova nei pressi del punto di emissione. In questo caso la funzione peso $F(ft)$ è prossima all'unità e l'intero integrale nella (3.152b) è pari alla varianza euleriana della componente trasversale del vento. In sostanza, alla dispersione delle particelle all'inizio del moto nell'atmosfera contribuiscono tutte le scale di moto presenti nell'atmosfera stessa e quindi a tale dispersione partecipa l'intera energia cinetica dello spettro. Col passare del tempo, ft aumenta e la funzione $F(ft)$ filtra parte dei vortici turbolenti facendo sì che la dispersione delle particelle sia determinata prevalentemente dai vortici di dimensioni maggiori.