

4 MODELLO OPERATIVO DEL PBL

Il modello fluidodinamico, introdotto al Cap.2, pur essendo formalmente esatto è del tutto inapplicabile ai fini pratici per la sua non linearità intrinseca che lo rende ipersensibile anche a piccole perturbazioni delle condizioni iniziali e al contorno. Oltre a ciò, l'elevato numero di Reynolds che caratterizza il *PBL* fa sì che l'aria della parte bassa della Troposfera sia costantemente in regime turbolento. Ciò rende impossibile, con le tecnologie di misura attualmente disponibili, determinare sperimentalmente con precisione le condizioni iniziali ed al contorno di una porzione anche limitata del *PBL*.

Supponendo, per un momento, che queste difficoltà vengano meno (cosa decisamente improbabile, comunque), ci troviamo di fronte anche ad una difficoltà *computazionale*. Infatti, del modello fluidodinamico del *PBL* non si conoscono soluzioni analitiche relative a situazioni vicine a quelle reali e quindi sarebbe necessario procedere ad una sua risoluzione numerica che passa attraverso la discretizzazione del dominio di indagine in un numero finito di celle di calcolo nello spazio e nel tempo. Per non perderci qualcosa di importante nella risoluzione numerica del sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che costituiscono il modello fluidodinamico, è necessario che le dimensioni spaziali e temporali della cella di calcolo siano inferiori alle dimensioni spaziali e temporali caratteristiche dei fenomeni che caratterizzano l'evoluzione del *PBL*. Ma nel *PBL*, sempre in regime turbolento, sono presenti vortici di varie dimensioni che nascono, evolvono e si frammentano trasferendosi energia l'un l'altro, fino a scomparire generando calore. Pertanto, la discretizzazione del dominio di calcolo dovrebbe essere tale da consentire la descrizione di tutte queste scale spaziali e temporali.

Abbiamo visto che, dal punto di vista fluidodinamico, il *PBL* può essere caratterizzato da una lunghezza di scala L (dell'ordine di 10^3 in senso verticale e dell'ordine di 10^5 m in orizzontale) e di una velocità di scala U (dell'ordine di 10 m·s⁻¹). Inoltre, la viscosità cinematica dell'aria ν è di circa $1.4 \cdot 10^{-5}$ m²·s⁻¹. Quindi il numero di Reynolds $Re = UL/\nu$ è di circa $10^9 \div 10^{11}$ (a seconda che si consideri la scala caratteristica verticale o quella orizzontale) e non ci sono dubbi che il *PBL* sia in regime turbolento. Inoltre, i grandi vortici convettivi, che si sviluppano dal suolo nelle situazioni convettive, rappresentano dimensionalmente l'estremo superiore dei vortici presenti nel *PBL*. Dato che essi occupano quasi tutta l'estensione verticale del *PBL*, la loro dimensione caratteristica l è prossima a L (e quindi dell'ordine di 10^3 m) e la loro velocità caratteristica u è prossima a U . Anche per tali vortici è possibile definire un Numero di Reynolds $R_t = ul/\nu$ sicuramente dell'ordine di 10^9 . Questi sono i vortici più grandi che possono risiedere nel *PBL*, ma la loro vita è decisamente breve, visto che possiedono un'instabilità intrinseca che li spinge a frammentarsi in vortici di dimensioni inferiori che, a loro volta, si frammentano ulteriormente dando luogo a vortici sempre più piccoli finché questi raggiungono dimensioni tali da consentire alla viscosità una loro completa distruzione, cui è associata una produzione di calore.

Ma che dimensione hanno i vortici più piccoli, prima di venir distrutti dalle forze viscosive? Nel prossimo Capitolo tratteremo estesamente l'argomento, tuttavia fin da subito conviene premettere alcune conclusioni significative. Secondo l'ipotesi di Kolmogorov, la lunghezza di scala dei più piccoli vortici che vengono catturati dalle forze di dissipazione viscosa è la *lunghezza di scala di Kolmogorov* η , definita come:

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \quad [4.1a]$$

cui corrisponde una *velocità di scala* pari a:

$$u_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4} \quad [4.1b]$$

In queste relazioni con ε si è indicato il tasso di dissipazione di energia cinetica turbolenta, che incontreremo più in là nel capitolo. Per ora è sufficiente considerare ε come l'energia cinetica che, nell'unità di tempo, viene trasferita da un vortice di dimensione generica ai vortici prodotti dalla sua frammentazione. Sulla base di ragionamenti puramente dimensionali, che verranno spostati al capitolo successivo, si ha che:

$$\varepsilon \approx u^3/l \quad [4.1c]$$

Da quanto detto in precedenza, se $u \sim 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $l \sim 10^3 \text{ m}$, allora $\varepsilon \sim 1 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-3}$, si ha che:

$$\eta \approx \left[(1.4 \cdot 10^{-5})^3 / 1 \right]^{1/4} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$u_\eta \approx (1.4 \cdot 10^{-5})^{1/4} \approx 0.06 \cdot \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

ed il tempo caratteristico si riduce a:

$$\tau_\eta = \eta / u_\eta \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Quindi le dimensioni caratteristiche dei vortici presenti nel *PBL* hanno dimensioni che variano da 10^3 m (i grandi vortici convettivi) a 10^{-3} m (i piccoli vortici prossimi ad essere dissolti in calore dalle forze viscosse). Un dominio spaziale in grado di rappresentare (*risolvere*) tutte le scale presenti nel *PBL* dovrebbe essere un parallelepipedo con dimensioni orizzontali almeno dell'ordine di 10^5 m e con dimensione verticale dell'ordine di 10^3 m , mentre la dimensione della cella elementare dovrebbe essere dell'ordine della più piccola scala da risolvere, cioè dovrebbe essere un cubo di dimensione circa pari a η . Pertanto il numero di celle che il modello dovrebbe considerare per riuscire a risolvere le varie scale presenti dovrebbe essere dell'ordine di:

$$N \approx \frac{10^5 \cdot 10^5 \cdot 10^3}{(10^{-3})^3} = 10^{21}$$

che è un numero enorme, ben superiore alle capacità di calcolo dei computer attualmente disponibili.

In un contesto reale non ci resta quindi altra scelta che abbandonare ogni speranza di poter utilizzare direttamente il modello fluidodinamico del *PBL* ed adottare definitivamente il modello statistico introdotto al capitolo precedente, secondo cui:

1. le variabili meteorologiche vengono considerate variabili stocastiche (o meglio, campi stocastici);
2. tali variabili, secondo l'ipotesi di Reynolds, sono la somma di un valor medio (lentamente variabile nel tempo e deterministico) e di una fluttuazione turbolenta di natura puramente stocastica;
3. valgono ancora le equazioni che costituiscono il modello fluidodinamico del *PBL*, che però ora dobbiamo riscrivere tenendo conto dell'ipotesi di Reynolds ed evidenziando i vari momenti statistici centrali.

A rigore, adottando l'ipotesi di Reynolds, adottiamo pure come media il valore atteso impiegato in Statistica, anche se tale definizione a rigore non la si può usare in un contesto operativo. In pratica ipotizzeremo sempre che i processi atmosferici siano anche ergodici e quindi che la media d'insieme e la media temporale coincidano. Questo è il modo tradizionale di operare, quello impiegato nei normali modelli meteorologici e quello che useremo qui di seguito, anche se oggi è stata sviluppata una classe di modelli alla cui base sta la media spaziale. Tali modelli sono stati denominati *LES (Large Eddy Simulation Model)* e li tratteremo brevemente in Appendice D.

4.1 LE PROPRIETÀ DELLA MEDIA

Innanzitutto è opportuno formulare dettagliatamente l'ipotesi proposta nel 1895 da Osborne Reynolds secondo cui ogni variabile istantanea viene decomposta in una quantità *media* ed in una fluttuazione *turbolenta* (*decomposizione di Reynolds*). Per le grandezze fisiche interessate dalle equazioni di bilancio *istantanee* si ha che:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' & v &= \bar{v} + v' & w &= \bar{w} + w' \\ \theta_v &= \bar{\theta}_v + \theta'_v & p &= \bar{p} + p' & \rho &= \bar{\rho} + \rho' \\ q_v &= \bar{q}_v + q'_v & q_L &= \bar{q}_L + q'_L & q_T &= \bar{q}_T + q'_T \end{aligned} \quad [4.2]$$

Per poter utilizzare correttamente l'ipotesi di Reynolds, è necessario ricordare le principali proprietà cui deve soddisfare la media di insieme. Per fare ciò, consideriamo due generiche variabili stocastiche A e B con fluttuazioni a' e b' . Sia c una costante generica ed indichiamo col simbolo $\bar{(\cdot)}$ il valor medio statistico (cioè il valore atteso).

Le proprietà tipiche della media sono:

1. Proprietà 1: la media della media è la media stessa, cioè:

$$\bar{\bar{A}} = \bar{A} \quad [4.3a]$$

2. Proprietà 2: la media delle fluttuazioni è nulla, cioè:

$$\bar{a'} = 0 \quad [4.3b]$$

3. Proprietà 3: la media del prodotto di una costante c per una variabile stocastica è pari al prodotto della costante per il valor medio della variabile, cioè:

$$\bar{cA} = c \cdot \bar{A} \quad [4.3c]$$

4. Proprietà 3: la proprietà distributiva, che può essere formulata come:

$$\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B} \quad [4.3d]$$

5. Proprietà 4: il valor medio del prodotto di una variabile stocastica B per il valor medio di una variabile A è pari al prodotto dei due valori medi, cioè:

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} \cdot \bar{B} \quad [4.3e]$$

Tutte queste proprietà sono facilmente dimostrabili, sfruttando il fatto che il valor medio di una variabile stocastica X , distribuita secondo una funzione di densità di probabilità $p(x)$, è data da:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) \cdot dx \quad [4.4a]$$

e che ogni funzione $Q(X)$ di tale variabile stocastica ha il valor medio dato da:

$$\overline{Q(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x) \cdot p(x) \cdot dx \quad [4.4b]$$

Impiegando quest'ultima proprietà, è possibile ottenere un'ulteriore importantissima proprietà della media. Ipotizziamo, infatti, che una variabile stocastica X sia funzione del tempo t , cioè $X(t)$ e che la funzione $Q(X) = \partial X(t)/\partial t$. Allora, nell'ipotesi che $p(x)$ sia indipendente dal tempo, si ha che:

$$\overline{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial x}{\partial t} \cdot p(x) \cdot dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) \cdot dx = \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} \quad [4.5a]$$

quindi l'operatore derivata temporale (e spaziale, come si può facilmente dimostrare) commuta con l'operatore di media statistica. Si può anche verificare facilmente che:

$$\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial t}\right)} = 0 \quad [4.5b]$$

Prima di procedere, è interessante calcolare il valor medio del prodotto di due variabili istantanee A e B . Decomponendo entrambe le grandezze secondo l'ipotesi di Reynolds, mediando il prodotto, sviluppando i termini ed applicando le proprietà della media di insieme si ha che:

$$\begin{aligned} \overline{A \cdot B} &= \overline{(\bar{A} + a') \cdot (\bar{B} + b')} = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A}b' + a'\bar{B} + a'b'} = \\ &= \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}} + \overline{\bar{A}b'} + \overline{a'\bar{B}} + \overline{a'b'} = \bar{A} \cdot \bar{B} + 0 + 0 + \overline{a'b'} \\ &= \bar{A} \cdot \bar{B} + \overline{a'b'} \end{aligned} \quad [4.6]$$

cioè il valor medio del prodotto di due variabili stocastiche è pari alla somma del prodotto dei rispettivi valori medi e della loro covarianza e la quantità $\overline{a'b'}$, cioè la covarianza tra le due variabili, non è necessariamente nulla. Come si dimostrerà in seguito, la principale differenza tra le equazioni con variabili istantanee e quelle con variabili medie sarà proprio la presenza in queste ultime dei momenti di secondo ordine (*Reynolds stress* e *flussi di calore turbolento*) che *non possono essere trascurati*.

4.2 LE EQUAZIONI PER LE VARIABILI MEDIE

Note le proprietà della media statistica e adottata l'ipotesi di scomposizione delle variabili atmosferiche istantanee nella componente media e nella fluttuazione turbolenta, non ci resta che considerare una ad una le equazioni fluidodinamiche ricavate al Cap.2 ed ottenere le corrispondenti equazioni per il momento statistico del primo ordine, cioè per la media.

4.2.1 L'EQUAZIONE DI STATO DEI GAS

Si consideri l'equazione di stato dei gas (2.26b) scritta per le variabili istantanee. Sostituendo ogni occorrenza di variabile istantanea con la rispettiva decomposizione di Reynolds si ottiene:

$$\overline{p}/R_d + p'/R_d = [\overline{\rho} + \rho'] \cdot [\overline{T}_v + T'_v] \quad [4.7a]$$

che, sviluppando i vari termini, diventa:

$$\overline{p}/R_d + p'/R_d = \overline{\rho} \cdot \overline{T}_v + \rho' \cdot \overline{T}_v + \overline{\rho} \cdot T'_v + \rho' \cdot T'_v \quad [4.7b]$$

Mediando la relazione precedente ed impiegando le proprietà della media si ha che:

$$\overline{p}/R_d = \overline{\rho} \cdot \overline{T}_v + \overline{\rho' T'_v} \quad [4.7c]$$

L'ultimo termine di questa relazione, che rappresenta la covarianza tra la densità dell'aria e la temperatura virtuale, è generalmente molto più piccolo degli altri e può essere trascurato, pertanto l'equazione di stato dei gas, scritta per le variabili medie, diventa con buona approssimazione:

$$\overline{p} = R_d \cdot \overline{\rho} \cdot \overline{T}_v \quad [4.7d]$$

In sostanza, l'equazione di stato dai gas perfetti mantiene la stessa struttura analitica sia che venga espressa in termini di variabili istantanee che in termini di variabili medie.

A questo punto, ottenuta la prima relazione del modello fluidodinamico scritto per le variabili medie, è interessante verificare se sia possibile stabilire delle relazioni tra i rapporti delle fluttuazioni con i rispettivi valori medi per pressione, densità e temperatura virtuale. A tal fine, sottraendo l'equazione (4.7d) dalla forma dell'equazione dei gas scritta per le variabili istantanee (2.26b), si ha:

$$p'/R_d = \rho' \overline{T_v} + \overline{\rho} \cdot T_v' + \rho' T_v' \quad [4.8a]$$

che, divisa per la (4.7d), porta a:

$$\frac{p'}{p} = \frac{\rho'}{\rho} + \frac{T_v'}{T_v} + \frac{\rho' T_v'}{\rho \cdot T_v} \quad [4.8b]$$

Considerazioni di scala consentono di affermare che il denominatore dell'ultimo termine a destra è di consueto molto maggiore del proprio numeratore, quindi la relazione precedente si riduce a:

$$\frac{p'}{p} = \frac{\rho'}{\rho} + \frac{T_v'}{T_v} \quad [4.8c]$$

che rappresenta la *legge linearizzata delle perturbazioni nei gas ideali (linearized perturbation ideal gas law)*. Nella parte bassa della troposfera (e quindi nel *PBL*) un valore tipico di perturbazione di pressione è 0.1mb mentre un valore tipico di perturbazione di temperatura virtuale è 1K. Pertanto, la legge linearizzata dei gas può essere agevolmente semplificata in:

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{T_v'}{T_v} \quad [4.8d]$$

Con argomenti analoghi si giunge ad una utile forma della relazione precedente in cui compare la temperatura potenziale virtuale, cioè:

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{\theta_v'}{\theta_v} \quad [4.8e]$$

4.2.2 L'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Il bilancio di massa scritto per le variabili istantanee è dato, in generale, dall'equazione (2.14a), mentre la (2.16b) è la sua versione *anelastica* e la (2.16c) la sua forma *incomprimibile*.

Si consideri, inizialmente, la forma completa (2.14a). Introducendo in essa la decomposizione di Reynolds per la densità e le componenti del vento, sviluppando le relazioni, applicando le normali regole di derivazione e utilizzando le proprietà della media di insieme si ottiene:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho \cdot u_j}}{\partial x_j} + \overline{\frac{\partial \rho' u_j'}{\partial x_j}} = 0 \quad [4.9a]$$

in cui compare nell'ultimo termine di sinistra la divergenza del flusso turbolento della densità che, a priori, non dovrebbe essere nullo. Tuttavia considerazioni di scala ed evidenze sperimentali fanno sì che tale termine sia trascurabile; pertanto, la forma generale dell'equazione di continuità, scritta per le variabili medie, risulta ben rappresentata dall'equazione seguente:

$$\frac{\overline{\partial \rho}}{\partial t} + \frac{\overline{\partial \rho \cdot u_j}}{\partial x_j} = 0 \quad [4.9b]$$

Come si nota, questa equazione è stata scritta *in forma di flusso*, cioè il termine *avvettivo* è rappresentato dalla divergenza del prodotto tra la densità media dell'aria ed il valor medio delle componenti della velocità, che è poi il flusso medio di massa.

Se si considera sia la forma anelastica che la forma incomprimibile dell'equazione, ragionamenti analoghi portano alle relazioni seguenti, che esprimono le loro controparti scritte per le variabili medie:

$$\frac{\partial \rho_0 \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0 \quad [4.9c]$$

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0 \quad [4.9d]$$

Quanto ottenuto sta a significare che la forma matematica con cui si presenta l'equazione di continuità scritta per le variabili medie è del tutto identica all'analoga equazione scritta per le variabili istantanee. Questo è vero *esattamente* solo per la forma incomprimibile dell'equazione ed è un'ottima approssimazione per la forma generale e per la forma anelastica. Va inoltre notato che nella forma anelastica (4.9c) è presente il valore di *background* sinottico ρ_0 della densità dell'aria. Un'approssimazione altrettanto buona dell'equazione di continuità in forma anelastica (Pielke, 2002) è data ripetendo i ragionamenti di scala direttamente sulla (4.9b) ottenendo:

$$\frac{\overline{\partial \rho \cdot u_j}}{\partial x_j} = 0 \quad [4.9e]$$

che poco o nulla differisce dalla (4.9c), se non per la presenza del valor medio della densità dell'aria al posto del suo valore di *background* sinottico.

Infine è interessante notare come, considerando la forma incomprimibile, l'equazione di continuità rappresenti una *relazione diagnostica* sia per le componenti medie del vento che per le rispettive fluttuazioni, come facilmente si può dimostrare. In effetti, è immediato dimostrare come nel caso incomprimibile valga la relazione:

$$\frac{\partial u_j'}{\partial x_j} = 0 \quad [4.9f]$$

e non è difficile giungere alle relazioni equivalenti per il caso generale e per il caso anelastica.

Per concludere, è opportuno illustrare con un esempio ciò che esprime l'equazione di continuità (Stull, 2000). Per fare ciò, è conveniente considerarne la forma incomprimibile e *specializzarla* per un caso particolare. Consideriamo, infatti un volume di controllo in atmosfera a forma di parallelepipedo con gli spigoli paralleli agli assi coordinati e di lunghezza Δx , Δy e Δz . In questo caso, la (4.9d) può essere approssimata come:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta y} + \frac{\Delta w}{\Delta z} \cong 0 \quad [4.9g]$$

se le dimensioni del volume di controllo sono *sufficientemente piccole*. Consideriamo ora il caso concreto rappresentato in *Fig. 4.1* in cui è evidenziata con frecce la velocità dell'aria entrante ed uscente dalle varie facce del volume di controllo. La lunghezza delle frecce è direttamente proporzionale alla velocità.

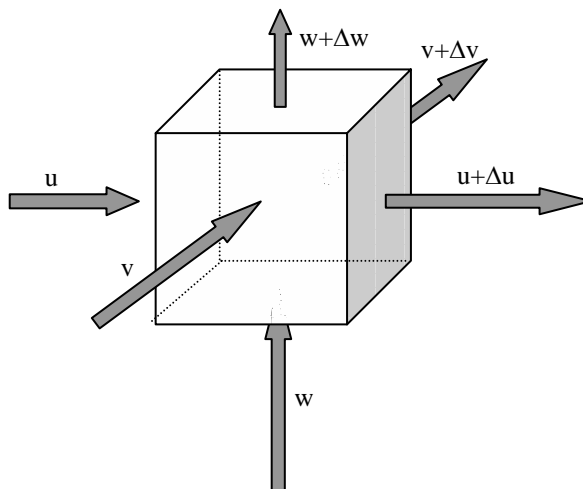


Fig. 4.1: equazione di continuità, divergenza e convergenza.

Questa situazione particolare evidenzia che:

- nella direzione x la velocità dell'aria che entra nel volume di controllo è inferiore alla velocità dell'aria uscente da esso. Ciò significa che il flusso di massa entrante nel volume è inferiore a quello uscente. Una situazione di questo genere è chiamata divergenza;
- nella direzione z la velocità verticale entrante è superiore a quella uscente, quindi il flusso di massa entrante nel volume è superiore a quello uscente. Una situazione di questo genere è detta convergenza;
- il flusso di massa entrante in direzione y è uguale a quello uscente e in questa direzione non si ha né divergenza né convergenza.

Se vogliamo riassumere ciò che è avvenuto nel caso illustrato in figura, possiamo riscrivere l'equazione di continuità nella forma incomprimibile evidenziando solo i segni dei vari termini che la compongono; ciò porta a dire che:

$$(\text{positivo}) + (0) + (\text{negativo}) = 0$$

In sostanza, la convergenza in una o due direzioni deve essere bilanciata dalla divergenza nelle direzioni rimanenti.

4.2.3 LE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

Il punto di partenza per ottenere le equazioni del moto per le componenti medie della velocità dell'aria (del vento, quindi) è costituito dalle corrispondenti equazioni per le componenti istantanee la cui espressione generica, in notazione tensoriale, è pari a:

$$\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{(2)} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{(3)} - \underbrace{\delta_{i3} g}_{(4)} + \underbrace{f \varepsilon_{ij3} u_j}_{(5)} + \nu \underbrace{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}_{(6)} \quad [4.10]$$

dove si vede come ciascuna delle tre equazioni del moto istantaneo sia costituita da sei termini distinti.

4.2.3.1 Mediazione delle equazioni

Seguendo l'ipotesi di Reynolds, si assuma che le componenti del moto, la densità e la pressione possono essere scomposti in valori medi e fluttuazioni turbolente:

$$u_j = \bar{u}_j + u'_j \quad \rho = \bar{\rho} + \rho' \quad p = \bar{p} + p'$$

Sostituendo le scomposizioni di Reynolds nelle (4.10) ed eseguendo la mediazione dell'intera equazione, che si riduce alla mediazione dei singoli termini, si ottiene una nuova equazione, sempre di sei termini, aventi le caratteristiche seguenti:

- primo termine: ricordando che l'operatore media e l'operatore derivata commutano tra loro, si vede immediatamente che:

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} [\bar{u}_i + u'_i]} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} \quad [4.11a]$$

- secondo termine: questo termine non lineare è estremamente interessante, infatti, sviluppando i prodotti, si ha che:

$$\overline{(\bar{u}_j + u'_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i + u'_i)} = \bar{u}_j \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} + \bar{u}_j \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad [4.11b]$$

E' immediato verificare che il secondo ed il terzo termine del membro di destra sono nulli e quindi la relazione precedente si riduce a:

$$\overline{(\bar{u}_j + u'_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i + u'_i)} = \bar{u}_j \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad [4.11c]$$

L'ultimo termine dello sviluppo è insolito e, come si vedrà, è di fatto un flusso turbolento. Di esso si tratterà successivamente.

- terzo termine: la trattazione semplificata, ma estremamente realistica, di questo termine si basa sulla constatazione che:

$$\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \cong \frac{1}{\bar{\rho}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial p'}{\partial x_j} = 0 \quad [4.11d]$$

quindi si ha che:

$$-\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p} + p') = -\frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \quad [4.11e]$$

- quarto termine: è uno scalare e non risulta modificato dall'operazione di mediazione.
- quinto termine: non ci sono dubbi di sorta nell'affermare che:

$$\overline{f \varepsilon_{ij3} (\bar{u}_j + u'_j)} = f \varepsilon_{ij3} \bar{u}_j \quad [4.11f]$$

- sesto termine: in questo termine sono condensate le forze viscosi e, una volta introdotta la scomposizione di Reynolds per le componenti del moto, diventa:

$$v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = v \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\bar{u}_i + u'_i) = v \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} + v \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \quad [4.11g]$$

Mediando e ricordando che l'operatore media e l'operatore derivata commutano tra loro

e che il valor medio delle fluttuazioni è nullo, si ha che:

$$\overline{v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}} = v \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} \quad [4.11h]$$

Sulla base di questi risultati, le equazioni prognostiche delle componenti cartesiane medie del moto risultano date in notazione tensoriale da:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + f \varepsilon_{ij3} \bar{u}_j - \overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} + v \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} \quad [4.12]$$

In queste relazioni:

- il *primo termine* rappresenta il tasso di variazione di quantità di moto media per unità di massa, cioè l'accelerazione di una particella in atmosfera;
- il *secondo termine* descrive l'avvezione di quantità di moto media causata dal moto medio delle masse d'aria;
- il *terzo termine* descrive l'effetto accelerante derivato dalle forze legate al gradiente della pressione media;
- il *quarto termine* descrive l'azione verticale della gravità;
- il *quinto termine* descrive l'influenza della rotazione terrestre (effetto di Coriolis);
- il *sesto termine* (scritto in termini tensoriali e, quindi, equivalente a nove termini distinti, tre per ogni componente cartesiana) rappresenta l'influenza degli *stress di Reynolds* sul moto medio. La presenza di questo ultimo termine implica che la *turbolenza deve sempre essere considerata*, anche quando si è interessati solamente alle variabili medie. Spesso questo termine è dello stesso ordine di grandezza (a volte anche maggiore) di molti altri termini presenti nell'equazione;
- il *settimo termine* rappresenta l'azione dissipativa delle forze viscosive. Tale termine, lontano dal suolo, può essere trascurato e scomparirà nelle trattazioni che di seguito faremo.

La forma con cui sono espressi i termini *turbolenti* è scomoda e conviene individuarne una congruente con il concetto di stress di Reynolds e di flussi turbolenti (Cap.3).

Per poter riscrivere il penultimo termine della (4.12) è necessario utilizzare l'equazione di continuità in una delle due forme semplificate: o la forma anelastica o quella incomprimibile. Si consideri la forma anelastica (2.16b) per le variabili istantanee. La sua mediazione conduce inevitabilmente alla (4.9c). Introducendo nella forma istantanea la decomposizione di Reynolds e sottraendo la (4.9c) si ottiene che:

$$\frac{\partial \rho_0 u_j'}{\partial x_j} = 0 \quad [4.13a]$$

Si consideri ora il termine *turbolento* dell'equazione media di Navier-Stokes. Grazie alla precedente relazione esso diventa:

$$\begin{aligned} \overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} &= \frac{1}{\rho_0} \overline{\left[\rho_0 u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right]} = \frac{1}{\rho_0} \overline{\left[\frac{\partial \rho_0 u_j' u_i'}{\partial x_j} - u_i' \frac{\partial \rho_0 u_j'}{\partial x_j} \right]} = \\ &= \frac{1}{\rho_0} \overline{\frac{\partial \rho_0 u_j' u_i'}{\partial x_j}} \end{aligned} \quad [4.13b]$$

In questa equazione è presente il valore di background sinottico ρ_0 della densità. Con buona approssimazione (Pielke, 2002) si può porre anche in questo caso:

$$\rho_0 \cong \bar{\rho} \quad [4.13c]$$

Nello stesso modo si procede quando si usa la forma incomprimibile dell'equazione di continuità giungendo a:

$$\overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{\overline{\partial u_j u_i}}{\partial x_j} \quad [4.13d]$$

Visto che l'impiego della forma incomprimibile dell'equazione di continuità è soggetta a notevoli vincoli (la lunghezza di scala verticale H deve essere molto minore di H_α), nel seguito verrà considerato solo ciò che si ottiene dall'uso della forma anelastica, cioè il risultato (4.13b) che introdotto nella (4.12) fornisce la versione definitiva delle equazioni di Navier-Stokes per le componenti medie del moto:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + f \varepsilon_{ij3} \bar{u}_j - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho \cdot u_i u_j} \right) \quad [4.14]$$

Come si può notare, in questa equazione è stato trascurato il termine viscoso.

A questo punto dello sviluppo del modello fluidodinamico per le variabili medie dell'atmosfera, e quindi del *PBL*, si è giunti alle seguenti conclusioni:

- le tre equazioni di Navier-Stokes, che descrivono la variazione nel tempo e nello spazio delle componenti cartesiane medie del moto u_i (cioè u, v, w), dipendono direttamente da cinque variabili medie: le tre componenti medie del moto stesso, la pressione media e la densità media dell'aria. Oltre a ciò, in esse sono presenti nove termini *turbolenti* non presenti altrove;
- a queste relazioni va aggiunta l'equazione di continuità che coinvolge, in generale, la densità media dell'aria e le tre componenti medie del moto;
- per completare la descrizione del modello si va ad aggiungere l'equazione di stato dei gas che coinvolge il valore medio di pressione, temperatura virtuale e densità.

A parte le componenti *turbolente* e la temperatura media (di cui si tratterà successivamente), l'insieme di queste equazioni risulta un sistema coerente e costituisce il modello di base per il moto delle masse d'aria in atmosfera, anche se per il momento non comprende un'equazione relativa alla temperatura media e al contenuto medio di acqua.

Pur essendo concluso il processo di mediazione delle equazioni di Navier-Stokes e prima di occuparci di altre relazioni di bilancio, è necessario proseguire l'analisi delle equazioni di moto focalizzando l'attenzione sulla presenza in esse della densità e della pressione media.

4.2.3.2 L'approssimazione di Boussinesq

Fin qui si è scomposta ogni variabile istantanea in un valor medio ed in una fluttuazione e questa è l'essenza dell'ipotesi di Reynolds. Ora, però, immaginiamo che anche il valor medio della pressione, della temperatura potenziale virtuale e della densità sia scomponibile in un *valore di background sinottico* p_0 , θ_0 e ρ_0 e in una *fluttuazione a mesoscala* p'' , θ'' e ρ'' . In corrispondenza della temperatura risulta definito anche lo stato di riferimento T_0 per la temperatura. Ciò sta a significare che sia ipotizzabile uno *stato di riferimento* per l'atmosfera, secondo cui:

- vale la legge dei gas nella forma $p_0 = R_d \rho_0 T_0$
- l'atmosfera è in equilibrio idrostatico, cioè deve valere esattamente l'equazione idrosta-

tica: $\partial p_0/\partial z = -\rho_0 g$ e che lo stato reale dell'atmosfera *differisce di poco* da quello di riferimento. Il criterio che si adotta in questa decomposizione non è rigido; una possibilità comoda è quella di ritenere che, ad ogni istante t e ad una quota z , il valore di *background sinottico* di una variabile coincida con la sua media orizzontale su tutto il dominio di indagine e a quella quota, mentre la rispettiva *perturbazione a mesoscala* sia la differenza tra il valore medio della variabile ed il valore di background sinottico. Oltre a ciò, semplicemente per ragioni di comodità analitica, è conveniente non considerare la densità media ρ ma il volume specifico $\alpha=1/\rho$. Pertanto, anche per α sarà definibile un valore di background sinottico α_0 ed una perturbazione a mesoscala α'' . Per come è stato qui definito, il valore di background sinottico di una data variabile non varia rispetto a x e a y .

Focalizzando ora l'attenzione sull'equazione relativa alla componente verticale del moto, il termine relativo al gradiente verticale di pressione e quello relativo alla gravità è, in generale, espresso come:

$$\mathfrak{S} = \bar{\alpha} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g \quad [4.15a]$$

Utilizzando la decomposizione descritta, sviluppando i calcoli e ricordando che i valori di background di volume specifico e pressione sono in equilibrio idrostatico, si ottiene:

$$\mathfrak{S} = \alpha_0 \left(1 + \frac{\alpha''}{\alpha_0} \right) \cdot \left(\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial p''}{\partial z} \right) + g = \alpha_0 \left(1 + \frac{\alpha''}{\alpha_0} \right) \cdot \frac{\partial p''}{\partial z} - \frac{\alpha''}{\alpha_0} g \quad [4.15b]$$

Nella relazione il termine $\alpha'' \partial p''/\partial z$ risulta piccolo e quindi trascurabile, quindi:

$$\mathfrak{S} \cong \alpha_0 \frac{\partial p''}{\partial z} - \frac{\alpha''}{\alpha_0} g = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p''}{\partial z} - \frac{\alpha''}{\alpha_0} g \quad [4.15c]$$

La sostituzione dei termini di gradiente verticale di pressione nell'equazione verticale del moto, fa sì che la (4.14) diventi:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p''}{\partial x_i} + \delta_{i3} \frac{\alpha''}{\alpha_0} g + f \varepsilon_{ij3} \bar{u}_j - \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho_0 \cdot \overline{u_i u_j} \right) \quad [4.16]$$

L'obiettivo che vogliamo perseguire è quello di liberarci del rapporto α''/α_0 . Se introduciamo nell'equazione di stato dei gas la decomposizione in variabile di background e perturbazione a mesoscala per la pressione, il volume specifico e la temperatura, dopo alcuni passaggi algebrici giungiamo a:

$$\frac{\alpha''}{\alpha_0} \cong \frac{T_v''}{T_{v0}} - \frac{p''}{p_0} \quad [4.17a]$$

in cui abbiamo trascurato un termine in cui era presente il prodotto delle perturbazioni a mesoscala della pressione e del volume specifico. In questo modo, al posto del volume specifico, si utilizza la pressione e la temperatura virtuale. Se, però, consideriamo la definizione di temperatura potenziale virtuale, differenziandone il logaritmo e ricordando che $C_p = C_v + R_d$, otteniamo:

$$\frac{d\theta_v}{\theta_{v0}} = \frac{dT_v}{T_{v0}} - \left(1 - \frac{C_p}{C_v} \right) \cdot \frac{dp}{p_0} \quad [4.17b]$$

Dato che le perturbazioni a mesoscala sono piccole, si può affermare che in pratica esse coincidano con i rispettivi differenziali. Quindi, impiegando la relazione precedente (in cui i differenziali sono stati sostituiti dalle perturbazioni a mesoscala) ed inserendola nella (4.17a), si ottiene:

$$\frac{\alpha''}{\alpha_0} \cong \frac{\theta_v''}{\theta_{v0}} - \frac{C_p}{C_p} \cdot \frac{p''}{p_0} \quad [4.17c]$$

valida (Pielke 2002) quando vale l'approssimazione anelastica dell'equazione di continuità, cioè quando la lunghezza di scala verticale H risulta essere dello stesso ordine di grandezza della *density scale depth* H_α .

Quando, invece, $H \ll H_\alpha$ (Pielke 2002), cioè quando è valida l'approssimazione incomprimibile dell'equazione di continuità, tale relazione si riduce a:

$$\frac{\alpha''}{\alpha_0} \cong \frac{\theta_v''}{\theta_{v0}} \quad [4.17d]$$

Per la sua semplicità, tale equazione è la più usata nelle applicazioni pratiche, anche quando sarebbe maggiormente appropriato l'uso della (4.17c). Tutto ciò costituisce l'*approssimazione di Boussinesq*. Il significato di tale approssimazione è che le perturbazioni a mesoscala della densità sono causate sia dalle perturbazioni a mesoscala della temperatura che della pressione, ma *nei fatti* quando la lunghezza verticale di scala è piccolo rispetto a quella orizzontale, l'influenza delle perturbazioni di pressione risultano quasi irrilevante.

Quindi, tenendo conto dell'approssimazione di Boussinesq, il sistema di equazioni (4.16) prende la forma tensoriale seguente:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}''}{\partial x_i} + \frac{\theta_v''}{\theta_{v0}} \delta_{i3} g + f \varepsilon_{ij3} \bar{u}_j - \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho_0 \cdot \overline{u_i' u_j'} \right) \quad [4.18]$$

Si noti come le (4.14) e le (4.18) siano profondamente differenti. Mentre la prima è del tutto generale, la seconda è espressa in termini di scostamenti a mesoscala dal valore di background sinottico della pressione e della temperatura potenziale virtuale. Se la definizione di background sinottico è quella qui adottata, essi risultano costanti in orizzontale e variabili solo con la quota e col tempo a differenza dei rispettivi valori medi. Ad ogni istante l'equazione idrostatica e l'equazione di stato dei gas consentiranno poi la determinazione del corretto valore di background della densità, noti i valori di background di pressione e temperatura.

4.2.3.3 Il modello idrostatico e non idrostatico

Fin qui sono state proposte alcune forme di approssimazioni per le equazioni del moto e per l'equazione di continuità ed il quadro che ne risulta non è certamente chiaro. Proviamo ora a definire una gerarchia semplificata di modelli che combinano tali approssimazioni in maniera razionale. Naturalmente si tratterà nel seguito il problema della *prognosi* della temperatura potenziale virtuale e dell'umidità che però non varierà per le varie tipologie di modelli considerate.

Modello idrostatico

Questo modello è sicuramente il più semplice e si basa sull'ipotesi drastica secondo cui la variazione verticale della pressione media sia totalmente idrostatica e quindi che:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho} g \quad [4.19a]$$

In pratica, il modello idrostatico è composto dalle equazioni seguenti:

- le componenti orizzontali medie u e v del moto sono ottenute dalle equazioni prognostiche (4.14) relative a tali componenti;
- delle (4.14) viene trascurata l'equazione per la componente verticale w ;

- la pressione media dell'aria è ottenuta diagnosticamente dall'equazione idrostatica (4.19a);
- la temperatura virtuale media dell'aria, ipotizzando nota la temperatura potenziale virtuale dall'integrazione della rispettiva equazione prognostica di cui si tratterà successivamente, è calcolata diagnosticamente impiegando direttamente la definizione di temperatura potenziale virtuale;
- la densità media dell'aria è calcolata, una volta nota pressione e temperatura virtuale media, dall'equazione di stato dei gas;
- una volta nota la densità media, la componente media w del moto viene ottenuta diagnosticamente dall'equazione di continuità nella forma anelastica o nella forma incomprimibile.

Il vantaggio principale di un modello idrostatico è la sua semplicità e la capacità che ha di rimuovere le onde acustiche che si propagano in verticale come possibile soluzione delle equazioni di moto. Il suo svantaggio principale è che *non risolve* bene le accelerazioni verticali che diventano tanto più importanti quanto più piccola è la dimensione verticale della griglia di calcolo nella versione discretizzata del modello.

Modello non idrostatico elastico

Questo modello rappresenta il grado massimo di completezza e quindi di complessità. Esso è costituito dalle equazioni seguenti:

- le componenti medie del moto sono ottenute dalle tre equazioni del moto (4.14);
- la densità media dell'aria è derivata dalla forma elastica (4.9b) dell'equazione di continuità;
- la pressione deriva direttamente dall'equazione di stato dei gas.

Modello non idrostatico anelastico

Questo modello, almeno in teoria, si colloca ad un livello di complessità intermedio rispetto ai precedenti. In particolare:

- le componenti orizzontali medie del moto vengono ottenute prognosticamente dalle corrispondenti equazioni del moto in cui si è operata, per la pressione, la temperatura potenziale e la densità dell'aria, la decomposizione dei valori medi in background sinottico e perturbazioni a mesoscala (4.16). In alternativa possono essere impiegate anche le componenti orizzontali delle (4.18);
- la densità dell'aria si ottiene dall'equazione di continuità nella forma anelastica;
- per quanto riguarda la perturbazione a mesoscala della pressione, è necessario porre un certo numero di cautele. In particolare, si può dimostrare (Pielke 2002, Jacobson 2005) che, operando sulla componente verticale del moto con l'approssimazione di Boussinesq, si può giungere ad una equazione differenziale diagnostica per le perturbazioni a mesoscala p :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p''}{\partial x_j^2} + \frac{gC_v}{C_p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_0 p''}{\rho_0} \right) = & - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho_0 \bar{u}_i \bar{u}_j) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho_0 \overline{u_i u_j}) + \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial p_0}{\partial x} \delta_{i1} + \frac{\partial p_0}{\partial y} \delta_{i2} \right] + g \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_0 \theta''}{\theta_0} \right) - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_0 \underline{u}_k) \end{aligned} \quad [4.19b]$$

Naturalmente, nella nostra definizione p_0 varia solo con z e quindi il terzo termine del

membro di destra sarà identicamente nullo. Se, però $H \ll H_\infty$, questa relazione si riduce all'equazione di Poisson seguente:

$$\frac{\partial^2 p''}{\partial x_j^2} + \frac{gC_v}{C_p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_0 p''}{\rho_0} \right) = 0 \quad [4.19c]$$

- una volta calcolato p'' , la componente verticale media w del moto viene estratta diagnosticamente dall'equazione di continuità in forma anelastica, mentre il valore di background della densità si ottiene dall'equazione idrostatica.

Anche se apparentemente allettante, la risoluzione dell'equazione per la perturbazione a mesoscala della pressione di fatto annulla tutti gli altri vantaggi. L'esperienza maturata nelle applicazioni parrebbe, perciò, far preferire l'impiego del modello non idrostatico elastico.

4.2.3.4 L'avvezione in forma di flusso

Per facilitare la risoluzione numerica delle equazioni di moto con la tecnica delle differenze finite, quando l'equazione di continuità è espressa o in forma anelastica o in forma incomprimibile, è opportuno trasformare i termini avvevativi delle equazioni di Navier Stokes. La motivazione di ciò sta nella difficoltà numerica di predisporre algoritmi alle differenze finite che intrinsecamente conservino la massa. A tale proposito tutto si semplifica notevolmente se si trasforma il termine avvevativo nella divergenza del flusso di quantità di moto. In effetti ciò è possibile quando l'equazione di continuità è in forma diagnostica (o anelastica o incomprimibile) ed è facile dimostrare in questo caso che:

$$u_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \equiv \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 \bar{u}_i \bar{u}_j) \quad [4.20]$$

4.2.3.5 La funzione di Exner

Le equazioni di Navier-Stokes nella forma presentata nelle (4.14) e (4.16) sono dette *equazioni primitive*, visto che sono espresse in funzione del valor medio di quelle grandezze fisiche che sono intervenute direttamente nelle equazioni di bilancio. Sono state, tuttavia, proposte forme differenti di equazioni di moto, tutte fisicamente equivalenti, espresse però mediante grandezze *non primitive*. Quanto segue ne è un esempio.

E' frequente eliminare dalle equazioni di moto il gradiente della pressione media introducendo la *funzione di Exner* definita come:

$$\pi = C_p T_v / \theta \quad [4.21a]$$

Rimandando a Pielke (2002) per i dettagli, l'equivalente del sistema di equazioni (4.14) espressa in termini di funzione di Exner è la seguente:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\bar{\theta} \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + f_c \varepsilon_{ij3} \bar{u}_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j) \quad [4.21b]$$

Anche in questo caso è possibile introdurre un'approssimazione idrostatica, espressa in termini di funzione di Exner come:

$$\partial \bar{\pi} / \partial z = -g / \bar{\theta} \quad [4.21c]$$

e l'adozione di questa approssimazione anche questa volta comporta la soppressione della componente verticale della (4.21b). La complicazione che si aggiunge deriva dal fatto che il valore medio della funzione di Exner viene normalmente espresso come la somma di un valore di background sinottico e di una perturbazione a mesoscala. Quest'ultima deve ubbidire ad

un'equazione differenziale diagnostica piuttosto complessa, simile alla (4.19b) per i cui dettagli si rimanda a Pielke (2002).

4.2.3.6 Riepilogo delle equazioni di moto

L'insieme delle semplificazioni introdotte fin qui e la loro combinazione rischia di disorientare chi debba scegliere le equazioni di moto e l'equazione di continuità appropriate per la messa a punto di un modello a mesoscala di atmosfera, anche se il paragrafo precedente dovrebbe aver contribuito a riordinare un po' le idee. Per ragioni puramente didattiche è comunque conveniente, da questo momento in poi, definire un *sistema tipico di equazioni del moto* da utilizzare nel seguito della discussione. Di fatto, tale sistema è quello non idrostatico elastico in cui sono stati trascurati gli sforzi viscosi ed è costituito dalle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{v} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \bar{\rho} \cdot \bar{u}' u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \cdot \bar{v}' u'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \cdot \bar{w}' u'}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f \bar{u} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \bar{\rho} \cdot \bar{u}' v'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \cdot \bar{v}' v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \cdot \bar{w}' v'}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \bar{\rho} \cdot \bar{u}' w'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \cdot \bar{v}' w'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \cdot \bar{w}' w'}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad [4.22a]$$

Queste tre equazioni dipendono esplicitamente da cinque grandezze medie (le tre componenti della velocità, la pressione e la densità) e da nove flussi turbolenti. Per completare la chiusura del sistema, come si vedrà nel seguito, si devono aggiungere a queste equazioni l'equazione di continuità e l'equazione di stato dei gas e ciò comporta che le grandezze medie dell'intero sistema, ora costituito da cinque equazioni, aumentino di due unità (la temperatura potenziale e l'umidità). Se, come si vedrà nei punti seguenti, è possibile scrivere equazioni prognostiche anche per la temperatura potenziale media e per l'umidità, si raggiunge un bilancio complessivo tra equazioni del modello e grandezze medie implicate in esso. Tuttavia il modello nel suo complesso *non è matematicamente chiuso!* Mancano all'appello delle equazioni che forniscano i flussi turbolenti, i momenti del secondo ordine cioè, presenti nelle equazioni di Navier-Stokes e, come si vedrà, anche nelle equazioni per la temperatura potenziale e l'umidità. Si potrebbero scrivere equazioni anche per queste grandezze (e alcune le scriveremo), ma esse richiederebbero la conoscenza di momenti turbolenti di ordine superiore che, per essere esplicitati, avrebbero bisogno della conoscenza di momenti ancora superiori e così via. Il sistema delle equazioni della fluidodinamica scritte per le variabili medie non può mai essere chiuso! Su questo argomento si ritornerà successivamente.

Ritornando alle equazioni di Navier-Stokes (4.50a), si ricorda come siano possibili alcune tipiche semplificazioni. La prima è costituita dall'adozione dell'ipotesi di Boussinesq. Con essa compare nelle diverse equazioni il valore di background sinottico della densità dell'aria che si va a sostituire alla densità media locale. Come si nota, in queste equazioni non compare più la pressione media locale ma il *disturbo a mesoscala*, cosa che vale anche per la temperatura potenziale.

La semplificazione maggiore si ha quando si adotta l'approssimazione idrostatica. In questo caso, per prima cosa è consueto introdurre il cosiddetto *vento geostrofico* caratterizzato dalle sole componenti orizzontali definite sulla base dai gradienti orizzontali di pressione e di densità media nel modo seguente:

$$f_c \bar{u}_g = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \quad f_c \bar{v}_g = +\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad [4.22b]$$

A questo punto, il nuovo insieme di equazioni è il seguente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= -f(\bar{v}_g - \bar{v}) - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \overline{\rho u' u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho v' u'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho w' u'}}{\partial z} \right] \\
\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= +f(\bar{u}_g - \bar{u}) - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \overline{\rho u' v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho v' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho w' v'}}{\partial z} \right] \\
\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} &= -\bar{\rho} g
\end{aligned} \tag{4.22c}$$

Come si nota, è scomparsa l'equazione per la componente verticale media della velocità, sostituita dall'equazione idrostatica.

Esercizio 4.1

Si immagini che alla latitudine di 44°N la componente media v del vento (componente N-S) sia inferiore di 2 ms^{-1} alla corrispondente componente del vento geostrofico. Se si ignora la subsidenza (cioè il valore medio di w) e si ammette una completa omogeneità orizzontale, in una situazione di stato stazionario quale deve essere il gradiente verticale dello stress di Reynolds necessario a supportare un tale deficit di velocità?

Per prima cosa, alla latitudine indicata il valore del coefficiente di Coriolis risulta pari a:

$$f = 2 \cdot 7.292 \cdot 10^{-5} \sin(\Phi) = 1.02 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

Per le ipotesi poste, l'equazione per la componente media u del moto, quella che contiene la differenza tra il valore medio di v e la relativa componente geostrofica, risulta pari a:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -f(\bar{v}_g - \bar{v}) - \frac{\partial \overline{u' u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u' v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u' w'}}{\partial z}$$

$\underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}}_{=0} \quad \underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}_{=0} \quad \underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{=0} \quad \underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}_{=0} \quad \underbrace{\frac{\partial \overline{u' u'}}{\partial x}}_{=0} \quad \underbrace{\frac{\partial \overline{u' v'}}{\partial y}}_{=0} \quad \frac{\partial \overline{u' w'}}{\partial z}$

che si riduce a:

$$-\frac{\partial \overline{u' w'}}{\partial z} = f(\bar{v}_g - \bar{v})$$

Dato che il deficit geostrofico (la parte entro la parentesi tonda nel membro di destra) vale 2 ms^{-1} , si ha che il gradiente verticale dello stress di Reynold è costante e negativo e vale:

$$\frac{\partial \overline{u' w'}}{\partial z} = -1.02 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2.04 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

4.2.3.7 Lo stato di riferimento dell'atmosfera

A conclusione della discussione sulle equazioni del moto, è opportuno soffermarci sul fatto che si è venuta delineando una situazione per cui lo stato della bassa Troposfera è caratterizzato da uno stato di riferimento, sostanzialmente quasi-stazionario, cui si sovrappongono perturbazioni a mesoscala e perturbazioni turbolente. Anche se nel seguito ritorneremo su questi concetti, è opportuno riassumere le caratteristiche salienti dello stato di riferimento.

In primo luogo, nello stato di riferimento la pressione media può variare in orizzontale con un gradiente a mesoscala, mentre in verticale deve variare in accordo alla sola legge idrostatica. In secondo luogo, lo stato termodinamico dell'atmosfera è quello concettualmente più semplice e cioè è adiabatico. Ciò comporta quindi che la temperatura potenziale virtuale sia ovunque costante, anche in verticale. Ovviamente, tra la temperatura, la pressione e la densità dell'aria deve essere valida la legge dei gas. Infine, il moto dell'atmosfera non è influenzato né dalle forze viscosse, né dall'azione della turbolenza, ma dipende solo dai gradienti barici a mesoscala. Le componenti del moto saranno solo orizzontali e saranno quindi le componenti del vento geostro-

fico.

In sintesi, le equazioni che caratterizzano lo stato di riferimento dell'atmosfera sono:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial y} &= f_c \bar{u}_g \\
 +\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial x} &= f_c \bar{v}_g \\
 -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} &= g \\
 p_0 &= R_d \rho_0 T_0 \\
 \theta_0 &= T_0 \left(\frac{1000}{p_0} \right)^{R_d/C_p} = \text{cost}
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

E' chiaro che un tale modello è decisamente imperfetto, ma costituisce una semplificazione non esageratamente grossolana della parte di Troposfera lontana dal suolo e in situazione prossime all'adiabaticità.

4.2.4 L'EQUAZIONE DELLA TEMPERATURA POTENZIALE VIRTUALE

Si considerino ora le relazioni (2.29), che rappresentano, con notazioni differenti, il primo principio della termodinamica. Se si ignora la diffusività molecolare in quanto totalmente ininfluen- te a mesoscala, l'impiego dell'ipotesi di Reynolds porta immediatamente alla relazione seguen- te:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\theta}_v + \theta'_v) + (\bar{u}_j + u'_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\theta}_v + \theta'_v) = S_\theta
 \tag{4.23a}$$

dove S_θ rappresenta complessivamente il *termine di sorgente* la cui espressione analitica è deci- samente complessa.

Con tecniche del tutto analoghe a quelle impiegate per la quantità di moto, è facile arrivare alla relazione seguente che è la relazione prognostica per la temperatura potenziale virtuale media:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \cdot \overline{u'_j \theta'_v}) + \bar{S}_\theta
 \tag{4.23b}$$

dove, anche in questo caso, si può notare che:

- il primo termine rappresenta il guadagno di calore medio e quindi il tasso di variazione me- dia della temperatura potenziale virtuale;
- il secondo termine descrive l'avvezione del calore medio a causa del moto medio;
- il terzo termine rappresenta la divergenza del flusso turbolento di calore;
- il quarto termine rappresenta il termine di sorgente medio.

Anche la mediazione dell'equazione per la temperatura potenziale virtuale istantanea ripropone la situazione vista nella conservazione della quantità di moto, solo che in questo caso la (4.23b) sottolinea il fatto che vento e temperatura non sono affatto disaccoppiati, anzi sono strettamente legati non solo dalla presenza del termine avvevivo, ma anche dalle covarianze tra le compo- nenti del vento e la temperatura potenziale virtuale, cioè dai flussi turbolenti di calore sensibile, presenti nell'ultimo termine.

Nel caso in cui come equazione di continuità si adotti la forma anelastica o la forma incompri-

mibile, il termine avvevivo dell'equazione si può scrivere in *forma di flusso*. In effetti si ha che:

$$\frac{\partial \bar{u}_j \bar{\theta}_v}{\partial x_j} = \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial x_j} + \bar{\theta}_v \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial x_j} \quad [4.23c]$$

pertanto, in questo caso, la forma dell'equazione prognostica per la temperatura potenziale virtuale in forma di flusso è:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \bar{\theta}_v}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} \cdot \overline{u'_j \theta'_v} \right) + \bar{S}_\theta \quad [4.23d]$$

La motivazione di questa scrittura (quando risulta possibile adottarla) sta nella maggior facilità con cui può essere risolta numericamente.

Prima di concludere, è opportuno fare alcune precisazioni sul termine di sorgente. La sua espressione generale è la seguente:

$$\bar{S}_\theta = \frac{\bar{\theta}_v}{C_p \bar{T}_v} \cdot \frac{dQ}{dt} \quad [4.23e]$$

dove dQ/dt è il tasso di energia rilasciata (o assorbita) da uno seguenti processi:

- la trasformazione di fase da vapore a liquido e viceversa,
- la trasformazione di fase da vapore a solido e viceversa,
- la trasformazione di fase da liquido a solido e viceversa
- il riscaldamento dovuto alla radiazione solare
- il riscaldamento/raffreddamento da divergenza netta di radiazione infrarossa.

Del riscaldamento dovuto alla radiazione solare e della divergenza della radiazione infrarossa già si tratterà al Cap.6. Per quanto riguarda gli altri termini, si tratterà in occasione della discussione sulle formazioni nuvolose.

Esercizio 4.2

Supponiamo che la covarianza tra la componente verticale del vento e la temperatura potenziale virtuale (il flusso cinematico di calore verticale) decresca linearmente con la quota seconda la legge:

$$\overline{w' \theta'_v} = a - bz$$

dove $a = 0.3 \text{ K} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ e $b = 3 \cdot 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{s}^{-1}$. Assumendo un profilo verticale arbitrario di temperatura potenziale entro il *PBL*, quale sarà la forma di tale profilo l'ora successiva? Si trascuri nei calcoli la subsidenza, il calore latente e si assuma una completa omogeneità orizzontale.

Si consideri l'equazione prognostica per la temperatura potenziale virtuale e le ipotesi semplificative adottate; si ha che:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial t} + \underbrace{u \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{v \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial y}}_{=0} = -\underbrace{\frac{\partial \overline{u' \theta'_v}}{\partial x}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \overline{v' \theta'_v}}{\partial y}}_{=0} - \frac{\partial \overline{w' \theta'_v}}{\partial z}$$

quindi, tenendo conto della relazione analitica data per la variazione verticale del flusso turbolento di calore:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w' \theta'_v}}{\partial z} = b$$

Ciò sta a significare che il tasso di variazione della temperatura potenziale virtuale ad ogni quota è costante e che, quindi ad ogni quota la temperatura potenziale virtuale aumenterà proporzionalmente al tempo in misura uguale. Pertanto, qualunque sia la quota:

$$\theta(z, t+1h) - \theta(z, t) = b \cdot \Delta t = 3 \cdot 10^4 \text{ K} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 3600 \text{ s} = 1.08 \text{ K}$$

Questo scenario è frequente nel ML convettivo durante le ore diurne e soleggiate. Ciò che abbiamo ottenuto è che ogni qual volta il flusso turbolento di calore decresce linearmente con la quota, la forma del profilo verticale di temperatura potenziale virtuale verrà *preservato* ed i singoli valori alle varie quote si incrementeranno in eguale misura.

4.2.5 LE EQUAZIONI PER L'UMIDITÀ

Se si opera in modo analogo sulle (4.30), che rappresentano il bilancio di umidità specifica totale (in fase vapore, liquido e solido), trascurando ancora una volta la viscosità, si giunge a delle relazioni prognostiche per le rispettive umidità specifiche medie. In particolare, la relazione prognostica per il contenuto medio di vapor d'acqua è la seguente:

$$\frac{\partial \overline{q_v}}{\partial t} + \overline{u_j} \cdot \frac{\partial \overline{q_v}}{\partial x_j} = \frac{S_{qv}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho \cdot u_j' q_v'} \right) \quad [4.24a]$$

dove :

- il primo termine rappresenta la variazione temporale di vapor d'acqua media;
- il secondo termine descrive l'avvezione di vapor d'acqua causata dal vento medio;
- il terzo termine è il termine netto di sorgente per il vapor d'acqua;
- il quarto termine rappresenta la divergenza del flusso turbolento di vapor d'acqua.

Per la fase liquida e solida si giunge ad equazioni simili ed in particolare:

$$\frac{\partial \overline{q_L}}{\partial t} + \overline{u_j} \cdot \frac{\partial \overline{q_L}}{\partial x_j} = \frac{S_{qL}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho \cdot u_j' q_L'} \right) \quad [4.24b]$$

$$\frac{\partial \overline{q_S}}{\partial t} + \overline{u_j} \cdot \frac{\partial \overline{q_S}}{\partial x_j} = \frac{S_{qS}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho \cdot u_j' q_S'} \right) \quad [4.24c]$$

Tutti i termini di sorgente medi presenti nelle (4.24) sono di forma complessa e verranno descritte successivamente.

Le equazioni (4.24) affermano un concetto estremamente interessante: la presenza in atmosfera di vapor d'acqua (o di acqua liquida o solida) è influenzata, ed influenza a sua volta, le altre variabili meteorologiche con un effetto di controreazione non facilmente immaginabile e rappresentata nella (4.24) dalle covarianze tra l'umidità specifica e le componenti del vento, cioè dai flussi turbolenti di umidità.

Anche in questo caso le equazioni per l'umidità specifica possono essere scritte in forma di flusso, naturalmente quando l'equazione di continuità usata è in forma anelastica o incomprimibile. In questo caso l'equazione prognostica per il contenuto medio di vapor d'acqua diventa:

$$\frac{\partial \overline{q_v}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_j q_v}}{\partial x_j} = \frac{S_{qv}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho \cdot u_j' q_v'} \right) \quad [4.24d]$$

ed equazioni analoghe possono essere scritte per i contenuti di acqua liquida e solida.

Esercizio 4.3

Se un vento orizzontale diretto verso E di $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ trasporta aria più secca in una regione in cui il gradiente orizzontale di umidità lungo la direzione x è pari a $5 \text{ g}\cdot\text{kg}^{-1}$ per ogni 100 km, quale gradiente verticale di flusso turbolento di umidità nel *PBL* è richiesto per mantenere una situazione stazionaria di umidità specifica? Si assuma che in aria ci sia solo vapor d'acqua e nessun termine di sorgente.

L'equazione prognostica per il vapor d'acqua è:

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{q_v}}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{u \cdot \frac{\partial \overline{q_v}}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{v \cdot \frac{\partial \overline{q_v}}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{w \cdot \frac{\partial \overline{q_v}}{\partial z}}_{=0} = \underbrace{+S_{q_v}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial u' q_v'}{\partial x}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial v' q_v'}{\partial y}}_{=0} - \frac{\partial w' q_v'}{\partial z}$$

cioè:

$$\frac{\partial w' q_v'}{\partial z} = -u \cdot \frac{\partial \overline{q_v}}{\partial x} = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{-5} \text{ g}\cdot\text{kg}^{-1} \text{ m}^{-1} = -5 \cdot 10^{-4} \text{ g}\cdot\text{kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

4.2.6 L'EQUAZIONE PER LE SPECIE CHIMICHE

Per la conservazione di ogni specie chimica presente in aria vale la relativa legge di conservazione rappresentata, in termini istantanei, dalla (4.31a). L'introduzione dell'ipotesi di Reynolds e l'applicazione dell'operatore media conducono ad un'equazione prognostica per la concentrazione media che, sempre trascurando la viscosità, diventa:

$$\frac{\partial \overline{\chi}_m}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial \overline{\chi}_m}{\partial x_j} = S_c - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho \cdot u_j \chi'} \right) \quad [4.25]$$

in cui S_c rappresenta collettivamente i termini di sorgente (emissioni, processi chimici e chimico-fisici). L'ultimo termine, poi, rappresenta la divergenza della covarianza tra componenti del vento e concentrazione dello scalare, cioè il flusso turbolento di scalare. Questa relazione evidenzia due aspetti di primario interesse:

- l'evoluzione spazio-temporale della concentrazione media in aria di una specie chimica dipende dal trasporto (avvezione) della sostanza stessa, causata dal campo medio del vento;
- l'avvezione, però, non è l'unico meccanismo di dispersione dell'inquinante; in effetti l'ultimo termine dell'equazione, che rappresenta la divergenza del flusso turbolento di inquinante, indica chiaramente come la turbolenza del *PBL* giochi un ruolo decisivo nella dispersione degli inquinanti;
- apparentemente l'equazione (4.25) dipende direttamente delle grandezze meteorologiche (lo si vede sia nel termine avveztivo che nella divergenza del flusso turbolento), ma *apparentemente* non influenza le grandezze meteorologiche. Nella realtà tale influenza esiste, si pensi al fatto che l'aumento della concentrazione in aria di alcune specie chimiche (gassose o aerosol) cambia la trasparenza dell'atmosfera e quindi i flussi di radiazione solare e infrarossa, che fanno parte del termine di sorgente per l'equazione della temperatura potenziale virtuale, e che la presenza di particolato può influire sulle trasformazioni di fase subite dall'acqua atmosferica. Dato che, almeno in prima approssimazione, tutto ciò può essere ignorato, tale problema non verrà considerato, salvo dedicare l'intera parte finale del libro a trattare le problematiche connesse con la dispersione degli inquinanti in aria.

4.2.7 LA DIVERGENZA DEI FLUSSI TURBOLENTI

Nelle equazioni prognostiche delle variabili medie derivate precedentemente compaiono i *mo-*

menti del secondo ordine (varianze e covarianza tra le componenti cartesiane istantanee della velocità e tra componenti delle velocità e grandezze scalari come temperatura potenziale virtuale, umidità e concentrazione di specie chimiche), momenti che non sono noti a priori e che, in generale, non sono nemmeno trascurabili. Anche per essi è possibile ricavare (operazione algebrica semplice, ma estremamente laboriosa) delle equazioni prognostiche che si derivano dalle equazioni di conservazione per le variabili istantanee e dall'introduzione dell'ipotesi di Reynolds. Se queste nuove equazioni non contenessero ulteriori incognite, il sistema risulterebbe chiuso. Sfortunatamente queste equazioni introducono momenti del terzo ordine, innestando quindi un processo degenerativo secondo cui più elevato è il grado del momento per cui si è derivata l'equazione, maggiore è il numero di nuove incognite coinvolte, tutte costituite da momenti di ordine superiore al momento desiderato. Questo è il ben noto *problema della chiusura* delle equazioni fluidodinamiche che per primi misero in evidenza Keller e Friedmann nel 1924 e che porta alla conclusione che *il sistema di equazioni fluidodinamiche descrittive del PBL non può mai essere chiuso* congruentemente con la visione stocastica del PBL. Questo non significa tuttavia che tale apparato matematico non possa portare ad un modello operativo per la previsione dell'evoluzione spazio-temporale del PBL.

Nonostante ciò, si considerino ora con maggior dettaglio i flussi turbolenti la cui divergenza è presente nelle varie equazioni prognostiche per i valori medi. In particolare, si considerino inizialmente le equazioni del moto nella forma (4.22a): nell'ultimo termine di destra di ogni equazione relativa alle varie componenti u_i del moto è presente il termine scritto sinteticamente come:

$$\frac{\partial \overline{\rho \cdot u'_j u'_i}}{\partial x_j} \quad [4.26a]$$

che coinvolge gli stress di Reynolds (flussi di quantità di moto). Complessivamente, le tre equazioni del moto richiedono la conoscenza dell'intera matrice di varianza-covarianza che si può costruire con le componenti del vento, cioè di:

$$\begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{v'u'} & \overline{w'u'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'v'} & \overline{w'v'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} \quad [4.26b]$$

In teoria sono nove le componenti di tale matrice che si riducono, però, a sole sei indipendenti per la simmetria della stessa, cioè:

$$\overline{u'u'}; \quad \overline{v'v'}; \quad \overline{w'w'}; \quad \overline{u'v'} = \overline{v'u'}; \quad \overline{u'w'} = \overline{w'u'}; \quad \overline{v'w'} = \overline{w'v'};$$

Dato che non è possibile dedurre per tali flussi equazioni prognostiche dipendenti dalle sole variabili medie e da momenti del primo ordine, è necessaria una loro parametrizzazione. Questo è il ben noto problema della *chiusura* di cui si tratterà nel seguito. Comunque, una gran parte delle chiusure proposte, al di là dei dettagli specifici, ipotizza una proporzionalità diretta tra il flusso (varianza o covarianza) ed il gradiente delle componenti del moto, con coefficienti di proporzionalità detti *coefficienti di diffusione turbolenta* (*eddy diffusion coefficients*). In pratica si ha che:

$$\begin{aligned} \overline{u'u'} &= -K_{mxx} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} & \overline{v'u'} &= -K_{mxy} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} & \overline{w'u'} &= -K_{mxz} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \\ \overline{u'v'} &= -K_{mxy} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} & \overline{v'v'} &= -K_{myy} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} & \overline{w'v'} &= -K_{myz} \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \\ \overline{u'w'} &= -K_{mxz} \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} & \overline{v'w'} &= -K_{myz} \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} & \overline{w'w'} &= -K_{mzz} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} \end{aligned} \quad [4.26c]$$

quindi i coefficienti di diffusione turbolenta indipendenti per la quantità di moto sono in totale sei. Pertanto, i vari termini di diffusione turbolenta presenti nelle tre equazioni di moto (4.22a) diventano:

$$\begin{aligned} \dots - \frac{1}{\rho} & \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho} \cdot K_{mxx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho} \cdot K_{mxy} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho} \cdot K_{mxz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right] \\ \dots - \frac{1}{\rho} & \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho} \cdot K_{myx} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho} \cdot K_{myy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho} \cdot K_{myz} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \right] \\ \dots - \frac{1}{\rho} & \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho} \cdot K_{mzx} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho} \cdot K_{mzy} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho} \cdot K_{mzz} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad [4.26d]$$

Se ora si considera l'equazione prognostica per la temperatura potenziale virtuale, si vede come in essa compaiano tre flussi turbolenti, uno per ciascuna direzione cartesiana. Anche in questo caso, nella maggior parte delle chiusure proposte si ipotizza, almeno formalmente, una dipendenza diretta tra flusso e gradiente di temperatura nella direzione coordinata relativa dove, anche in questo caso, i coefficienti di proporzionalità, che dovranno essere opportunamente parametrizzati, vengono indicati col nome *coefficienti turbolenti per il calore* indicati, a seconda della direzione del flusso di calore, come K_{hxx} , K_{hyy} e K_{hzz} . Pertanto il termine di divergenza di flusso della (4.23b) risulterà pari a:

$$\dots - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho} K_{hxx} \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho} K_{hyy} \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho} K_{hzz} \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z} \right) \right] \quad [4.27]$$

Analogamente si potrà operare per l'equazione dell'umidità e per l'equazione delle specie chimiche, individuando opportuni coefficienti di diffusione turbolenta. Anche se, a priori, i coefficienti di diffusione turbolenta per il calore dovrebbero differire da quelli per l'umidità e le specie chimiche, in pratica si adottano per tutte le equazioni riferite alle grandezze scalari il medesimo insieme di coefficienti di diffusione turbolenta, anche perché finora non abbiamo conoscenze migliori.

Per concludere, è opportuno fare almeno due considerazioni:

- i vari coefficienti di diffusività turbolenta, sia per la quantità di moto che per le grandezze scalari, non sono delle costanti ma variano nello spazio e nel tempo;
- la loro forma funzionale dipenderà dal tipo di chiusura adottata. Ci può essere il caso in cui essi dipendono da parametri globali del PBL quali u_* , H_0 , z_i . Ci può anche essere il caso in cui tali parametri dipendano da momenti del secondo ordine o loro derivati come l'energia cinetica turbolenta. In questo caso il modello dovrà arricchirsi, solo per la stima dei coefficienti di diffusione turbolenta, di altre equazioni prognostiche o diagnostiche per questi momenti (di qui la necessità di conoscere tali equazioni, cosa che verrà fatta poco oltre) in cui, però compariranno momenti del terzo ordine che inevitabilmente dovranno essere drasticamente parametrizzati.

Per formulare la divergenza dei flussi turbolenti sono stati utilizzati i coefficienti di diffusione turbolenta nei termini mostrati sopra, in sostanza utilizzando una formulazione simile alla legge di Fick per la diffusione molecolare. Ciò che rende profondamente diversa la diffusione molecolare da quella turbolenta è che, mentre il coefficiente di diffusione molecolare è una ben precisa proprietà del fluido, al contrario le proprietà diffusive della turbolenza sono inscindibilmente legato allo stato di moto del fluido, non alle sue proprietà chimico-fisiche, e quindi variano, in generale, da punto a punto e da istante ad istante.

Va inoltre ricordato, come si vedrà nel seguito, che alcuni tipi di chiusura differiscono profondamente da tale modello, come per esempio la famiglia delle chiusure non locali. Di tutto ciò si parlerà approfonditamente nel seguito.

4.2.8 LE EQUAZIONI FLUIDODINAMICHE DELL'ATMOSFERA

A conclusione della presentazione delle equazioni prognostiche per le variabili medie del PBL vale la pena fare alcune considerazioni riepilogative. L'insieme delle relazioni individuate costituiscono il modello di base per la descrizione spazio-temporale dello stato medio dell'atmosfera. Tale modello è costituito dalle relazioni seguenti:

- la definizione di temperatura potenziale e di temperatura potenziale virtuale. Tali definizioni sono delle relazioni matematiche di tipo totalmente algebrico.
- le equazioni prognostiche del moto. Sono tre equazioni differenziali alle derivate parziali valide nel sistema di riferimento non inerziale solidale con la superficie terrestre. La loro forma completa, scritta sinteticamente in notazione tensoriale, senza esplicitare ulteriormente i flussi turbolenti, è la seguente:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + f \varepsilon_{ij3} \bar{u}_j - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho \cdot u'_i u'_j} \right) \quad [4.28a]$$

- l'equazione di continuità. Tale equazione esprime matematicamente la conservazione della massa e, scritta nella sua forma completa, risulta essere:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho \cdot u_j} \right) = 0 \quad [4.28b]$$

Ovviamente, a tale relazione di tipo prognostico, si affiancano con ben precisi limiti di applicabilità le due forme diagnostiche, quella anelastica e quella incomprimibile, di uso molto più frequente;

- l'equazione di stato dei gas. Tale equazione, del tutto algebrica, rappresenta il tessuto connettivo tra le diverse variabili termodinamiche ed è espressa nel modo consueto:

$$\bar{p} = R_d \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{T}_v \quad [4.28c]$$

- l'equazione prognostica per la temperatura potenziale virtuale. Tale relazione deriva dal primo principio della termodinamica ed è il veicolo attraverso cui le equazioni del moto *sentono* i fenomeni termodinamici di riscaldamento e cambiamento di fase. Essa è espressa, senza esplicitare i termini turbolenti, nella forma:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho \cdot u'_j \theta'_v} \right) + \bar{S}_\theta \quad [4.28d]$$

- le equazioni per l'umidità. Tali equazioni, che esprimono il bilancio di acqua presente nei vari stati di aggregazione, forniscono le informazioni necessarie al termine di sorgente dell'equazione della temperatura potenziale virtuale e mostrano come la presenza dell'acqua atmosferica possa contribuire al moto dell'aria. Tali equazioni, comprensive dei termini turbolenti, risultano espresse come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{q}_v}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}_v}{\partial x_j} &= \frac{S_{qv}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho \cdot u'_j q'_v} \right) \\ \frac{\partial \bar{q}_L}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}_L}{\partial x_j} &= \frac{S_{qL}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho \cdot u'_j q'_L} \right) \\ \frac{\partial \bar{q}_S}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}_S}{\partial x_j} &= \frac{S_{qS}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho \cdot u'_j q'_S} \right) \end{aligned} \quad [4.28e]$$

- le equazioni per le specie chimiche. Anche se spesso vengono ignorate nei modelli meteorologici, va sottolineato che sicuramente contribuiscono, attraverso il termine di sorgente dell'equazione della temperatura potenziale virtuale, a far sentire il loro peso nel determinare lo stato dell'atmosfera. Esse, o meglio la dispersione degli inquinanti in aria, sarà il tema prioritario della parte finale del libro. Tali equazioni, una per ogni specie considerata, scritte nella forma sintetica sono:

$$\frac{\partial \bar{\chi}_m}{\partial t} + \bar{u}_j \cdot \frac{\partial \bar{\chi}_m}{\partial x_j} = S_c - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} \cdot \bar{u}_j \chi' \right) \quad [4.28f]$$

Il dominio di indagine considerato è un tipico dominio a mesoscala di cui nulla è definito. Se però si pone l'attenzione su situazioni a forte omogeneità orizzontale, è possibile giungere ad un modello differenziale molto più semplice che ha costituito nel passato una sorta di *laboratorio modellistico* in cui studiare le caratteristiche del PBL, anche quelle relative ai momenti di ordine superiore. In questo caso tutte le $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial y$ risultano nulle (tranne nei termini di gradiente della pressione media che compaiono indirettamente nelle componenti del vento geostrofico) ed il modello è costituito da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= -f(v_g - \bar{v}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\rho} \cdot \bar{u}' w'}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= +f(u_g - \bar{u}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\rho} \cdot \bar{v}' w'}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial t} &= \bar{S}_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{w}' \theta'_v}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{q}_v}{\partial t} &= \frac{\bar{S}_v}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{w}' q'_v}{\partial z} \end{aligned} \quad [4.29]$$

oltre, naturalmente, all'equazione di stato dei gas. Va notato che, essendo nulli i gradienti orizzontali delle componenti medie del vento, l'equazione di continuità nella forma anelastica o nella forma incomprimibile asserisce semplicemente che l'accelerazione media verticale non potrà che essere nulla. Con questo modello sono state ottenute le prime ricostruzioni modellistiche del PBL convettivo ed i profili illustrati in Fig.4.2 ne sono un esempio significativo.

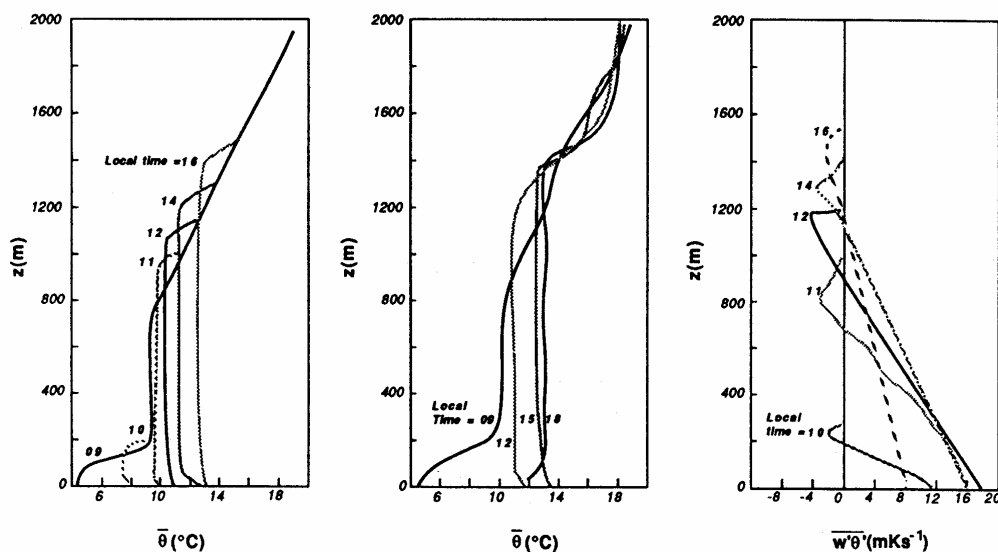


Fig.4.1: ricostruzione modellistica (a sinistra) e profili misurati (al centro) della temperatura potenziale in una situazione convettiva. A destra è presentato il profilo verticale del flusso di calore in forma cinematica (André e al, 1978)

Il modello matematico costituito da tutte queste equazioni (o dalle loro varianti descritte in precedenza) costituisce un sistema differenziale non lineare e non chiuso, vista la mancanza di indicazioni su come descrivere quantitativamente i termini turbolenti presenti nella maggior parte di esse. La loro *parametrizzazione*, cioè la modalità di espressione di questi termini in funzioni delle variabili medie o, comunque di variabili note, è compito della *Chiusura* di cui si tratterà successivamente. A questo argomento si premetterà la deduzione delle equazioni prognostiche relative ai momenti del secondo ordine, sia per l'importanza intrinseca dell'argomento sia perché alcune di esse saranno impiegate in alcuni tipi sofisticati di chiusure.

4.3 LE EQUAZIONI PER I MOMENTI DI SECONDO ORDINE

Lo studio dei momenti del secondo ordine ha occupato un vasto spazio nella ricerca micrometeorologica passata sia teorica che numerica e sperimentale. Anche se qualcosa si accennerà nel seguito a tale riguardo, si rimanda chi fosse interessato a:

- Willis e Deardorff (1974) per le ricerche in laboratorio relative principalmente alle situazioni convettive;
- Kaimal e al. (1976), Caughey e Palmer (1979) per le misure nelle situazioni convettive;
- André e al. (1978), Zhou e al. (1985) per le ricostruzioni numeriche in situazioni convettive;
- Caughey e al. (1979) per l'analisi delle misure sperimentali realizzate in situazioni stabili.

La procedura per ottenere le equazioni prognostiche per i momenti di ordine superiore al primo, ed in particolare per i momenti secondi, è concettualmente semplice anche se noiosissima. Per tutti i dettagli si rimanda a Businger (1982), Wyngaard(1982), Stull (1989), Sorbjan(1989) e Wyngaard(2010). In pratica, tale procedura consiste, per prima cosa, nel ricavare le equazioni per le fluttuazioni delle varie grandezze di interesse (le tre componenti del moto, la temperatura potenziale, ecc.) e, successivamente, con l'introduzione dell'operazione di media, generare le equazioni dei vari momenti. Va immediatamente detto che, a differenza delle equazioni per i momenti del primo ordine, la viscosità qui non può essere ignorata.

Il punto di partenza per l'ottenimento delle equazioni relative ai momenti del secondo ordine (varianze e covarianze) è l'individuazione delle equazioni prognostiche delle fluttuazioni delle grandezze meteorologiche. Per ottenerle, basta inserire la scomposizione di Reynolds nelle equazioni che formano il modello fluidodinamico dell'atmosfera (quele del Cap.2) e sottrarre ad esse membro a membro le equazioni relative alle rispettive variabili medie. E' un noioso gioco di pazienza che conduce alle equazioni seguenti, rispettivamente per le tre componenti del moto, la temperatura potenziale virtuale e l'umidità:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i'}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} &= \delta_{i3} \left(\frac{\theta_v'}{\theta_v} \right) g + f \varepsilon_{ij3} u_j' - \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} + \overline{\frac{\partial u_i' u_j'}{\partial x_j}} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} &= \nu_\theta \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j^2} + \overline{\frac{\partial u_j' \theta'}{\partial x_j}} + S_\theta \\ \frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial q'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial q'}{\partial x_j} &= \nu_q \frac{\partial^2 q'}{\partial x_j^2} + \overline{\frac{\partial u_j' q'}{\partial x_j}} \end{aligned} \quad [4.30a]$$

Le equazioni prognostiche per ogni variabile scalare si ottengono nello stesso modo ed sono formalmente identiche a quelle per l'umidità. Una volta ottenute le equazioni prognostiche per le

fluttuazioni delle variabili meteorologiche, per giungere alle equazioni prognostiche dei momenti del secondo ordine basta applicare l'identità seguente:

$$\overline{\frac{\partial a' b'}{\partial t}} = a' \overline{\frac{\partial b'}{\partial t}} + b' \overline{\frac{\partial a'}{\partial t}} \quad [4.30b]$$

4.3.1 LE EQUAZIONI PER LE VARIANZE

4.3.1.1 La varianza delle componenti cartesiane della velocità

Anche se l'equazione per la varianza delle componenti cartesiane del moto, in realtà, la si ottiene dalla più generale equazione prognostica degli Stress di Reynolds, vale la pena comunque considerarla con un certo dettaglio per scopi didattici. Se:

- prendiamo la prima delle (4.30a) relativa alla generica componente u_i
- la moltiplichiamo per $2u_i$
- ricordiamo che:

$$2u_i \overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial (u_i^2)}{\partial t}}$$

- mediamo l'intera equazione applicando le regole della media

otteniamo, alla fine, l'equazione seguente:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial u_i'^2}{\partial t}} + u_j \overline{\frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j}} + 2\overline{u_i' u_j'} \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u_i' u_i'^2}{\partial x_j}} = \\ 2\delta_{i3} u_i' \overline{\frac{\theta_v'}{\theta_v}} g + 2f\varepsilon_{ij3} \overline{u_i' u_j'} - 2\overline{\left(\frac{u_i'}{\rho}\right)} \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_i}} + 2\nu u_i' \overline{\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} \end{aligned} \quad [4.31]$$

che è la forma generale dell'equazione prognostica per la varianza delle tre componenti del moto. A questa relazione generale possono essere applicate varie semplificazioni. In particolare:

- si può notare come il termine di Coriolis sia sostanzialmente nullo. Ciò sta a significare che la forza di Coriolis non può generare energia cinetica turbolenta;
- l'ultimo termine dell'equazione, che rappresenta gli effetti dissipativi dovuti alla viscosità, può essere notevolmente semplificato. In particolare, con semplici passaggi algebrici, si giunge alla relazione:

$$2\nu u_i' \overline{\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} = \nu \overline{\frac{\partial^2 u_i'^2}{\partial x_j^2}} - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2} \quad [4.32a]$$

Il primo termine di destra di questa relazione, che fisicamente rappresenta la diffusione molecolare della varianza, contiene la curvatura della stessa che, nel *PBL*, risulta molto piccola (dell'ordine di 10^{-6} s^{-2} nel *ML* e dell'ordine di 10^{-2} s^{-2} nel *SL* (Stull, 1989). Quando la curvatura della varianza viene moltiplicata per ν , l'intero termine risulta dell'ordine di $10^{-11} \div 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$ e quindi del tutto trascurabile.

L'altro termine di destra della (4.32a) risulta decisamente maggiore (dell'ordine di $10^4 \div 10^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$) e quindi deve essere considerato. Definiamo ora come *tasso di dissipazione viscosa* ε la quantità:

$$\varepsilon = \nu \cdot \overline{\left(\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} \right)^2} \quad [4.32b]$$

Questa grandezza, scritta in notazione sintetica, è costituito dalla somma di 9 termini, tante quante sono le combinazioni degli indici i e j . Tale grandezza è sempre positiva, come ci si convince immediatamente. Inoltre, si vede immediatamente come l'ultimo termine della [4.32a] sia il contributo al tasso di dissipazione dovuta alla componente i -esima del moto. Dato che ε è una grandezza sempre positiva, il termine dissipativo sarà sempre negativo e ciò causerà sempre una diminuzione di varianza col tempo. Dato che la varianza di una componente del moto è il contributo di quella componente all'intera energia cinetica turbolenta, le forze viscosse dissiperanno costantemente l'energia cinetica. Per quanto detto, il termine di dissipazione viscosa può essere approssimato come:

$$2\nu \cdot u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} = -2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2} \quad [4.32c]$$

- il penultimo termine, che rappresenta gli effetti dovuti alle fluttuazioni di pressione, può essere così riscritto:

$$-2 \overline{\left(\frac{u_i'}{\rho} \right) \frac{\partial p'}{\partial x_i}} = - \overline{\left(\frac{2}{\rho} \right) \frac{\partial u_i' p'}{\partial x_i}} + 2 \overline{\left(\frac{p'}{\rho} \right) \cdot \left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \right]} \quad [4.32d]$$

L'ultimo termine a destra è il termine di *ridistribuzione della pressione*. In ogni equazione relativa alla varianza di una delle componenti tale termine è presente, ma se sommiamo le tre varianze (per ottenere il doppio dell'energia cinetica turbolenta) si sommano anche questi tre termini e tale somma è nulla quando il fluido è incomprimibile, cosa che in prima approssimazione possiamo sempre considerare vera. Quindi il termine di ridistribuzione della pressione non cambia l'energia cinetica totale, ma semplicemente ridistribuisce energia da una componente del moto all'altra, spostando energia dalla componente che ne ha di più a quella che ne ha di meno. Così, tale termine opera rendendo la turbolenza più isotropa e per questo è noto come *return-to-isotropy term*. Dato che termini del tipo $\partial u'/\partial x$ sono tanto maggiori quanto più piccole sono le dimensioni dei vortici, c'è da aspettarsi (come sarà più chiaro nel prossimo capitolo) che i vortici più piccoli siano pressoché isotropi.

Con queste semplificazioni e riorganizzando i vari termini, l'equazione prognostica per la varianza per la componente u_i del moto risulta data da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial t} + u_j' \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial x_j} = 2\delta_{i3} \frac{\overline{g \cdot u_i' \theta_v'}}{\theta_v} - 2\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \\ - \frac{\partial \overline{u_j' u_i'^2}}{\partial x_j} - \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial \overline{u_i' p'}}{\partial x_i} + 2 \overline{\left(\frac{p'}{\rho} \right) \cdot \left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \right]} - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2} \end{aligned} \quad [4.33]$$

in cui:

- il primo termine rappresenta il tasso di variazione locale della varianza;
- il secondo termine descrive l'avvezione della varianza realizzata dal vento medio;
- il terzo termine è il termine di *galleggiamento (buoyancy)* che è di produzione o consumo a seconda che il flusso turbolento di calore sia positivo (situazione diurna convettiva) o negativo (situazione notturna e stabile);
- il quarto termine è un termine di produzione, dato che il flusso turbolento di quantità di

moto è normalmente negativo nel *PBL*;

- il quinto termine descrive il trasporto turbolento della varianza. Attenzione! È un momento del terzo ordine!
- Il sesto termine descrive come la varianza viene ridistribuita a causa delle perturbazioni di pressione. Questo termine è spesso associato ai fenomeni oscillatori (onde di gravità) che si possono instaurare in atmosfera;
- Il settimo termine descrive la dissipazione viscosa di varianza.

Le relazioni che descrivono il tasso di variazione della varianza delle tre componenti del moto sono identiche tra loro tranne nel fatto che il termine *di buoyancy* è assente nelle componenti orizzontali.

Al di là del contributo dei singoli termini, è interessante avere almeno delle indicazioni qualitative sul comportamento della varianza delle tre componenti del moto.

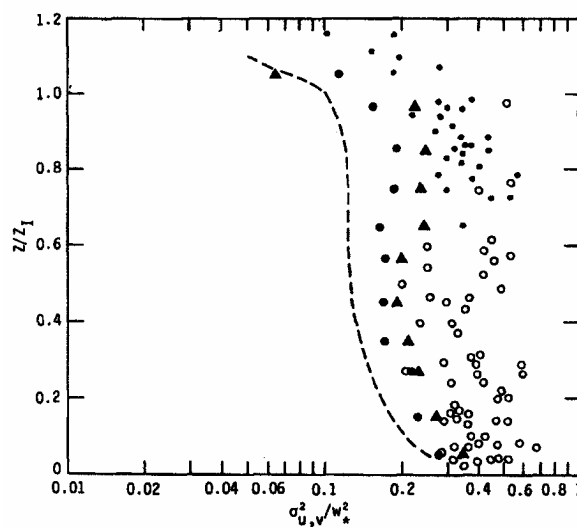


Fig.4.3: profilo verticale della varianza della componente orizzontale in un *PBL* convettivo. Confronto tra ricostruzioni numeriche e valori misurati (Sun e Ogura, 1980).

Le due componenti orizzontali si comportano in maniera molto simile (in prima approssimazione, identica). Di giorno presentano valori spesso notevolmente elevati entro il *SL*, che decrescono con la quota fino a rimanere circa costanti entro l'intero *ML* diminuendo ulteriormente nella zona di *entrainment*. In Fig.4.3 è mostrata la situazione descritta. In tale figura sono evidenziate sia le misure sperimentali ottenute da Willis e Deardorff (1974) in laboratorio (triangoli pieni) che alcune delle misure ottenute nella campagna sperimentale del Minnesota (Kaimal e al., 1976) e nella campagna di Ashchurch, Worcestershire (Caughey e al., 1979). Oltre a ciò, la curva tratteggiata rappresenta i risultati ottenuti da Deardorff (1974). In questa rappresentazione la quota è scalata dal valore dell'estensione massima del *ML*, qui indicata come Z_i .

Durante le ore notturne l'andamento con la quota della varianza delle componenti orizzontali è rapidamente decrescente fino ad annullarsi a quote abbastanza basse (attorno ai 200 m). In condizioni circa adiabatiche, l'andamento con la quota è ancora di diminuzione costante a partire da valori elevati al suolo, anche se raggiunge valori circa nulli a quote molto più elevate (circa 2000 m).

La varianza della componente verticale di moto presenta un comportamento in un certo senso complementare. In effetti, durante le ore diurne e convettive, è piccola entro il *SL* e cresce rapidamente nel *ML* fino a raggiungere un valore massimo approssimativamente ad un terzo dell'estensione massima del *PBL*. Quindi inizia una graduale diminuzione che la porta a valori molto bassi (quasi nulli) alla sommità del *PBL*. Tutto ciò è evidenziato in Fig.4.4 in cui sono ri-

portati, oltre ai già citati dati sperimentali ottenuti nella campagna del Minnesota e di Ashchurch, anche il risultato di alcune simulazioni numeriche.

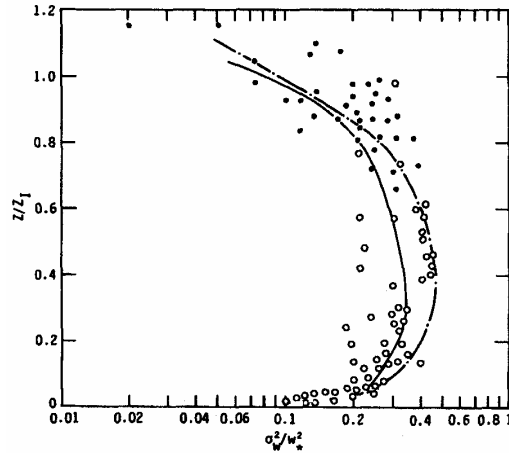


Fig.4.4: profilo verticale della varianza della componente verticale in un PBL convettivo. Confronto tra ricostruzioni numeriche e valori misurati (Sun e Ogura, 1980).

Il comportamento nelle situazioni stabili è analogo a quello presentato dalle componenti orizzontali dato che in tali situazioni esiste una notevole isotropia.

4.3.1.2 La varianza della temperatura potenziale virtuale

Con una tecnica sostanzialmente analoga si ottiene anche l'equazione prognostica per la varianza della temperatura potenziale. Senza entrare nei dettagli della sua derivazione (Stull, 1989; Sorbjan, 1989), l'equazione prognostica per la varianza della temperatura è la seguente:

$$\frac{\overline{\partial \theta_v'^2}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{\theta_v'^2}}{\partial x_j} = -2\overline{\theta_v' u_j'} \frac{\partial \overline{\theta_v'}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j' \theta_v'^2}}{\partial x_j} - 2\nu_\theta \left(\frac{\partial \overline{\theta_v'}}{\partial x_j} \right)^2 \quad [4.34a]$$

Nella derivazione di questa equazione si è ignorato il termine che dipende dalla variazione spaziale della radiazione netta (Stull 1989). Ogni termine della relazione precedente rappresenta un processo specifico che interviene nel determinare la varianza della temperatura. In particolare:

- *primo termine*: è il termine prognostico, cioè il tasso di temporale locale della varianza della temperatura potenziale virtuale;
- *secondo termine*: è il termine *avvevativo*;
- *terzo termine*: è il termine di *produzione*, associato ai moti turbolenti, dovuti ai gradienti di temperatura;
- *quarto termine*: rappresenta il trasporto turbolento di varianza di temperatura. Si noti che questo è un momento terzo;
- *quinto termine*: è il termine di *dissipazione molecolare*. E' usuale definire tale termine con il simbolo N_θ cioè:

$$N_\theta = 2\nu_\theta \left(\frac{\partial \overline{\theta_v'}}{\partial x_j} \right)^2 \quad [4.34b]$$

che viene chiamato *tasso di distruzione della varianza di temperatura*.

Se si considera una situazione di omogeneità orizzontale, l'equazione prognostica per la varianza della temperatura potenziale virtuale si semplifica notevolmente riducendosi a:

$$\frac{\overline{\partial \theta_v'^2}}{\partial t} = -2\overline{w'\theta_v'} \frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial z} - \frac{\overline{\partial w'\theta_v'^2}}{\partial z} - N_\theta \quad [4.34c]$$

Il comportamento qualitativo della varianza della temperatura potenziale nelle situazioni convettive vede due massimi, uno localizzato al suolo e causato dai vortici convettivi e l'altro localizzato alla sommità del *PBL* causato dall'*entrainment*. Ciò si vede chiaramente in Fig.4.5 in cui è mostrata la varianza della temperatura potenziale scalata rispetto a T_*^2 (in figura indicato col simbolo θ_*^2) ottenuta da simulazioni numeriche differenti, tutte relative a situazioni convettive e alle misure ottenute nella già citata campagna del Minnesota.

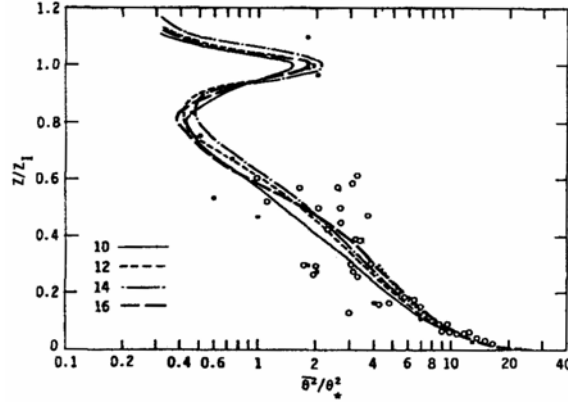


Fig.4.5: profilo verticale della varianza della temperatura potenziale virtuale in un *PBL* convettivo. Confronto tra ricostruzioni numeriche e valori misurati (Sun e Ogura, 1980).

Nelle situazioni stabili, invece, si assiste ad una progressiva e rapida diminuzione della varianza con la quota.

L'equazione che descrive la variazione temporale della varianza della temperatura potenziale virtuale ha la stessa forma dell'analogia equazione per la varianza dell'umidità o della concentrazione di un inquinante. L'unica differenza sta nel termine che esprime il tasso di distruzione della varianza che, nel caso dell'umidità q , diventa:

$$N_q = 2\nu_q \overline{\left(\frac{\partial q'}{\partial x_j}\right)^2} \quad [4.34d]$$

4.3.2 GLI STRESS DI REYNOLDS ED I FLUSSI TURBOLENTI

Le equazioni diagnostiche per gli stress di Reynolds e per i flussi di calore turbolenti sono estremamente complesse e per esse si rimanda a Stull (1989). Dopo alcune semplificazioni dettate da considerazioni di scala, si giunge alla relazione prognostica seguente (Stull, 1989), valida per ognuno degli *stress di Reynolds* (e quindi anche per le varianze delle velocità, già trattate in precedenza):

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\partial u_i' u_k'}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\overline{\partial u_i' u_k'}}{\partial x_j} = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} - \overline{u_k' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial u_i' u_j' u_k'}}{\partial x_j} + \\ + \left(\frac{g}{\theta_v}\right) \cdot \left[\delta_{k3} \overline{u_i' \theta_v'} + \delta_{i3} \overline{u_k' \theta_v'}\right] + \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k'}{\partial x_i}\right) - 2\nu \frac{\overline{\partial u_i' \partial u_k'}}{\partial x_j^2} \end{aligned} \quad [4.35a]$$

I vari termini dell'equazione assumono il significato seguente:

- primo termine: tasso di variazione della covarianza (flusso di quantità di moto),
- secondo termine: avvezione del flusso di quantità di moto prodotta dal vento medio,
- terzo e quarto termine: produzione di flusso di quantità di moto dovuta allo *shear* del vento
- quinto termine: trasporto del flusso di quantità di moto dovuto alla turbolenza. Attenzione che è un momento del terzo ordine.
- sesto termine: produzione o distruzione del flusso di quantità di moto drivante dalla *bouyancy*
- settimo termine: redistribuzione del flusso di quantità di moto operata dalle fluttuazioni di pressione (return-to-isotropy)
- ottavo termine: dissipazione viscosa.

Anche in questo caso si nota come siano presenti momenti del terzo ordine nei termini di trasporto turbolento.

Se però si considera un *PBL* caratterizzato da omogeneità orizzontale e si considerano *solo* i flussi verticali, è possibile ottenere dalle relazioni generali delle equazioni prognostiche semplificate. Nel caso degli stress di Reynolds l'equazione semplificata per i flussi verticali di quantità di moto è la seguente, in cui è stato anche indicato sinteticamente il significato dei vari termini presenti:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\partial u_i' w'}}{\partial t} = & \underbrace{-\overline{w'^2} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial z}}_{\text{produzione meccanica}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u_i' w'^2}}{\partial z}}_{\text{trasporto turbolento}} - \frac{1}{\rho} \cdot \underbrace{\left(\overline{u_i' \frac{\partial p'}{\partial z}} + \overline{w' \frac{\partial p'}{\partial z}} \right)}_{\text{azione-della pressione}} + \underbrace{\frac{g}{\theta} \cdot \overline{u_i' \theta'}}_{\text{galleggiamento}} \\ & + \underbrace{f \varepsilon_{ij3} \overline{u_j' w'}}_{\text{Coriolis}} + \nu \underbrace{\left(\overline{w' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} + \overline{u' \frac{\partial^2 w'}{\partial x_j^2}} \right)}_{\text{viscosità}} \end{aligned} \quad [4.35b]$$

In queste relazioni sintetiche $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$. Come si può notare, il terzo termine dell'equazione è un momento del terzo ordine.

Se si considerano le situazioni convettive, soprattutto quando lo *shear* del vento non è totalmente trascurabile, si nota come nella parte bassa del *ML* il termine di produzione meccanica bilancia approssimativamente il termine di pressione. In questo caso, supponendo che l'asse x sia orientato secondo la direzione locale media del vento, il bilancio approssimato si può esprimere come:

$$\overline{w'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \left(\overline{w' \frac{\partial p'}{\partial x}} + \overline{u' \frac{\partial p'}{\partial z}} \right) \quad [4.36a]$$

Supponendo vera la semplice parametrizzazione secondo cui tra il termine di pressione e la covarianza tra u e w esiste una semplice relazione lineare del tipo:

$$\overline{u' w'} = \frac{\tau_1}{\rho} \cdot \left(\overline{w' \frac{\partial p'}{\partial x}} + \overline{u' \frac{\partial p'}{\partial z}} \right) \quad [4.36b]$$

dove τ_1 è un opportuno tempo di scala, si ha la relazione semplificata seguente:

$$\overline{u' w'} = -\tau_1 \cdot \overline{w'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad [4.36c]$$

Questa relazione è molto interessante perché tra le varie componenti del flusso verticale di quantità di moto ed il gradiente verticale delle componenti del vento sussiste una relazione simile alla legge di Fick. Tali osservazioni vanno però prese con prudenza visto che l'approssimazione (4.36a) e le deduzioni conseguenti valgono solo in presenza di *shear* e quindi non in regime di *free convection*.

Per quanto riguarda, invece, il flusso turbolento verticale di calore, è ovviamente possibile scrivere la relazione prognostica generale che, dopo alcune semplificazioni giustificate da motivi di scala (Stull, 1989), risulta pari a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\theta' u_i'}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{\theta' u_i'}}{\partial x_j} = & -\overline{\theta' u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{\theta' u_j u_i'}}{\partial x_j} + \\ & + \delta_{i3} \left(\frac{\overline{\theta' \theta'_v}}{\overline{\theta'_v}} \right) g + \left(\frac{1}{\rho} \right) \left[\overline{p' \frac{\partial \theta'}{\partial x_i}} \right] - 2\nu \left(\frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \overline{\theta'}}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad [4.37a]$$

Considerando il solo flusso verticale di calore in una situazione di completa omogeneità orizzontale in cui si è trascurato anche il termine molecolare, la relazione precedente si semplifica nel modo seguente:

$$\frac{\partial \overline{w' \theta'_v}}{\partial t} = \underbrace{-\overline{w'^2} \frac{\partial \overline{\theta'_v}}{\partial z}}_{\text{produzione meccanica}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{w'^2 \theta'_v}}{\partial z}}_{\text{trasporto turbolento}} + \underbrace{\frac{g}{\overline{\theta'_v}} \overline{\theta'^2}}_{\text{galleggiamento}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{\theta'_v} \frac{\partial \overline{p'}}{\partial z}}_{\text{effetto della pressione}} \quad [4.37b]$$

Come si può notare, il terzo termine è anche questa volta un momento del terzo ordine.

In Fig.4.6 sono stati raccolti alcuni dati sperimentali di flusso di calore (Zhou e al., 1985) ottenuti alla torre meteorologica di Bulder in Colorado nel 1983 durante una situazione convettiva e da cui è stato possibile individuare i vari termini di *budget* presenti nella relazione prognostica.

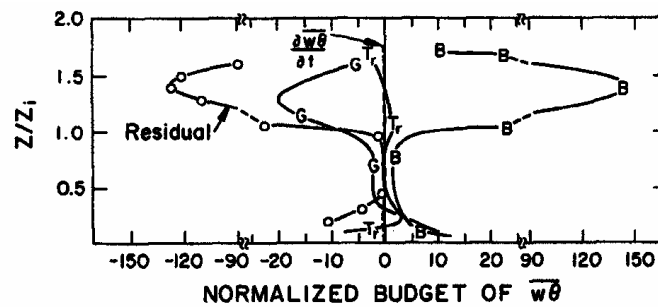


Fig.4.6: budget del flusso di calore verticale in situazioni convettive (Zhou e al., 1985). Con B si è indicato il termine di galleggiamento (*buoyancy*), con Tr il trasporto turbolento, con G la produzione meccanica, con Residual l'ultimo termine e con Zi l'estensione massima del ML.

Analizzando queste osservazioni sperimentali si nota come il flusso verticale di calore turbolento sia prodotto al suolo dai meccanismi di generazione di *buoyancy* e di *shear* (*thermals* positivi). Il risultato di ciò è un piccolo, ma regolare, trasferimento verso l'alto del flusso di calore. All'inversione, invece, c'è una grande produzione di flusso di calore per *buoyancy*, bilanciata principalmente da una produzione meccanica negativa causata dalla penetrazione delle particelle d'aria nello strato sovrastante più freddo. Questo termine negativo forza valori negativi di flusso di calore alla sommità del PBL. Queste *condizioni convettive* (che sono le più diffuse) sono dette *penetrative*. Tuttavia nelle prime ore del giorno, quando la convezione è debole, si possono

instaurare delle condizioni non penetrative in cui i *thermals* decelerano muovendosi verso l'alto e col tempo raggiungono la sommità del *PBL* con un valore di *buoyancy* leggermente negativo. In questo modo i *thermals* ascendenti sono convertiti in flussi discendenti. Gli *updraft* possiedono una velocità maggiore ma occupano un'area inferiore rispetto ai moti discendenti che sono più lenti ma distribuiti maggiormente in orizzontale. In generale, fluttuazioni positive di temperatura e velocità verticale nei *thermals* ascendenti e fluttuazioni negative, sia di temperatura che di velocità verticale nei flussi discendenti, fa sì che il flusso di calore vari linearmente con la quota da un valore positivo al suolo ad un valore negativo alla sommità del *PBL*.

Nella parte centrale di un *PBL* convettivo, in condizioni stazionarie e con omogeneità orizzontale, la (4.37b) si riduce a:

$$\overline{w'^2} \frac{\partial \overline{\theta}_v}{\partial z} = \frac{g}{\theta} \overline{\theta_v'^2} - \frac{1}{\rho} \overline{\theta_v' \frac{\partial p'}{\partial z}} \quad [4.37c]$$

Dato che il termine di pressione usualmente viene parametrizzato come:

$$\frac{1}{\rho} \overline{\theta_v' \frac{\partial p'}{\partial z}} = \frac{\overline{w' \theta_v'}}{\tau_2} \quad [4.37d]$$

dove τ_2 è un opportuno tempo turbolento di scala, la relazione precedente porta a:

$$\overline{w' \theta_v'} = -\tau_2 \cdot \left(\overline{w'^2} \frac{\partial \overline{\theta}_v}{\partial z} - \frac{g}{\theta} \overline{\theta_v'^2} \right) \quad [4.37e]$$

Tale relazione evidenzia come il flusso verticale di calore turbolento non sia semplicemente proporzionale al gradiente di temperatura potenziale virtuale media, vista la struttura binomia del membro di destra della relazione. In particolare, oltre al termine di gradiente, si individua anche il termine di *controgradiente* di segno opposto ed attivo anche quando il gradiente di temperatura potenziale è nullo o piccolissimo, cosa che regolarmente ha luogo nel *ML* durante le situazioni convettive. Questa è una delle evidenze del fatto che esprimere i flussi di calore mediante coefficienti turbolenti non sempre risulta corretto, specie nelle situazioni convettive.

4.3.3 L'ENERGIA CINETICA TURBOLENTA

Si definisce *energia cinetica turbolenta media* E (o meglio energia cinetica turbolenta per unità di massa) la metà della somma delle varianze delle componenti del vento cioè:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \left[\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \overline{u'^2} \quad [4.38]$$

L'energia cinetica turbolenta è una delle variabili più importanti in Micrometeorologia, essendo di fatto la *misura* dell'intensità della turbolenza ed anche il punto di partenza per le principali parametrizzazioni dei coefficienti di diffusività turbolenta, necessari per la chiusura del modello fluidodinamico dell'atmosfera. Per questa ragione, si dedicherà notevole attenzione alla equazione prognostica relativa ed al significato dei vari termini che la compongono.

4.3.3.1 L'equazione prognostica

L'equazione prognostica per l'energia cinetica turbolenta si ottiene dalla semisomma delle equazioni prognostiche per le varianze delle tre componenti del moto. Il risultato finale, dopo laboriosi e noiosi calcoli algebrici e l'eliminazione di alcuni termini di minor rilevanza dipendenti dalla viscosità (Stull, 1989), si presenta nella forma seguente in cui sono stati evidenziati i vari termini per renderne più semplice la discussione che faremo:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{\partial E}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{u_j \frac{\partial E}{\partial x_j}}_{(2)} = \delta_{i3} \underbrace{\frac{g}{\theta_v} \cdot \overline{u_i' \theta_v'}}_{(3)} - \underbrace{\overline{u_i' u_j'}}_{(4)} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \\
- \underbrace{\frac{\partial \overline{u_j E}}{\partial x_j}}_{(5)} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{u_i p'}}{\partial x_i}}_{(6)} - \underbrace{\nu \left(\frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} \right)^2}_{(6)}
\end{aligned} \tag{4.39a}$$

Prima di fare altri commenti, si nota immediatamente come non ci sia traccia del termine di Coriolis e ciò è la diretta conseguenza del fatto che questa forza apparente non produce lavoro. Per quanto riguarda i vari termini che compongono l'equazione, va detto che:

- il primo termine rappresenta il tasso di variazione dell'energia cinetica turbolenta,
- il secondo termine tiene conto della sua avvezione;
- il terzo termine rappresenta la produzione di energia cinetica turbolenta, o la sua distruzione, dovuta alla convettività, cioè all'immissione turbolenta di calore;
- il quarto termine rappresenta la produzione di energia cinetica turbolenta dovuta alla turbolenza meccanica legata allo *shear* del vento;
- il quinto termine rappresenta il trasporto turbolento di energia cinetica. Attenzione: anche se non sembra, è un momento del terzo ordine;
- il sesto termine descrive come si ridistribuisce l'energia cinetica turbolenta a causa delle perturbazioni di pressione. Questo termine è spesso associato alle oscillazioni ondose dell'aria (onde di gravità):
- il settimo termine rappresenta il tasso di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta, cioè la conversione di energia turbolenta in calore. Tale termine normalmente viene indicato complessivamente come ε .

La presenza del tasso di dissipazione di energia cinetica turbolenta ε nell'equazione prognostica indica che il processo di dissipazione è costantemente attivo e quindi che la turbolenza è dissipativa. Ciò sta a significare che la tendenza naturale della turbolenza è quella di decadere nel tempo a meno che venga generata localmente o trasportata dal moto medio delle masse d'aria. E quindi non si conserva. Questo termine dissipativo, come detto, è pari a:

$$\varepsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^2} \tag{4.39b}$$

e quindi è la somma di 9 termini, in generale, distinti. Se la turbolenza è isotropa i termini del tipo:

$$s_{ii} = \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right)^2} \tag{4.39c}$$

sono uguali per tutti gli $i = 1, 2, 3$ ed anche i termini:

$$s_{kj} = \overline{\left(\frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right)^2} \tag{4.39d}$$

sono uguali per tutte le combinazioni di $k \neq j$. Inoltre, in condizioni di turbolenza isotropa, si ha che:

$$2s_{11} = 2s_{22} = 2s_{33} = s_{12} = s_{13} = s_{23} = s_{21} = s_{31} = s_{32} \text{ i.}$$

Pertanto, nel caso di turbolenza isotropa, l'espressione di ε si semplifica nel modo seguente:

$$\varepsilon = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}\right)^2} \quad [4.39e]$$

Prima di discutere del significato dei vari termini della (4.39a), è importante presentare una sua forma semplificata. Se orientiamol'asse x delle coordinate nella direzione del vento medio, se ipotizziamo che ci sia una omogeneità orizzontale e se la componente verticale media del vento (subsidenza) è trascurabile, la relazione (4,39a) si riduce alla forma seguente:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{g}{\theta_v} \overline{w' \theta_v'} - \left[\overline{u' w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{v' w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right] - \frac{\partial \bar{w}' E}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{w}' p'}{\partial z} - \varepsilon \quad [4.40]$$

4.3.3.2 I termini dell'equazione prognostica

Rimandando a Stull(1989) per una discussione più approfondita sull'argomento, qui di seguito vengono presentati alcuni commenti riferiti ai vari termini presenti nella (4.40).

Termine 1: il tasso di variazione dell'energia cinetica turbolenta

La variazione nello spazio e nel tempo di E è molto elevata, come si può notare in Fig.4.7 dove è rappresentata la ricostruzione numerica della distribuzione di E nel tempo e con la quota per due tipici giorni convettivi.

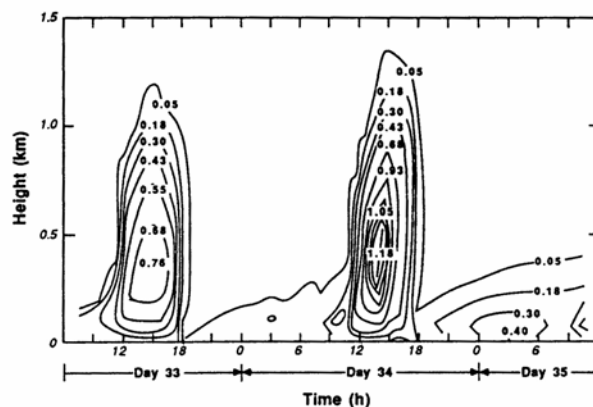


Fig.4.7:ricostruzione numerica della distribuzione di energia cinetica turbolenta nel tempo e nello spazio (Mellor e Yamada, 1975)

Da questa tipica ricostruzione si nota che:

- l'energia cinetica turbolenta è notevolmente più elevata nelle ore in cui la turbolenza convettiva è attiva e cresce rapidamente al crescere della turbolenza convettiva immessa nel PBL (*spin up*);
- si estende fino a quote dell'ordine dei 1000 m e, di fatto, *marca* l'intero PBL;
- presenta un massimo nel terzo inferiore del PBL;
- crolla rapidamente (*spin down*) e definitivamente al termine delle ore convettive quando cessano di essere attive le sorgenti di turbolenza convettiva;
- mantiene valori bassi nelle ore stabili (notturne) coprendo uno spessore di atmosfera decisamente limitato rispetto all'estensione verticale diurna del PBL.

Termine 2: l'avvezione

Ben poco è noto sul trasporto di energia cinetica turbolenta per opera del moto medio delle masse d'aria. Ciò che si è riscontrato numericamente è che tale trasporto ha ben poco peso

nell'equazione prognostica di E e questa è la ragione per cui tale termine spesso è ignorato nella pratica.

Termine 3: la produzione e distruzione convettiva

L'energia termica viene introdotta nel *PBL* all'interfaccia aria-suolo per trasferimento turbolento di calore sensibile. Ciò sta a significare che nelle situazioni convettive dovrà essere proprio il termine dipendente dal flusso turbolento verticale di calore ad avere la supremazia, cosa che è ben verificata sia numericamente che sperimentalmente ed è indicata chiaramente dagli alti valori di E vicino al suolo. Tra l'altro, questo flusso verticale varia circa linearmente con la quota fino a circa $2/3$ dell'estensione verticale del *PBL*. Oltre a ciò, va notato che questo contributo alla variazione temporale di E è intrinsecamente anisotropo e polarizzato verso i trasferimenti verticali e ciò è in sintonia completa con il fatto che il *PBL* convettivo è sede privilegiata di *thermals*.

La presenza delle nubi può alterare profondamente il quadro convettivo. In effetti una copertura completa del cielo impedisce lo sviluppo della convettività e di conseguenza abbassa i valori di E . D'altro canto la presenza di nubi cumuliformi con la loro produzione interna di *buoyancy* incrementa nella parte alta del *PBL* la produzione di E .

La situazione notturna è totalmente determinata dal gradiente di temperatura potenziale presente nel *PBL*, cioè dalla situazione di stabilità statica determinata dal valore positivo di tale gradiente. Come visto al *Cap.1*, in questa situazione ogni particella che viene spostata dalla propria posizione di equilibrio a causa di un'iniezione di energia risponde oscillando e tendendo a ricollocarsi nella posizione originaria. Questa è chiaramente una situazione che tende a *sopprimere* l'energia cinetica turbolenta.

Termine 4: la produzione meccanica

La produzione *meccanica* di E dipende sia dagli stress di Reynolds sia dal gradiente del vento medio. Dato che tali grandezze dipendono solo dal movimento delle masse d'aria, il termine di produzione meccanica risulta sempre attivo ed è facile dimostrare che è anche sempre positivo e che è tanto maggiore quanto più la situazione è ventosa. Dato che il movimento delle masse d'aria, principalmente su terreni piani, è sostanzialmente orizzontale, anche questo termine, come il termine di produzione convettiva, è intrinsecamente anisotropo solo che in questo caso è polarizzato orizzontalmente. Essendo tale termine dipendente dagli stress di Reynolds, che diminuiscono rapidamente con l'allontanarsi dal suolo, è inevitabile che presenti sempre minore importanza con l'aumentare della quota e ciò spiega perché, nelle ore notturne, l'estensione verticale del *PBL*, cioè di fatto la porzione di atmosfera interessata dalla turbolenza meccanica, sia decisamente ridotto rispetto alle situazioni convettive.

Termine 5: il trasporto turbolento

Tale termine rappresenta la divergenza del flusso turbolento di E e dipende dalle sue differenze locali di intensità. Pertanto *localmente* tale termine può essere sia positivo che negativo a seconda della convergenza o divergenza del flusso. Tuttavia se lo si integra su tutto il *ML* il risultato è identicamente nullo. Pertanto questo termine non crea e non distrugge energia cinetica turbolenta ma la ridistribuisce all'interno del *PBL*.

Termine 6: la correlazione con le fluttuazioni di pressione

Le fluttuazioni di pressione sono una delle cose più difficili da misurare, soprattutto lontano dal suolo, e quindi evidenze sperimentali relative a questo termine sono inesistenti. C'è comunque da dire che uno dei compiti di questo termine è di ridistribuire entro il *PBL* l'energia cinetica turbolenta, anche se questa non è l'unica sua funzione. Dalla teoria delle onde di gravità emerge il fatto che tale termine dovrebbe essere anche il responsabile di un flusso di energia contenuta nelle onde di gravità che si propagano verticalmente e ciò inevitabilmente determina la perdita di una porzione significativa di E che viene trasmessa all'atmosfera sovrastante il *PBL*.

Termine 7: la dissipazione viscosa

L'energia cinetica turbolenta non si conserva e questo termine ne descrive la dissipazione causata dalla viscosità molecolare che agisce più efficacemente sui vortici di più piccole dimensioni. Tuttavia l'*energy cascade* (saremo più precisi al cap. 5) fa sì che i vortici di grandi dimensioni, generati durante le situazioni convettive, evolvano in vortici di dimensioni sempre più piccole fino ad essere preda di questo termine che ne descrive la trasformazione in calore. C'è quindi una stretta dipendenza tra intensità di E e la sua dissipazione viscosa ε e, dato che E normalmente diminuisce con la quota, anche il termine dissipativo presenterà un comportamento analogo. Nelle ore notturne, con bassi valori di E , la dissipazione viscosa sarà altrettanto bassa.

Esercizio 4.4

Alla quota di $z = 300$ m in situazioni convettive il gradiente verticale del vento medio $\partial u / \partial z = 0.01 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, la temperatura potenziale virtuale media è di 298 K, la covarianza tra la componente u e w del vento è pari a $-0.03 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ e la covarianza tra w e θ_v è $0.15 \text{ K}\cdot\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$. Ipotizzando una situazione di omogeneità orizzontale (per cui risulta impiegabile la relazione 4.40) e trascurando i termini di trasporto turbolento e di interazione con le fluttuazioni di pressione, quale deve essere il valore della dissipazione viscosa perché sia mantenuta una situazione localmente stazionaria (Stull, 1989).

Utilizzando la (4.40) si ha che:

$$0 = \frac{g}{\theta_v} \cdot \overline{w'\theta'} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - 0 - 0 - \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{g}{\theta_v} \cdot \overline{w'\theta'} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

cioè:

$$\varepsilon = \frac{g}{\theta_v} \cdot \overline{w'\theta'} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{9.81}{298} \cdot 0.15 - (-0.03) \cdot 0.01 = 4.94 \cdot 10^{-3} + 0.3 \cdot 10^{-3} = 5.24 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$$

4.3.3.3 Interazione dell'energia cinetica media con la turbolenza

Nell'equazione (4.39) il quarto termine indica come l'interazione della turbolenza col vento medio produca energia cinetica turbolenta. Questa produzione di energia cinetica turbolenta dovrebbe essere accoppiata ad una perdita di energia cinetica media del fluido. Per verificare questa ragionevole ipotesi, si consideri l'equazione data per le componenti medie del moto e si costruisca con regole analoghe a quelle fin qui utilizzate l'equazione prognostica per l'energia cinetica media MKE definita come:

$$MKE = \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 = \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) \quad [4.41a]$$

Tale equazione, dopo alcune semplificazioni, diventa:

$$\frac{\partial(MKE)}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial(MKE)}{\partial x_j} = -g\bar{u}_3 - \overline{v u_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial(\overline{u_i u_j} \cdot \bar{u}_i)}{\partial x_j} \quad [4.41b]$$

Se confrontiamo questa equazione con la (4.39) vediamo che:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \dots - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad [4.41c]$$

$$\frac{\partial(MKE)}{\partial t} = \dots + \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

In entrambe le equazioni è presente il medesimo termine, ma con segno opposto. Così l'energia che è prodotta meccanicamente come turbolenza è persa dal flusso medio e vice versa.

4.3.3.4 Il numero di Richardson

La turbolenza nel *PBL* deriva da due processi distinti: la convettività e lo *shear*. Nel primo caso il motore del meccanismo è il riscaldamento del suolo realizzato dalla radiazione solare incidente che genera dei vortici turbolenti (*thermals*) in corrispondenza di opportuni *inneschi* che sempre si individuano al suolo (zone a riscaldamento differenziale, ostacoli riscaldati preferenzialmente, ecc.). Questi vortici di grandi dimensioni si staccano dal suolo per il *galleggiamento* (*buoyancy*) dovuto alla differenza positiva di temperatura tra l'aria dei vortici stessi e l'aria circostante e risalgono il *PBL* fino ad esaurire la propria forza ascensionale. Durante la loro vita, per il processo dell'*energy cascade*, si frazionano in vortici sempre più piccoli fino a raggiungere dimensioni tali da essere dissipati in calore dalle forze viscosse. Tutto ciò, da un lato genera turbolenza nel *PBL*, quella che viene definita *turbolenza convettiva* o da *buoyancy*, dall'altro induce nel *PBL* il caratteristico profilo di temperatura potenziale che presenta un gradiente verticale negativo nel *SL*, un gradiente circa nullo nel *ML* ed un gradiente positivo nel *Entrainment Layer*. Il *PBL* risulta essere in *condizioni convettive* e tale permane finché permane attiva la sorgente di tale turbolenza, cioè la trasmissione all'atmosfera del calore di provenienza solare realizzato all'interfaccia aria-suolo. Questo meccanismo è interamente descritto dall'equazione prognostica dell'energia cinetica turbolenta e la *buoyancy* posseduta da una particella di aria è data dal termine (3) della (4.39a).

D'altro canto, il movimento delle masse d'aria sopra una superficie rugosa determina una situazione per cui viene generata turbolenza di natura completamente differente. In effetti un fluido viscoso, quale l'aria, che scorre su una superficie solida presenta un profilo medio di velocità caratteristico: è nullo in corrispondenza della superficie solida e crescente con l'allontanarsi da essa con gradiente (*shear*) massimo al suolo e in decisa diminuzione con la quota fino ad annullarsi. Se il numero di Reynolds fosse basso, il moto sarebbe laminare, cioè ordinato. Dato che, in generale, nel *PBL* il numero di Reynolds è elevato, il moto del fluido risulta essere altamente irregolare, e quindi turbolento, caratterizzato dalla presenza di vortici di dimensioni medio-piccole. L'innesco di tale meccanismo è ovviamente dato dalla rugosità della superficie su cui scorre il fluido e tale meccanismo permane finché il fluido risulta essere in movimento. La turbolenza così generata è detta *turbolenza meccanica* ed è presente anche quando è attivo il meccanismo che genera la turbolenza convettiva, sommandosi ad essa. Anche questo meccanismo è descritto dalla (4.39a) ed il termine (4) la quantifica.

Dato che questi meccanismi sono matematicamente descritti dall'equazione prognostica dell'energia cinetica turbolenta, in particolare dai termini (3) e (4), è risultato naturale individuare un indicatore adimensionale che consentisse di indicare la prevalenza di un meccanismo di produzione di turbolenza rispetto all'altro. In effetti tale indicatore è il *numero di Richardson Flusso* R_f . Convenzionalmente la sua definizione è data dal rapporto tra il termine di *buoyancy* ed il termine di *shear* (senza segno) scritti immaginando una completa omogeneità orizzontale e ipotizzando che il vento medio verticale (*subsidenza*) sia trascurabile rispetto alle componenti orizzontali, cioè:

$$R_f = \frac{g}{\theta_v} \cdot \frac{\overline{w\theta'_v}}{\overline{u'w' \frac{\partial u}{\partial z} + v'w' \frac{\partial v}{\partial z}}} \quad [4.42a]$$

Per quanto si è visto, di norma è verificata la negatività del denominatore, quindi il segno di R_f è generalmente dato dal segno del flusso turbolento di calore sensibile, cioè dalla covarianza tra la velocità verticale e la temperatura potenziale virtuale. Si hanno le seguenti possibilità:

- R_f è negativo: in questo caso il flusso turbolento di calore è positivo (quindi la covarian-

za tra la componente verticale del vento e la temperatura potenziale virtuale è positiva), cioè il *PBL* è in situazione convettiva ed il relativo meccanismo di turbolenza è pienamente attivo. Più è elevato in modulo R_f , maggiore è il livello di convettività dovuta o a un flusso di calore elevato o ad uno *shear basso*. Dato che, per come è stato definito, il valore di R_f è *locale*, tale indicatore quantificherà il livello di turbolenza esistente nel punto considerato, in cui siano noti sia gli stress di Reynolds che il flusso turbolento di calore sensibile, i gradienti verticali delle componenti della velocità e la temperatura potenziale media. Se si calcolasse R_f lungo una verticale entro un *PBL* convettivo, il suo valore permanerebbe negativo finché non se ne supera la sommità.

- R_f è nullo: l'unica possibilità in questo caso è che sia nullo il flusso turbolento di calore sensibile. Siamo, quindi, in una situazione di transizione (poco dopo l'alba o poco prima del tramonto), oppure in una giornata completamente nuvolosa. Il meccanismo di generazione dei vortici convettivi è inattiva, mentre è sempre attiva, per il movimento delle masse d'aria, il meccanismo di generazione della turbolenza meccanica. Ci si trova quindi in una *situazione adiabatica o neutra*.
- R_f è positivo: in questo caso il flusso turbolento di calore sensibile è negativo (la covarianza tra la componente verticale del vento e la temperatura potenziale virtuale è negativa). Anche in questo caso l'unico meccanismo di turbolenza attivo è quello meccanico che genera vortici di piccole dimensioni che *coprono* un'estensione verticale di atmosfera limitata e grosso modo proporzionale alla velocità del vento. Ci si trova, quindi, in una *situazione stabile*, molto simile a quella di un normale fluido viscoso che scorre su una superficie piana e rugosa. Più risulta elevato R_f minore è la turbolenza dell'atmosfera. Ad un certo punto essa può scomparire del tutto dando luogo inizialmente a fenomeni ondosi (come le onde di Kelvin-Helmholtz) e successivamente ad un regime totalmente laminare. Da quanto si è visto sperimentalmente e teoricamente, il valore R_f a cui può iniziare questa transizione da regime turbolento a regime laminare è +1.

Con l'introduzione di R_f è possibile riscrivere la (4.39a), ottenendo la relazione seguente (sempre nell'ipotesi di omogeneità orizzontale):

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \left(\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \cdot (1 - R_f) - \frac{\partial \overline{E'w'}}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p'w'}}{\partial z} - \varepsilon \quad [4.42b]$$

Il Numero di Richardson Flusso è sicuramente fisicamente ben posto, ma estremamente scomodo da impiegare nella pratica quando è decisamente più facile misurare (o calcolare) i valori medi delle variabili piuttosto che le covarianze, specialmente lontano dal suolo. Da questa constatazione è nata la necessità di riformulare questo indicatore del livello di turbolenza in termini di maggiore semplicità d'uso. La nuova riformulazione parte dalla constatazione che, almeno in prima approssimazione, esiste una proporzionalità tra i flussi ed i gradienti (constatazione che, tra l'altro, condurrà alla chiusura nota come Chiusura di tipo K). Da ciò si parte per definire il *Numero di Richardsons Gradiente Ri* definito come:

$$Ri = \frac{g}{\theta_v} \cdot \frac{\frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2} \quad [4.42c]$$

Dato che in Letteratura spesso si introduce genericamente il termine *Numero di Richardson*, senza specificare se Flusso o Gradiente, vale la pena ricordare che è invalso l'uso di indicare con tale termine solo *Ri*. Dalla definizione si vede subito come anche *Ri* sia definito *localmente* ed indica, anche in questo caso, l'intensità della turbolenza nel punto che si sta considerando ed in cui sono noti i gradienti delle componenti medie orizzontali della velocità del vento e della

temperatura potenziale virtuale media. Valori negativi di Ri indicano *convettività*, mentre valori positivi *stabilità*.

Proprio nel caso della stabilità è necessario evidenziare un risultato emerso dalle attività sperimentali. Anche in questo caso esiste un *valore critico* per Ri , anzi in realtà ne esistono due: il primo indicato col simbolo R_c e l'altro col simbolo R_T . Il primo assume un valore tra 0.21 e 0.25 ed il secondo il valore 1.0. Se un fluido in moto laminare aumenta il proprio Numero di Reynolds (per esempio aumentandone la velocità), tale tipo di moto persiste finché Ri non raggiunge il valore critico R_c . A questo punto, incrementando ulteriormente la velocità, si formano prima dei fenomeni ondosi coerenti (le onde di Kelvin – Helmholtz) che successivamente innescano il meccanismo di produzione di turbolenza meccanica. Partendo, invece, da un flusso turbolento ed abbassando progressivamente Ri si nota come esso permanga turbolento anche se $Ri > R_c$. La transizione a moto laminare avviene solo quando $Ri > R_T$. Dato che $R_T > R_c$, si assiste ad un fenomeno di *isteresi* non facilmente spiegabile in termini fisici.

Quando si utilizzano dati sperimentali, tipicamente i radiosondaggi, in realtà non si dispone di profili medi continui, ma di valori ottenuti ad un numero finito, ed in generale ridotto, di quote. Non è quindi facile utilizzare direttamente Ri . In pratica si usa in questi casi una *versione alle differenze finite* di Ri detta *Numero di Richardson Bulk* R_B . Per la sua definizione si consideri la tipica situazione di un radiosondaggio e si considerino due quote qualsiasi z_1 e z_2 ($z_2 > z_1$) in corrispondenza delle quali sia noto il valore sia delle componenti cartesiane orizzontali medie della velocità del vento che della temperatura potenziale virtuale. Definite le variabili seguenti:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{\theta}_{v1} & \text{ alla quota } z_1 \\ \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{\theta}_{v2} & \text{ alla quota } z_2 \end{aligned}$$

e

$$\Delta \bar{u} = \bar{u}_2 - \bar{u}_1 \quad \Delta \bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 \quad \bar{\theta}_v = 0.5 \cdot (\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1) \quad \Delta z = z_2 - z_1$$

R_B è definito dalla relazione seguente:

$$R_B = \frac{g}{\theta_v} \cdot \frac{\Delta \bar{\theta}_v \cdot \Delta z}{\frac{-2}{\Delta u} + \frac{-2}{\Delta v}} \quad [4.42d]$$

Sfortunatamente, vista l'arbitrarietà con cui si è preso lo strato di atmosfera di cui si cerca di stimare l'intensità media di turbolenza caratteristica, non è possibile definire una volta per tutte e con certezza un valore critico, valore che cambia a seconda della discretizzazione adottata.

Da ultimo, consideriamo ancora una volta l'equazione (4.39a), ma ora limitiamoci ad applicarla nel SL ed in condizioni orizzontalmente omogenee e stazionarie, riferite ad un sistema cartesiano il cui l'asse x è diretto nella direzione media del moto del flusso (secondo le linee di flusso). In questo caso tale equazione si riduce alla forma seguente:

$$-\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{E'w'}}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p'w'}}{\partial z} + \frac{g}{\theta} \overline{w'\theta'_v} - \varepsilon = 0 \quad [4.43a]$$

Ogni membro dell'equazione ha dimensioni ($m^2 s^{-3}$). Per renderla adimensionale è necessario dividere ogni membro per un *parametro* avente le medesime dimensioni. Se si considera che il SL ha come *velocità di scala* la *friction velocity* u_* e come *lunghezza di scala* la quota z , tale parametro altro non è che:

$$P = -kz / u_*^3$$

dove k è la costante di von Karman (che vale 0.4), introdotta solo per ragioni storiche. Dividendo ogni singolo membro per P , la (4.43a) diventa adimensionale ed ha la forma:

$$\underbrace{\frac{kz}{u_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}_{\Phi_m} + \underbrace{\frac{kz}{u_*^3} \frac{\partial \overline{E' w'}}{\partial z} + \frac{kz}{u_*^3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p' w'}}{\partial z}}_{\Phi_l} - \underbrace{\frac{kz}{u_*^3} \frac{g}{\theta_v} \overline{w' \theta'_v}}_{z/L} + \underbrace{\frac{kz}{u_*^3} \varepsilon}_{\Phi_\varepsilon} = 0 \quad [4.43b]$$

dato che, per definizione, $u_*^2 = -\overline{u' w'}$. In questa relazione sono stati evidenziati alcuni *gruppi adimensionali*. Il primo, indicato come Φ_m , è strettamente legato al gradiente verticale della velocità media del vento mentre l'ultimo, indicato come Φ_ε , è legato al tasso medio di dissipazione di energia cinetica turbolenta. Questi gruppi adimensionali non sono, ovviamente, delle costanti, ma sono funzioni dirette del livello di stabilità del *SL*. Tale dipendenza non emerge immediatamente da considerazioni puramente teoriche ed è stata ampiamente studiata sperimentalmente come vedremo quando tratteremo la Teoria della Similarità.

Il quarto termine è indicato come z/L , dove L ha le dimensioni di una lunghezza e prende il nome di *lunghezza di Monin Obukhov*, già introdotta al *Cap.2*. Dato che nel *SL* la quantità di moto ed il flusso turbolento di calore sensibile sono approssimativamente costanti con la quota, anche L lo sarà. La lunghezza di scala L può quindi essere interpretata fisicamente come una *lunghezza caratteristica* proporzionale alla quota a cui i meccanismi di turbolenza convettiva dominano quelli che producono la turbolenza meccanica. Per convenzione, l'equilibrio tra turbolenza meccanica e convettiva si ha a $z = -0.5 L$.

In condizioni circa adiabatiche, z/L è numericamente molto piccolo e può essere trascurato. In tali situazioni anche il secondo ed il terzo termine (il trasporto verticale di energia cinetica turbolenta e l'azione indotta dal flusso verticale di pressione) sono piccoli e quindi trascurabili. Pertanto ciò che risulta è che la produzione di turbolenza meccanica (*shear*) è bilanciata localmente dalla dissipazione viscosa di energia. In questo caso si può vedere (per esempio sperimentalmente) che il primo termine della (4.43b) si avvicina all'unità. In questo caso il tasso di dissipazione turbolenta ε nel *SL* neutro è dato da:

$$\varepsilon = u_*^3 / kz \quad [4.43c]$$

risultato in ottimo accordo con le osservazioni sperimentali. E' interessante notare come, a parte il segno, ε coincida con l'inverso di P .

Nelle condizioni stabili, il bilancio di energia cinetica turbolenta è dominato dalla produzione di *shear* e dalla sua dissipazione, entrambi proporzionali a z/L . Il trasporto turbolento è piccolo e il termine di *buoyancy* è pure relativamente piccolo e comunque rappresenta una perdita di energia turbolenta. Nelle condizioni convettive, invece, tutti i termini sono significativi ed i valori numerici dei vari termini crescono col crescere del grado di convettività, salvo il termine di *shear* che decresce.

Per concludere, è interessante fare alcune osservazioni.

Nello strato superficiale abbiamo visto che la lunghezza di scala è la quota stessa z e che la quantificazione della presenza di convettività è data da L . Viene quindi immediato considerare il rapporto adimensionale z/L . Il comportamento di tale grandezza adimensionale in funzione della stabilità è estremamente chiaro ed univoco e suggerisce il suo inserimento, assieme a R_f e R_i , nell'insieme degli indicatori locali di stabilità. Ciò, in effetti, è ciò che è accaduto e, in effetti, finora tale parametro è quello più in uso nelle applicazioni pratiche ed in particolare nella Teoria della Similarità. Abbiamo visto poco sopra che i due gruppi adimensionali Φ_m e Φ_ε dipendono dal grado di stabilità del *SL*. Proprio per concretizzare tale dipendenza, le attività sperimentali realizzate nell'ambito della Teoria della Similarità hanno condotto all'individuazione di ben definite relazioni analitiche semiempiriche proprio tra z/L e Φ_m e Φ_ε (e non solo).

4.4 IL PROBLEMA DELLA CHIUSURA

A questo punto appare chiaro che ci sono due strategie modellistiche per descrivere matematicamente l'evoluzione nello spazio e nel tempo delle grandezze fisiche che caratterizzano l'atmosfera: la prima fa riferimento alle equazioni prognostiche relative ai valori istantanei di queste variabili, mentre la seconda considera le equazioni scritte per i momenti centrali delle stesse. Il risultato ottenuto è che mentre il primo metodo risulta costituito da un insieme chiuso di equazioni tra le variabili istantanee, il secondo è costituito da un sistema di equazioni in cui vengono utilizzate le variabili meteorologiche medie, ma che non è chiuso.

Sarebbe auspicabile poter ottenere almeno una risoluzione numerica del primo modello, quello relativo alle variabili meteorologiche istantanee, proprio per la sua caratteristica di essere formalmente un sistema chiuso e di non richiedere, quindi, informazioni aggiuntive esterne. Tuttavia, perché la sua risoluzione numerica sia corretta, bisogna che il metodo numerico impiegato sia in grado di *risolvere* l'enorme varietà di scale spazio-temporali tipiche dei vortici presenti nel PBL. Viceversa, il *metodo alle differenze finite*, impiegato usualmente per approssimare le derivate spaziali e temporali in una griglia quadridimensionale di calcolo, determina *in maniera naturale* un filtraggio sulla soluzione ottenuta, essendo in grado di risolvere solo i vortici con dimensioni paragonabili al doppio della dimensione tipica della griglia e non inferiori. Una griglia di calcolo in grado di risolvere l'intero spettro della turbolenza richiederebbe, come detto, circa 10^{21} nodi, un'enormità anche per i calcolatori attuali. Questa *sfida* è ovviamente stata accolta dai vari ricercatori, nonostante le difficoltà evidenziate, e ciò ha condotto allo sviluppo di modelli noti come *DNS (Direct Numerical Simulation)*. Una trattazione dettagliata di ciò la si può trovare in Pope (2003) e dall'analisi di quanto lì riportato si nota immediatamente come tali modelli, più che strumenti per simulare l'evoluzione nello spazio e nel tempo dell'atmosfera in situazioni reali, siano in realtà dei sofisticati *laboratori numerici* entro cui studiare la turbolenza del PBL in situazioni altamente idealizzate ma tipiche. Queste simulazioni sono estremamente preziose perché consentono di studiare ciò che ancora oggi non è possibile misurare in atmosfera (o in laboratorio) come la *statistica euleriana* e *lagrangiana* (funzioni di densità di probabilità, momenti di vario ordine, correlazioni, covarianze, ecc.) delle variabili meteorologiche. Si rimanda al riferimento citato per ogni ulteriore dettaglio.

L'unico metodo effettivamente impiegato è l'integrazione numerica delle equazioni differenziali relative alle variabili meteorologiche medie che, però non sono chiuse, dato che il numero di variabili presenti è superiore al numero di equazioni. Per aggirare questo problema si potrebbe pensare di inserire tra le equazioni del modello anche tutte le equazioni prognostiche dei momenti del secondo ordine presenti (e alcune di tali equazioni sono state introdotte in precedenza e per le rimanenti si faccia riferimento a Stull (1988) e Sorbjan (1989) che le descrivono nella loro forma generale). A questo punto non solo il modello si è complicato in maniera preoccupante, ma soprattutto, come già visto, sono comparsi i momenti del terzo ordine nelle equazioni dei momenti del secondo ordine. Se, ipoteticamente, scrivessimo ed aggiungessimo al modello anche le equazioni prognostiche dei momenti del terzo ordine, scopriremmo che nelle mostruose equazioni ottenute sono comparsi i momenti del quarto ordine e così all'infinito.

Questa situazione è del tutto *generale* e si può dimostrare che, per la non linearità delle equazioni della Fluidodinamica, non è possibile chiudere il sistema da esse costituito: ogni volta che si aggiunge un'equazione che descrive un momento di ordine qualsiasi, in tale equazione compariranno sempre momenti di ordine superiore. Ma non è solo questo il problema. Ipotizziamo, per semplicità, che il modello fluidodinamico del PBL sia costituito dalle sole equazioni medie del moto (e trascuriamo, quindi l'equazione della temperatura potenziale virtuale e dell'umidità). In queste 3 equazioni compaiono 6 momenti distinti del secondo ordine. Se si individuano le 6 equazioni prognostiche per tali momenti e le aggiungiamo alle 3 equazioni originarie dei valori medi otteniamo un modello costituito da 9 equazioni differenziali in cui compaiono 10 momenti del terzo ordine. Se individuiamo le 10 equazioni per i momenti del terzo ordine e le aggiungiamo alle equazioni finora considerate, otterremo un modello di 19 equazioni

differenziali in cui compaiono 15 momenti del quarto ordine. Come si vede, più si considerano esplicitamente nel modello momenti di ordine elevato, più il numero di equazioni prognostiche che lo compongono aumenta più che proporzionalmente. L'unica speranza è che i termini nelle equazioni prognostiche che contengono i momenti di ordine elevato siano trascurabili, ma non c'è certezza in ciò, neppure dal punto di vista sperimentale vista l'enorme difficoltà insita nelle misure dei momenti di ordine superiore al secondo in situazioni di atmosfera reale.

Per rendere *trattabile* il problema della modellizzazione del *PBL*, l'approccio universalmente seguito è quello di *considerare un numero limitato di equazioni prognostiche* (in generale solo quelle che descrivono le variabili medie e, al più, i momenti del secondo ordine) ed *approssimare le rimanenti incognite* (i momenti di ordine superiore) in genere basandosi sulla conoscenza delle variabili medie e dei momenti esplicitamente previsti nelle equazioni del modello. *Questa operazione è chiamata la chiusura del sistema delle equazioni fluidodinamiche.*

Per prima cosa è necessario introdurre il concetto di *ordine di una chiusura*. Per definizione, una chiusura che parametrizza *tutti* i momenti di ordine $n+1$ viene detta *chiusura di ordine n*. In particolare:

- una *chiusura del primo ordine* parametrizza *tutti* i momenti del secondo ordine (cioè varianze e covarianze). Pertanto il modello sarà costituito dalle sole equazioni prognostiche per i valori medi delle variabili meteorologiche;
- una *chiusura del secondo ordine* parametrizza *tutti* i momenti del terzo ordine e quindi nel modello si aggiungono alle equazione delle variabili medie anche le sei equazioni relative ai momenti del primo ordine, e così via.

Oltre a queste chiusure (di ordine intero) sono state introdotte anche chiusure di ordine frazionario. La più celebre ed utilizzata è la *chiusura di ordine 1.5* che parametrizza *solo* alcuni dei momenti del secondo ordine e *tutti* i momenti del terzo ordine che vengono introdotti nelle equazioni prognostiche di quei momenti del secondo ordine considerati esplicitamente.

Le chiusure si distinguono non solo per i momenti delle variabili meteorologiche descritti esplicitamente con equazioni prognostiche, ma anche per la *località* o meno della chiusura stessa. In particolare, una *chiusura è locale* quando in un certo punto dello spazio un momento (per es. una covarianza) viene parametrizzato da variabili (valori medi, gradienti di valori medi ecc.) *relativi al medesimo punto*. Per esempio, una chiusura che parametrizza la varianza tra la temperatura potenziale virtuale e la componente verticale della velocità del vento col prodotto tra il gradiente verticale della temperatura potenziale media e un coefficiente di diffusività turbolenta è una chiusura locale. Questo modo di procedere è molto naturale ma, come si vedrà nel seguito, non sempre porta a simulazioni fisicamente corrette, specialmente nelle situazioni convettive, quando lo spettro delle dimensioni caratteristiche dei vari vortici presenti è enormemente ampio.

Sono state introdotte anche *chiusure non locali* che verranno anch'esse descritte nel seguito per la loro importanza applicativa. In tali chiusure, un momento relativo ad un dato punto dello spazio viene parametrizzato impiegando quantità fisiche note relative a *molti* punti. Si abbandona, quindi, l'ipotesi che un momento di ordine superiore sia descrivibile in un punto dello spazio-tempo sulla base del valore assunto delle variabili non in esubero sempre nel medesimo punto dello spazio. La presenza dei vortici turbolenti di così grandi dimensioni, soprattutto nelle situazioni convettive, determina contributi in un punto che provengono da gran parte del *PBL* stesso.

Prima di concludere, è necessario fare alcune considerazioni sul concetto di media. Nella deduzione delle equazioni prognostiche per l'atmosfera si è estesamente impiegato il concetto di *media di insieme*. Anche se ineccepibile, tale scelta nella pratica risulta totalmente inutilizzabile. In pratica si è sfruttato l'apparato teorico messo a punto per i modelli stocastici, ma quando si deve passare all'utilizzo pratico delle relazioni individuate è giocoforza passare ad un altro tipo di media più *fisicamente realizzabile*. La scelta più spontanea, motivata anche dalle misure speri-

mentali oggi possibili, è quella della *media temporale*, più semplice e fisicamente realizzabile. Anche se i due concetti di media si equivalgono solo per i processi *ergodici*, processi in cui i momenti non variano nel tempo, la sostituzione della media d'insieme con la media temporale è del tutto accettabile nella pratica. Tuttavia, anche i metodi numerici di risoluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali dettano le proprie leggi. Infatti, tali metodi, in particolare quello alle differenze finite, suddividono lo spazio in *celle di calcolo elementari* e producono i valori desiderati per le variabili considerate (per esempio la temperatura potenziale media) solo in corrispondenza di ciascuna cella. Di fatto, tale valore rappresenta il valore medio di cella e quindi, alla fine, la media spaziale nella cella. Quindi, a conti fatti, l'effettiva media impiegata è la combinazione della media temporale, rappresentata dalle equazioni analitiche del modello, e della media spaziale nella cella, dovuta al metodo risolutivo. Proprio per questo non è possibile ottenere informazioni su strutture turbolente aventi dimensioni inferiori al doppio della dimensione caratteristica della cella.

Esiste anche un altro modo di trattare le equazioni fluidodinamiche scritte per le variabili istantanee che, una volta risolte, dovrebbero fornire *una realizzazione* nello spazio e nel tempo delle variabili della cui prognosi si è interessati. Un tale *segnale* sicuramente contiene *fluttuazioni sovrapposte* relative a tutte le scale, dalle più grandi (i grandi *thermals* turbolenti) alle più piccole. L'idea che sta alla base di una vasta famiglia di modelli, i modelli LES (*Large Eddy Simulation model*), è quella di dividere in due parti il segnale meteorologico relativo ad un punto dello spazio; la prima porzione di segnale contiene tutte le fluttuazioni aventi una dimensione di scala superiore ad un certo valore, mentre la seconda parte tutte le fluttuazioni di dimensioni inferiori. Ovviamente la somma istante per istante dei due semi-segnali costituisce il segnale originario. Tale scomposizione del segnale viene effettuata applicando al segnale stesso un *filtro passa basso*, cioè un filtro avente come caratteristica una *frequenza di taglio (cut-off)* tale da restituire solo la porzione di segnale con scale spaziali superiori al valore di *cut-off*. Di fatto ciò può essere ancora realizzato con una media spaziale, purché sia una media mobile. Senza entrare nei dettagli (Sorbján, 1989), se si applica un tale filtro alle equazioni prognostiche istantanee, si ottengono delle nuove equazioni prognostiche sostanzialmente identiche a quelle ottenute con l'applicazione della media temperale, con alcune differenze concettuali profonde.

In primo luogo la media che in esse compare è la media mobile o un qualunque altro filtro di tipo simmetrico. Quindi, una volta risolte, esse non forniranno l'evoluzione nello spazio e nel tempo del valore medio delle varie grandezze meteorologiche, ma l'evoluzione nello spazio e nel tempo delle varie armoniche che componevano il segnale meteorologico di cui il filtro passa basso ha permesso il passaggio. Il risultato notevole è che è stato possibile con questa tecnica *risolvere* almeno una parte dello spettro della turbolenza del *PBL*. Ciò significa che la descrizione delle situazioni convettive caratterizzate da vortici di grandi dimensioni risulta essere sicuramente accurata. Il secondo aspetto sta nel fatto che anche in queste equazioni sono presenti momenti del primo ordine. Il loro significato, tuttavia, è notevolmente differente da quello dei momenti derivati con l'ipotesi di Reynolds. Essi altro non sono che le covarianze tra le armoniche del segnale *bloccate dal filtro passa-alto*. Quali siano le armoniche che il filtro lascia passare e quali no dipende dalla *frequenza di taglio* del filtro adottato. E' quindi possibile definire un filtro con caratteristiche dinamiche volute in modo che il segnale *non risolto* si riferisca a vortici di piccole dimensioni. In questo caso i termini delle equazioni contenenti i momenti sono meno influenti e comunque parametrizzabili in maniera pressoché universale visto che si riferiscono alla porzione di spettro della turbolenza atmosferica a maggior caratteristica universale. A tali tipi di parametrizzazione si dà il nome di *subgrid parameterization*.

Non è il caso di aggiungere altro sui LES, salvo che essi costituiscono un laboratorio numerico privilegiato per lo studio di base della turbolenza atmosferica. Tuttavia, dati i notevoli costi computazionali, i LES ad oggi non costruiscono uno strumento modellistico di uso operativo nelle situazioni reali. Una descrizione introduttiva ai LES è riportata in Sorbján (1989), mentre dettagli maggiori sulle applicazioni micrometeorologiche si trovano in Letteratura (Moenig, 1984; Hechtel e al., 1990; Walko e al., 1992). Infine in Pope (2003) e in Wyngaard (2010)

l'argomento è trattato in maniera notevolmente approfondita ed esaustiva, mentre in Appendice D ne viene presentata una sintesi, senza alcuna pretesa di completezza.

Nei paragrafi che seguono ci si concentrerà esclusivamente sui vari tipi di chiusura proposti, introducendo prima i metodi di chiusura locale e successivamente quelli di chiusura non locale.

4.5 I METODI DI CHIUSURA LOCALE

4.5.1 LA CHIUSURA DI ORDINE ZERO

Una chiusura di ordine zero implica che nel modello di *PBL* non sia presente alcuna equazione prognostica, neppure quelle per i valori medi. In altre parole, le componenti medie del vento, la temperatura potenziale virtuale media e le altre grandezze di interesse meteorologico sono parametrizzate direttamente in funzione dello spazio e del tempo. Anche se a prima vista non si comprende come possa essere possibile ciò, nel seguito se ne vedranno gli sviluppi ed i vantaggi trattando della Teoria della Similarità.

4.5.2 LA CHIUSURA DI ORDINE UN MEZZO

Quando un modello ammette una chiusura di ordine un mezzo è composto da un sottoinsieme delle equazioni prognostiche relative alle variabili medie. Non è un modello di uso generale e lo si può impiegare in alcuni casi particolari come nello studio del *PBL* convettivo. In questo caso, più che valutare l'evoluzione nello spazio e nel tempo delle grandezze medie (temperatura, componenti cartesiane del vento, umidità, ecc.), il modello considera come variabili rilevanti il valore medio delle principali grandezze meteorologiche mediate entro il *ML*. Nel *Cap.8* tali modelli verranno descritti nel dettaglio.

4.5.3 LA CHIUSURA DEL PRIMO ORDINE

L'idea di chiusura del primo ordine (detta anche *chiusura K*) è molto antica e si fa risalire a Schmidt e Prandtl che la formularono nel lontano 1925. Molto vasta è la bibliografia sull'argomento in cui sono riportate le diverse varianti modellistiche proposte. Per una maggior comprensione si rimanda a Sorbjan (1989), Garratt, (1992) e Etling (1990). In sostanza, la divergenza dei vari flussi viene parametrizzata come abbiamo anticipato al paragrafo 4.2.7. Più precisamente, questo tipo di chiusura ipotizza che, se consideriamo per esempio il flusso verticale di uno scalare generico *c*, tale flusso, in analogia con la diffusione molecolare, sia direttamente proporzionale al gradiente locale di *c* secondo una legge del tipo:

$$\overline{w'c'} = -K_c \frac{\partial c}{\partial z} \quad [4.44]$$

dove K_c è il coefficiente di diffusività turbolenta. Qui di seguito cercheremo di presentare i vari modi con cui sono stati espressi i vari coefficienti di diffusività turbolenta e le implicazioni che tale tipo di chiusura ha nella pratica.

4.5.3.1 I coefficienti di diffusività turbolenta

Questo semplice tipo di chiusura consiste nel postulare, in analogia con la legge di Fourier per la trasmissione del calore e con gli sforzi viscosi, una relazione diretta e lineare tra il flusso di una grandezza ed il rispettivo gradiente locale. I vari coefficienti di proporzionalità prendono il nome di coefficienti di diffusività turbolenta. Già è stato introdotto tale concetto al punto 4.2.7 e si è visto che:

- sono individuabile sei coefficienti di diffusività turbolenta K_{mxx} , K_{myy} , K_{mzz} , K_{mxy} , K_{mxz} , K_{mzz} che consentono di esprimere i vari termini della matrice di varianza-covarianza per gli stress di Reynolds
- sono stati individuati tre coefficienti K_{hxx} , K_{hyy} , K_{hzz} per esprimere la covarianza tra temperatura potenziale virtuale e componenti cartesiane del vento
- dovrebbero essere individuati analoghi coefficienti di diffusività turbolenta per esprimere i flussi delle altre grandezze scalari, tuttavia la mancanza di riscontri sperimentali di fatto obbliga ad adottare per ogni scalare gli stessi coefficienti del flusso di calore.

In pratica si è verificato che:

- tutti i coefficienti di diffusività turbolenta relativi ai flussi verticali di quantità di moto possono essere ritenuti uguali tra loro, cioè:

$$K_{mxz} = K_{myz} = K_{mzz} = K_m$$

- il coefficiente di diffusività turbolenta per il flusso verticale degli scalari presenta valori differenti dagli analoghi coefficienti per i flussi orizzontali. Essi verranno considerati tutti uguali ed indicati sinteticamente come K_h ,
- poco si sa dei coefficienti di diffusività turbolenta relativi ai flussi orizzontali sia della quantità di moto che delle grandezze scalari. L'ipotesi più usata è che siano tutti uguali e tale coefficiente si indica come K_H ,
- tutti questi coefficienti non sono proprietà chimico fisiche legate al fluido che si sta considerando (nel nostro caso l'aria della Troposfera), ma dipendono dal tipo di campo di moto e del livello di turbolenza che si instaura nel fluido. Ciò inevitabilmente deriva dal fatto che tali coefficienti avrebbero il compito (o meglio la pretesa) di assorbire tutte le complessità derivanti proprio dalla turbolenza. Intuitivamente sembrerebbe ben difficile che questi coefficienti possano dar conte della gerarchia di vortici presenti nel PBL e delle interrelazioni reciproche ed, in effetti, più il livello di turbolenza è elevato, meno questo tipo di approccio risulta realistico.

Come esempio concreto, si consideri un fluido pressoché incomprimibile, come normalmente viene considerato il PBL. Partendo dalle relazioni più generali che si possono scrivere, si giunge alle relazioni approssimate seguenti:

- i flussi orizzontali di quantità di moto, in forma cinematica, possono essere espressi da una relazione del tipo:

$$\overline{u'_i u'_j} = -K_k \cdot S_{ij} = -K_h \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] \quad i = j = 1, 2 \quad [4.45a]$$

dove S_{ij} è il valore dello *strain* (deformazione) relativo. La proporzionalità diretta tra *stress* di Reynolds e *strain* relativo fa sì che, in condizioni di omogeneità orizzontale, la diffusione turbolenta orizzontale risulti praticamente nulla.

- i flussi verticali di quantità di moto, ipotizzando una completa omogeneità orizzontale, sono pari a:

$$\overline{u'w'} = -K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad [4.45b]$$

$$\overline{v'w'} = -K_m \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad [4.45c]$$

- i flussi verticali di calore e di umidità dell'aria, sono espressi come:

$$\overline{w'g'_v} = -K_h \frac{\partial \overline{g'_v}}{\partial z} \quad [4.45d]$$

$$\overline{w'q'} = -K_q \frac{\partial \overline{q}}{\partial z} \quad [4.45e]$$

E' importante sottolineare ancora una volta che, a *differenza del caso molecolare, la diffusività turbolenta non è una proprietà del fluido ma del regime di flusso* e quindi *può essere funzione di varie grandezze, posizione e velocità del fluido comprese*. In questa formulazioni ci sono due ordini di problemi. Il primo è legato alla *realisticità* di questa formulazione ed il secondo *alla determinazione* di K_m , K_h e K_q .

Per quanto riguarda il primo aspetto, le sperimentazioni numeriche fatte ed alcune considerazioni teoriche portano ad affermare che questo tipo di chiusura è abbastanza realistico nelle situazioni stabili e neutre, situazioni in cui la scala dei meccanismi di diffusione risulta inferiore alla scala del moto medio. Nelle situazioni convettive, invece, la lunghezza di scala dei vortici dominanti è molto maggiore di quella dei moti medi e ciò rende praticamente inutilizzabile questo tipo di chiusura.

Per quanto riguarda la determinazione dei coefficienti di diffusività turbolenta appropriati, due sono le strade seguite: la prima si rifà alla *Teoria della Lunghezza di Rimescolamento di Prandtl* e l'altra è totalmente semiempirica.

Teoria della Lunghezza di Rimescolamento (mixing length theory)

La prima strada è stata proposta da Prandtl nel 1925 e tratta la diffusione turbolenta in analogia a quella molecolare. Essa sfrutta il fatto che le dimensioni di un generico coefficiente di diffusione turbolenta K sono m^2s^{-1} e perciò ci si può aspettare che tale grandezza sia il prodotto tra due grandezze di scala: una velocità caratteristica ed una lunghezza caratteristica, quest'ultima in qualche modo legata alla dimensione dei vortici dominanti.

Per sviluppare questo concetto si ragioni come segue. Si consideri un fluido (per esempio l'aria) avente un moto medio prevalentemente orizzontale nella direzione x ed una sua variabile scalare media q (per esempio la concentrazione di una sostanza chimica, l'umidità o la temperatura potenziale virtuale) la cui distribuzione nel fluido non presenti irregolarità particolari (sia cioè *smooth*). Sia inoltre nullo il moto verticale medio di tale fluido. Dato che si è interessati prevalentemente ai flussi verticali, focalizziamo la nostra attenzione su un unico vortice da cui selezioniamo due particelle generiche, la prima (*Particella 1*) posta alla quota $z_1 > z_r$ e la seconda (*Particella 2*) posta alla quota $z_2 < z_r$ e sia z_r una data quota di riferimento del tutto generica. Dato che stiamo considerando un vortice, queste particelle avranno anche una componente verticale che di fatto è una fluttuazione in seno al fluido rispetto al moto medio. Immaginiamo, poi, che entrambe le particelle siano dirette verso la quota di riferimento e che, una volta raggiuntala, perdano la propria individualità, miscelandosi completamente col fluido circostante (*Fig.4.8*).

Il vortice che abbiamo preso a riferimento sia, poi, un vortice di piccole dimensioni, quindi generato dalla turbolenza meccanica di *shear*. Per questa ipotesi, le due particelle che tendono a portarsi entrambe alla quota z_r , percorreranno cammini *molto piccoli* e, dovendo spostarsi di quota, saranno dotate di una velocità verticale che si ipotizza sia w_1 per la *Particella 1* alla quota z_1 e w_2 per la *Particella 2* a z_2 ed entrambe le velocità verticali decrescano fino ad annullarsi alla quota di riferimento z_r dove avviene la loro miscelazione con il fluido circostante e quindi la distruzione del vortice. Oltre a ciò, le due particelle conserveranno lo scalare q fino a che avviene la loro miscelazione con l'ambiente circostante. Vediamo ora di sfruttare tutte queste ipotesi di lavoro, decisamente forti, per ottenere informazioni su una possibile relazione che descriva la diffusione turbolenta dello scalare q .

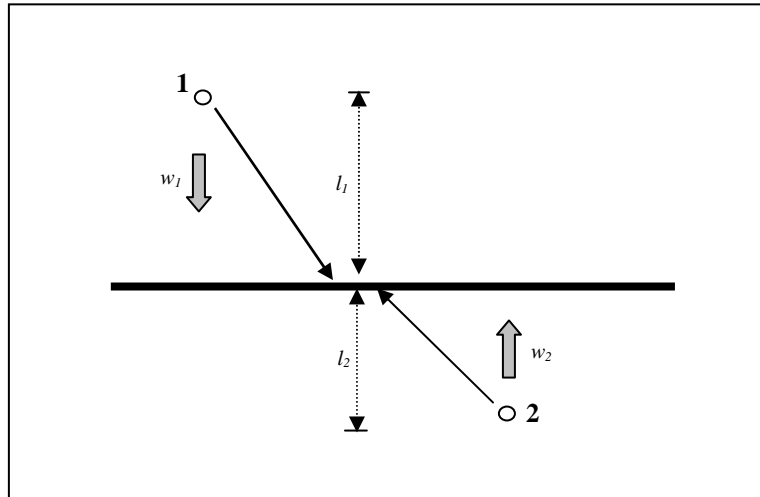


Fig.4.8: meccanismo esplicativo della lunghezza di mescolamento.

Il valore della grandezza q per le due particelle alla posizione iniziale non è noto, ma se si ipotizzano vortici molto piccoli, una buona approssimazione la possiamo ottenere impiegando uno sviluppo di Taylor arrestato al primo termine. Con queste ipotesi, se:

$$l_1 = |z_1 - z_r| \quad l_2 = |z_2 - z_r| \quad [4.46a]$$

il valore di q per le due particelle è pari a:

$$\begin{aligned} q_1 &= q(z_1) = q(z_r) + (z_1 - z_r) \cdot \frac{\partial q}{\partial z} = q(z_r) + l_1 \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \\ q_2 &= q(z_2) = q(z_r) + (z_2 - z_r) \cdot \frac{\partial q}{\partial z} = q(z_r) - l_2 \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \end{aligned} \quad [4.46b]$$

Quando queste particelle raggiungeranno la quota z_r , apporteranno un contributo (*fluttuazione*) relativo alla grandezza q pari, rispettivamente, a:

$$\begin{aligned} q'_1 &= +l_1 \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \\ q'_2 &= -l_2 \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \end{aligned} \quad [4.46c]$$

Consideriamo ora le loro velocità verticali. A priori nulla è noto in proposito, però per come si è posto il problema, il moto del fluido è circa bidimensionale (nel piano xz) e *incomprimibile*, quindi possiamo assumere che valga la legge seguente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad [4.47a]$$

che può essere approssimata ulteriormente sostituendo gli infinitesimi presenti nell'operatore derivata parziale con *piccoli incrementi*, cioè:

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta w}{\delta z} \cong 0 \quad [4.47b]$$

Ma, come vedremo meglio nel capitolo successivo, quando i vortici turbolenti sono veramente piccoli, una delle loro caratteristiche peculiari è una *isotropia locale* e ciò ci consente di dire che $\delta x \cong \delta y$, quindi:

$$\delta w \cong -\delta u \quad [4.47c]$$

Questa relazione è importante perché ci permette di mettere in relazione le variazioni su piccola

scala della velocità verticale delle particelle con la corrispondente variazione delle velocità orizzontale che dipende dal moto medio e che, in un fluido viscoso, è nullo in corrispondenza della frontiera (nel caso dell'atmosfera, nei pressi del suolo) e cresce con la quota. Sfruttando tutto ciò, possiamo dire che:

$$\begin{aligned} \delta w_1 &= w_1(z_1) - w_1(z_r) = -u(z_1) + u(z_r) = -(z_1 - z_r) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = -l_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \\ \delta w_2 &= w_2(z_2) - w_2(z_r) = -u(z_2) + u(z_r) = -(z_2 - z_r) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = +l_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad [4.47d]$$

Se immaginiamo poi che alla posizione finale le due particelle possiedano velocità nulla, visto che si rimescolano con il fluido circostante), quindi:

$$\begin{aligned} w_1 &= -l_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \\ w_2 &= +l_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad [4.47e]$$

A questo punto il flusso verticale di q derivante dall'arrivo delle due particelle alla quota z_r (dove avviene la loro miscelazione con l'ambiente circostante, la prima dall'alto e la seconda dal basso), sarà pari a:

$$\begin{aligned} w_1 q_1' &= -l_1^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \\ w_2 q_2' &= -l_2^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \end{aligned} \quad [4.48a]$$

Abbiamo ottenuto un risultato notevole: da dovunque provenga la generica particella i -esima (dall'alto o dal basso), il suo contributo al flusso verticale della grandezza q è dato dall'unica relazione:

$$w_i q_i' = -l_i^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \quad [4.48b]$$

dove con w_i' abbiamo indicato la velocità verticale della generica particella considerata. Il flusso verticale totale della grandezza q lo si ottiene sommando i singoli contributi portati da tutte le particelle del vortice, quindi:

$$\overline{wq} = -\sum_i \left(l_i^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \right) = -\sum_i \left(l_i^2 \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \quad [4.48c]$$

La sommatoria di tutti i quadrati delle distanze l_i percorse dalle differenti particelle può essere interpretato come una *lunghezza di scala* ℓ cui è stato attribuito il nome di *mixing length* (lunghezza di rimescolamento). Introducendo questa lunghezza di scala, la relazione precedente diventa:

$$\overline{wq} = -\ell^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \quad [4.48d]$$

E' quindi possibile, a questo punto, definire un *Coefficiente di diffusione turbolenta* K_q come:

$$K_q = \ell^2 \frac{\partial u}{\partial z} \quad [4.49a]$$

e quindi, se si ipotizza valida questa teoria, il flusso turbolento verticale di q risulta direttamente proporzionale al gradiente medio locale di tale grandezza secondo la relazione seguente:

$$\overline{w'q'} = -K_q \frac{\partial q}{\partial z} \quad [4.49b]$$

Come si vede, per avere un flusso positivo è necessario avere un gradiente negativo e viceversa. E' immediato constatare come questa relazione sia quella proposta dalla chiusura del primo ordine.

Ovviamente avremmo potuto fare un ragionamento analogo anche considerando la direzione y al posto della direzione z per ottenere il flusso turbolento di q in direzione trasversale al moto e ragionamenti lievemente più complessi considerando un vortice totalmente tridimensionale.

Tutta questa trattazione è stata condotta considerando una generica proprietà q del fluido, proprietà che può anche essere la quantità di moto. Ipotizzando valido tutto ciò, per il flusso cinematico di quantità di moto si ha che il coefficiente di diffusione turbolenta K_m espresso comunque dalla relazione è (4.49b), ma con un valore diverso per la *mixing length* ℓ .

Nel caso in cui la direzione del vento medio non coincida con l'asse x , il gradiente presente nella relazione precedente è quello della velocità media del vento. L'esperienza ha dimostrato che non c'è coincidenza tra K_m e K_h e i risultati sperimentali ottenuti supportano la relazione seguente:

$$K_h = K_m / Pr \quad [4.50]$$

dove Pr è il numero di Prandtl che, nelle situazioni adiabatiche e stabili vale circa 0.74.

Coefficiente di diffusività turbolenta per la quantità di moto

A questo punto l'espressione dei coefficienti di diffusione turbolenta richiede la determinazione unicamente della lunghezza di scala ℓ . Prima di dedicarsi alla sua parametrizzazione è conveniente fare un'ultima osservazione. La definizione di K_m coinvolge la lunghezza di rimescolamento che, in qualche modo, è proporzionale all'energia cinetica turbolenta E (e quindi al livello di turbolenza del moto) secondo una relazione del tipo:

$$K_m = cE^{1/2} \ell \quad [4.51a]$$

in cui c è una costante numerica. Questa relazione è estremamente scomoda da usarsi in un contesto di chiusura locale del primo ordine, visto che il modello fluidodinamico non prevede la presenza dell'equazione prognostica per l'energia cinetica turbolenta. Sarebbe possibile semplificare radicalmente tale equazione, anche se è più semplice riformulare l'espressione di K_m impiegando direttamente i gradienti verticali di velocità media del vento ed il *Gradient Richardson Number* Ri ottenendo:

$$K_m = \ell^2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot f(Ri) \quad [4.51b]$$

dove $f(Ri)$ è un fattore correttivo dipendente da Ri che tiene conto del grado di stabilità del *PBL*, ovviamente da parametrizzate.

Per quanto riguarda la lunghezza di scala ℓ , molte sono state le formulazioni proposte. Tutte, comunque, partono dal presupposto che la lunghezza di scala non sia costante entro l'intero *PBL*, ma vari con la quota in maniera che sia circa lineare entro il *SL* e si avvicini ad un valore asintotico nel resto del *PBL*, come descritto dalla relazione (Blackadar, 1962):

$$\ell = \frac{kz}{1 + kz/l_\infty} \quad [4.52a]$$

dove k è la costante di von Karman pari a circa 0.4. Il valore asintotico l_∞ non è definito in maniera univoca e molte sono state le proposte presentate in Letteratura. Le più usate sono le due versioni proposte da Blackadar (1962):

$$l_{\infty} = 2.7 \cdot 10^{-4} \cdot (u_g^2 + v_g^2)^{1/2} = 2.7 \cdot 10^{-4} \cdot G/f \quad [4.52b]$$

$$l_{\infty} = 0.009 u_* / f$$

dove G è il modulo del vento geostrofico, f il parametro di Coriolis e u_* è la *friction velocity*. Per evitare che tale valore diventi eccessivamente piccolo, spesso si ipotizza che non diventi inferiore ad un valore di soglia frequentemente posto pari a 30 m.

Molto usata è anche la relazione seguente (Mellor, Yamada, 1974):

$$l_{\infty} = 0.1 \int_0^{\infty} \sqrt{E} z dz / \int_0^{\infty} \sqrt{E} dz \quad [4.52c]$$

che presenta la difficoltà di richiedere la conoscenza dell'energia cinetica turbolenta E . Di essa si tratterà a proposito della chiusura di ordine 1.5.

Molte sono le correlazioni proposte per esprimere la correzione dovuta al livello di stabilità dell'atmosfera $f(Ri)$. Le principali parametrizzazioni proposte sono:

- Nelle situazioni stabili. In questo caso Ri risulta positivo e le principali correlazioni proposte sono :

- Blackadar(1979):

$$f(Ri) = \begin{cases} 1.1(1 - Ri/Ri_c) & 0 < Ri < Ri_c \\ 0 & Ri \geq Ri_c \end{cases} \quad [4.53a]$$

dove Ri_c è il Numero di Richardson critico, pari a 0.25.

- Luis (1979):

$$f(Ri) = (1 + 4.7 Ri)^{-2} \quad Ri > 0 \quad [4.53b]$$

- Estournel e Guedalia (1987):

$$f(Ri) = \begin{cases} (1 - 5 Ri)^2 & 0 < Ri < 0.16 \\ [(1 + 41 Ri)^{-1}]^{1.68} & Ri \geq 0.16 \end{cases} \quad [4.53c]$$

- Nelle situazioni convettive. In questo caso Ri risulta negativo e una possibile formulazione per $f(Ri)$ è la seguente (Blackadar, 1979):

$$f(Ri) = (1 - 18 Ri)^{1/2} \quad [4.53d]$$

Una proposta interessante è quella fatta da Moussiopulos (1996). Partendo dal presupposto che K_m sia esprimibile dalla (4.51a), semplificando in modo drastico l'equazione dell'energia cinetica turbolenta, giunge ad un'espressione algebrica per K_m funzione dei gradienti delle componenti medie orizzontali del moto, di Ri , di Pr e del flusso turbolento di quantità di moto considerato, data da:

$$K_m|_{ij} = \ell^2 \sqrt{D_{ij}^2 / 2} \cdot \sqrt{1 - Pr^{-1} Ri} \quad [4.54]$$

$$D_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}$$

Coefficiente di diffusività turbolenta per le grandezze scalari

Per quanto riguarda la *diffusività turbolenta per il calore*, poco è noto. Come detto, normalmen-

te si pone:

$$K_h = K_m / Pr \quad [4.55a]$$

dove Pr è funzione delle quota e della stabilità. Osservazioni sperimentali hanno mostrato come Pr valga circa 0.74 in situazioni adiabatiche e stabili, mentre tale valore decresce con l'aumentare della stabilità (convettività). Sostanzialmente concorde con tale filosofia è la scelta seguente:

$$K_h = \begin{cases} K_m & \text{per stratificazioni stabili} \\ 3K_m & \text{per stratificazioni convettive} \end{cases} \quad [4.55b]$$

Data la scarsità di dati sperimentali relativi all'umidità, nelle applicazioni si assume operativamente che:

$$K_q = K_h \quad [4.55c]$$

La chiusura K delega alla definizione funzionale dei coefficienti di diffusività tutta l'informazione relativa allo stato della turbolenza atmosferica. E' quindi intuitivo che quando i vortici turbolenti hanno ampiezze in un intervallo sufficientemente limitato (come avviene nelle situazioni stabili o adiabatiche), un tale approccio può avere un certo successo. Viceversa in condizioni convettive, quando i vortici presentano uno spettro dimensionale molto ampio, i problemi sono molto maggiori. In effetti, gran parte della letteratura disponibile è centrata sulla individuazione di una parametrizzazione dei coefficienti di scambio che riescano a rappresentare in modo non irrealistico tali condizioni abbandonando l'ipotesi della *mixing length* ed introducendo argomentazioni decisamente semiempiriche.

Approccio semiempirico

Un'alternativa seguita da molti autori per definire le relazioni per la stima dei coefficienti di diffusione turbolenta è quella di abbandonare la teoria della lunghezza di rimescolamento e le relative giustificazioni più o meno convincenti, proponendo relazioni o totalmente semiempiriche, dedotte da misure ottenute in campagne sperimentali o in laboratorio, o dedotte dai risultati ottenuti da simulazioni realizzate con modelli LES o con chiusure di ordine elevato. Da tutte queste osservazioni emerge una descrizione qualitativa chiara del profilo verticale dei coefficienti di diffusività turbolenta (Wyngaard 1982):

- vicino al suolo (diciamo entro il SL) K_m cresce linearmente con la quota e in situazioni prossime all'adiabaticità esso è data da (u_* è la friction velocity e k la costante di von Karman):

$$K_m = \frac{-\overline{u'w'}}{\partial u / \partial z} = k u_* z \quad [4.56]$$

- alla sommità del PBL K_m diminuisce fino a giungere a valori molto piccoli
- nella parte intermedia del PBL K_m presenta un valore massimo in condizioni lontane dalla stabilità.

Tenendo conto di questo comportamento qualitativo, sono state sviluppate numerosissime correlazioni semiempiriche, alcune delle quali vengono qui di seguito riportate. In tutte compare la dipendenza del coefficiente di diffusività turbolenta da parametri che caratterizzano la turbolenza nel PBL , quali la friction velocity, la velocità convettiva di scala e l'estensione verticale del PBL , sia convettivo che stabile. Anche se per qualcuno tali correlazioni sono *intrinsecamente non locali*, va comunque rilevato che ci sembra opportuno considerarle chiusure locali visto che vanno a definire dei coefficienti di diffusività turbolenta, coefficienti che non appaiono nelle chiusure non locali che tratteremo nel seguito. Vediamone ora alcuni esempi tra le innumerevoli

proposte, distinte a seconda del tipo di turbolenza presente entro il *PBL*.

Per quanto riguarda le *situazioni convettive*, alcune delle parametrizzazioni usate sono:

- la parametrizzazione di O'Brien (Pielke, 2002), che cerca di dare una forma funzionale ai coefficienti K (K_m e K_h) in modo tale da saldarli ai valori che essi dovrebbero avere entro il *SL*. Dato che, come si vedrà nel seguito, la Teoria della Similitudine prescrive che entro il *SL* si abbia:

$$K_m = u_*^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad K_h = \overline{w'g'} \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} \quad [4.57a]$$

allora per l'intero *PBL* la forma funzionale dei vari K è data da:

$$K(z) = K(z_i) + A_1 [K(h_s) - K(z_i) + (z - h_s) A_2] \quad [4.57b]$$

dove z_i e h_s sono rispettivamente l'altezza di rimescolamento (cioè la quota corrispondente alla sommità del *PBL*) e l'altezza del *SL*, pari a circa il 10% di z_i , e dove:

$$A_1 = (z_i - z)^2 / (z_i - h_s)^2 \quad [4.57c]$$

$$A_2 = \left(\frac{\partial K}{\partial z} \right)_{z=h_s} + 2[K(h_s) - K(z_i)] / (z_i - h_s) \quad [4.57d]$$

Perché sia possibile utilizzare tale relazione è necessario stabilire quanto valga il coefficiente K alla quota z_i ed il suo gradiente. In genere si ipotizza che entrambe le grandezze siano nulle a tale quota.

- la parametrizzazione di Moeng e Wyngaard, (1984)

$$K_m(z) = 2.5 w_* z_i (1 - z/z_i) \cdot (z/z_i)^{1.5} \quad [4.58a]$$

dove w_* è la velocità convettiva di scala.

- Alapaty e al. (1997) hanno proposto una correlazione simile, data da:

$$K_m(z) = k u_* z / (1 - 16 z/L)^{-1/2} \quad \text{nel SL} \quad [4.58b]$$

$$K_m(z) = k w_* z \cdot (1 - z/z_i) \quad \text{per } z_i/L < -10$$

dove L è la lunghezza di Monin Obukhov.

Per quanto riguarda le *situazioni adiabatiche* una delle parametrizzazioni usate è quella di Wippermann (1973):

$$K_m(z) = k u_* z \cdot \exp(-7.6(z/H)^{0.764}) \quad [4.59]$$

dove $H = k u_* / f$;

Per quanto riguarda le *situazioni stabili* una delle parametrizzazioni usate è quella di Brost e Wyngaard (1978):

$$K_m(z) = k u_* z \frac{(1 - z/h)^{1.5}}{1 + 4.7z/L} \quad [4.60]$$

dove h è l'altezza del *PBL* stabile.

Sono state proposte anche alcune correlazioni di uso decisamente generale, proposte da Smagorinsky, che legano il coefficiente di diffusione turbolenta ai gradienti locali delle componenti del

moto e della temperatura potenziale virtuale. La loro formulazione è decisamente atipica: esse infatti presuppongono che si stia operando entro un contesto modellistico in cui il dominio di indagine sia costituito da una regione dello spazio finita suddivisa in celle elementari a forma di parallelepipedo i cui spigoli siano pari a Δx , Δy e Δz . In particolare (Tag, 1979) le due forme più interessanti sono:

- la forma *deformation-related* secondo cui:

$$K_m = (k_d \Delta)^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \cdot \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 \right] \right]^2 \quad [4.61a]$$

dove $\Delta = (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)^{1/3}$ e k_d è una costante da determinarsi in base alle evidenze sperimentali. In Tag (1979) il valore consigliato è 0.2;

- la forma *buoyancy-related* secondo cui:

$$K_m = \Delta^2 \left[k_D^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \cdot \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 \right] \right]^{1/2} + k_B^2 \left| \frac{g}{\theta} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right|^{1/2} \right] \quad [4.61b]$$

in cui alla costante k_B è stato attribuito il valore 0.7

Dato che in un modello operativo deve essere possibile trattare qualunque tipo di atmosfera (stabile, neutra o convettiva), anche la porzione di atmosfera libera sovrastante il *PBL*, è necessario che venga scelto un insieme di relazioni in grado, complessivamente, di descrivere K_m in ogni situazione di stabilità. Se si considera, per esempio, Alapaty e al. (1997), la relazioni selezionate sono:

- le (4.58b) per le situazioni convettive entro il *PBL*;
- la (4.60) per le situazioni stabili entro il *PBL*, in cui, però, gli autori hanno sostituito l'esponente 1.5 con 2.0;
- nell'atmosfera libera essi hanno adottato una parametrizzazione suggerita da Blackadar (1979) in cui K_m è funzione del *Bulk Richardson Number* R_b e dello *shear* del vento. In particolare, se R_b è dato da:

$$R_b = \frac{g}{\bar{\theta}_v} \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad [4.62a]$$

si ha che:

$$K_m = K_0 + \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} (kl)^2 \frac{R_c - R_b}{R_c} \quad [4.62b]$$

dove K_0 è il valore di *background* ($1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$), l è una lunghezza di scala caratteristica (100

m) e R_c è il numero di Richardson critico che si può porre pari a 0.25.

Se si analizzano queste relazioni, sorgono immediate alcune considerazioni:

- innanzitutto si vede come K_m cresca nel SL fino a raggiungere un massimo nella parte centrale del PBL , per poi decrescere a zero alla sua sommità. Questo è un comportamento del tutto generale e confermato dai dati sperimentali;
- inoltre, non è difficile rendersi conto che i valori assunti da K_m sono piccoli (dell'ordine di 1) per le situazioni stabili, un poco superiori (dell'ordine di 10) per le situazioni neutre e molto elevati (dell'ordine delle centinaia) per le situazioni convettive;
- l'altra considerazione, forse più importante, è che il valore di K_m dipende a questo punto solo dalla conoscenza di parametri come u_* , L , H_0 (flusso turbolento di calore sensibile al suolo) e z_i , grandezze che possono essere *misurate realmente*. Quindi l'adozione di una chiusura K effettivamente porta ad un modello realmente utilizzabile, modello costituito dall'insieme delle equazioni relative alle variabili medie, più le relazioni di chiusura in cui sono presenti i coefficienti di scambio turbolento (le relazioni (4.58), (4.59) e (4.60) sono un esempio). Perché tale modello possa essere utilizzato è necessario risolvere numericamente le equazioni differenziali del modello e misurare nel tempo (o stimare) i parametri caratteristici della turbolenza atmosferica e la sua estensione verticale.

Una porzione rilevante di Letteratura è stata dedicata anche alla parametrizzazione semiempirica del coefficiente di diffusione verticale per il calore K_h e le altre grandezze scalari. In questo caso la parametrizzazioni più frequentemente usate sono le seguenti:

- nelle situazioni stabili: è stata proposta da Businger e Arya (1974) la correlazione seguente:

$$K_h = \frac{ku_*z}{0.74 + 4.7 \cdot z/L} \cdot \exp(-8fz/u_*) \quad [4.63a]$$

- nelle situazioni adiabatiche: sono state proposte le correlazioni seguenti:

- correlazione di Shir (1973):

$$K_h = ku_*z \cdot \exp(-8fz/u_*) \quad [4.63b]$$

- correlazione di Myrup e Rancieri (1976):

$$K_h = \begin{cases} ku_*z & \text{per } z/z_i < 0.1 \\ ku_*z \cdot (1.1 - z/z_i) & \text{per } 0.1 < z/z_i < 1.1 \\ 0 & \text{per } z/z_i > 1.1 \end{cases} \quad [4.63c]$$

- nelle situazioni convettive: sono state proposte le correlazioni seguenti:

- correlazione di McRae e al. (1982), detto $\zeta = z/z_i$ si ha che:

$$K_h = \begin{cases} 2.5w_*z_i(k \cdot \zeta) \cdot (1 - 15z/L) & \zeta \leq 0.05 \\ w_*z_i \cdot (0.021 + 0.408\zeta + 1.351\zeta^2 - 4.096\zeta^3 + 2.560\zeta^4) & 0.05 < \zeta \leq 0.6 \\ 0.2w_*z_i \cdot \exp(6 - 10\zeta) & \zeta 0.6 < \zeta \leq 1.1 \\ 0.0013 \cdot w_*z_i & 1.1 < \zeta \end{cases}$$

[4.63d]

La chiusura di tipo K per il calore, pur avendo avuto in passato una notevole popolarità, risulta essere soddisfacente solo in condizioni adiabatiche o stabili, mentre, così come è formulata, non fornisce risultati attendibili durante le situazioni convettive. Un modo per migliorare la sua rap-

presentatività in queste situazioni relativamente alla diffusione turbolenta del calore e degli scalari in genere è quello di usare una relazione del tipo:

$$\overline{w'\theta'} = -K_h \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} - \gamma_\theta \right) \quad [4.64a]$$

molto simile alla (4.45c) ma contenente il *controgradiente* γ_θ che tiene conto del fatto che è evidente una dispersione turbolenta verticale di calore anche nel *ML* in cui il gradiente verticale di temperatura potenziale media è prossimo allo zero, ma spesso leggermente positivo. Holtslag e Moeng (1991) hanno studiato con l'ausilio di un modello LES il controgradiente, riuscendo ad esprimerlo nel modo seguente:

$$\gamma_\theta = 2w_* \frac{\overline{w'\theta'_0}}{\sigma_w^2 \cdot z_i} \quad [4.64b]$$

dove la covarianza indicata è il flusso cinematico di calore sensibile al suolo. Dalla teoria della Similarità si ha che, se si considera il centro del *PBL* ($z/z_i = 0.5$):

$$\sigma_w^2 \cong 0.43u_*^2 + 0.29w_*^2 \quad [4.64c]$$

In situazioni tipiche con $H_0 = 200 \text{ Wm}^{-2}$, $u_* = 0.2 \text{ ms}^{-1}$, $z_i = 1000 \text{ m}$ e $\theta = 300 \text{ K}$, si ha che $w_* = 1.76 \text{ ms}^{-1}$, $\sigma_w^2 = 0.92 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ e quindi $\gamma_\theta = 0.0006 \text{ Km}^{-1}$, molto prossimo al valore di 0.0007 Km^{-1} spesso utilizzato. L'inserimento del controgradiente ha consentito di ottenere simulazioni numeriche decisamente buone, soprattutto se per K_m si usa una relazione come quella di O'Brien.

Studi approfonditi, sia teorici, sia numerici, sia sperimentali fatti per l'interpretazione delle situazioni convettive ha prodotto, tra l'altro, elementi utili per valutare e perfezionare la descrizione della dispersione turbolenta verticale, in particolare quella della temperatura potenziale virtuale media. Una sintesi interessante è stata fatta da Hamba (1993) che ha proposto una chiusura del primo ordine modificata che si può esprimere come:

$$\overline{w'\theta'_v} = -K_h \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z} + K_{2h} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_v}{\partial z^2} \quad [4.65a]$$

da cui si nota come il flusso turbolento verticale di calore sensibile sia costruito da due componenti, una proporzionale al gradiente della temperatura potenziale virtuale media e l'altro proporzionale alla sua derivata seconda. Utilizzando quanto prodotto dalla ricerca teorico-sperimentale relativamente alle situazioni convettive, Hamba è giunto ad individuare le seguenti relazioni per i due coefficienti di diffusione turbolenta:

$$\begin{aligned} K_h &= w_* z \cdot (1-\zeta)^2 \cdot \left\{ 1.3 + 22(\zeta - 0.1)^2 (1-\zeta) + 17 \exp[-43(\zeta - 0.84)^2] \right\} \\ K_{2h} &= w_* z^2 \cdot (1-\zeta)^2 \cdot \left\{ -0.85 + 13(\zeta + 0.1)^2 (1-\zeta) + 10 \exp[-36(\zeta - 0.85)^2] \right\} \end{aligned} \quad [4.65b]$$

dove $\zeta = z/z_i$. Queste relazioni dovrebbero tener conto anche degli effetti del controgradiente.

Per concludere questa rassegna è interessante presentare un insieme di relazioni per i coefficienti di diffusività turbolenta sia delle componenti orizzontali del vento che della temperatura e dell'umidità, impiegate in un modello operativo di previsione meteorologica (Hong e Pan, 1996). La parametrizzazione proposta dagli Autori si riferisce, in particolare, alla diffusione turbolenta in direzione verticale. In questo caso, la generica equazione che descrive l'evoluzione temporale di una generica variabile C (le componenti u e v o la temperatura oppure l'umidità), trascurando tutto ciò che non è diffusione turbolenta, diventa:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial z} \left[K_{zc} \left(\frac{\partial C}{\partial z} - \gamma_c \right) \right] \quad [4.66a]$$

Come si nota, gli Autori considerano l'azione del controgradiente attiva per tutte le variabili meteorologiche considerate.

Se inizialmente ci occupiamo delle componenti orizzontali del vento entro il *PBL*, il coefficiente di diffusività turbolenta viene espresso da una relazione dipendente dai principali parametri che caratterizzano la turbolenza del *PBL*, quali la sua estensione verticale h , la lunghezza di Monin-Obukhov L e la friction velocity u_* , data da:

$$K_{zm} = kw_s z \cdot \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2 \quad [4.66b]$$

In questa relazione k è la costante di von Karman e w_s è una velocità di scala definita come:

$$w_s = u_* \Phi_m^{-1} \quad [4.66c]$$

dove Φ_m è la Funzione di similarità del profilo verticale del vento, che incontreremo nello studio della Teoria della Similarità, valutata alla sommità del *SL*, cioè ad una quota pari a circa $0.1h$ che può essere espressa come:

$$\begin{cases} \Phi_m = \left(1 - 16 \frac{0.1h}{L} \right)^{-1/4} & \text{in situazioni convettive} \\ \Phi_m = \left(1 + 5 \frac{0.1h}{L} \right) & \text{in situazioni stabili} \end{cases} \quad [4.66d]$$

Per quanto riguarda, invece, la temperatura e l'umidità, la velocità di scala w_s è ancora data dalla relazione (4.66c) dove Φ_m è sostituito da Φ_t dato da:

$$\begin{cases} \Phi_m = \left(1 - 16 \frac{0.1h}{L} \right)^{-1/2} & \text{in situazioni convettive} \\ \Phi_m = \left(1 + 5 \frac{0.1h}{L} \right) & \text{in situazioni stabili} \end{cases} \quad [4.66e]$$

e il coefficiente di diffusività turbolenta K_{zt} è pari a K_{zm} moltiplicato per il Numero di Prandtl Pr dato da:

$$Pr = \left(\frac{\Phi_t}{\Phi_m} + 7.8k \frac{0.1h}{h} \right) \quad [4.66e]$$

Per completare la parametrizzazione all'interno del *PBL* manca una relazione che esprima il controgradiente. Essa è data da:

$$\gamma_{m,c} = 7.8 \frac{\overline{w'c'}}{w_s} \quad [4.66f]$$

Nelle situazioni stabili e sopra il *PBL* i coefficienti di diffusività turbolenta sono molto più consueti e vengono espressi dalla relazione:

$$K_{m,t} = \ell^2 \cdot f(Ri) \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \quad [4.66g]$$

dove:

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{kz} + \frac{1}{30} \quad [4.66h]$$

e la funzione dipendente dalla stabilità è data da:

$$f(Ri) = e^{-8.5Ri} + \frac{0.15}{Ri + 3.0} \quad [4.66i]$$

Infine, gli Autori hanno introdotto anche dei limiti entro cui possono variare i coefficienti di diffusività turbolenta: essi non possono essere inferiori a $1 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e superiori a $1000 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

Diffusività orizzontale

Non sarà certo sfuggito al lettore il fatto che finora si è trattato solo della diffusione verticale e solo per essa sono state presentate le parametrizzazioni per i coefficienti di diffusività turbolenta. Tuttavia, come si è visto, la diffusione orizzontale è presente nelle varie equazioni prognostiche e quindi risulta indispensabile considerare anche questo aspetto.

Analizzando la Letteratura si nota quanto poco sia stato trattato questo argomento. Prendendo come riferimento, per esempio, Yamazawa (1989), si possono fare le osservazioni seguenti:

- la mancanza di dati sperimentali in proposito rende necessario ipotizzare che in orizzontale il valore assunto dai coefficienti di diffusione turbolenta per le componenti medie del vento, per la temperatura potenziale virtuale e per l'umidità specifica sia il medesimo;
- detto K_x il coefficiente diffusivo nella direzione x e K_y quello relativo alla direzione y , tali coefficienti possono essere stimati con le relazioni seguenti:

$$K_x = 2c\Delta x \cdot \Delta y \cdot \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right| \quad K_y = 2c\Delta x \cdot \Delta y \cdot \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right| \quad [4.67a]$$

dove c è una costante numerica dell'ordine di 0.01 e Δx e Δy sono le dimensioni orizzontali della griglia di calcolo impiegata nell'approssimazione numerica dell'equazione prognostica. In teoria, nell'equazione prognostica per u e v compaiono i termini:

$$\overline{u'v'} = -K_{xy} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \overline{v'u'} = -K_{xy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad [4.67b]$$

Anche tale coefficiente di diffusione turbolenta è dato da una relazione simile alla (4.67a), cioè da:

$$K_{xy} = 2c\Delta x \cdot \Delta y \cdot \left[\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right| \right] \quad [4.67c]$$

Un modo alternativo è lo schema proposto nel 1963 da Smagorinsky secondo cui il coefficiente di diffusione orizzontale $K_H = K_x = K_y$ vale:

$$K_H = \frac{(c\Delta)^2}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad [4.68a]$$

dove $\Delta = (\Delta x \cdot \Delta y)^{1/2}$ e c è un coefficiente pari a 0.14.

Nelle situazioni convettive ed entro il *PBL*, sulla base dei risultati sperimentali ottenuti da Willis e Deardorff (1976), Seinfeld e Pandis (1998) hanno proposto la correlazione seguente:

$$K_H = 0.1w_*z_i \quad [4.68b]$$

Di fatto l'incertezza su quale debba essere il valore da attribuire a K_H è elevata e spesso nelle

applicazioni pratiche si usano valori costanti dell'ordine di $10^4 \div 10^7 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

4.5.3.1 Alcune semplificazioni notevoli

La forma particolarmente semplice che assumono le equazioni del moto medio dell'atmosfera quando si utilizza una chiusura K induce a tentare soluzioni analitiche in situazioni altamente idealizzate.

La prima semplificazione introdotta nelle equazioni di moto è quella di limitarsi a considerare situazioni orizzontalmente omogenee. In questo caso, se il moto è incomprimibile, si ha che:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= +f\bar{v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= -f\bar{u} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}\end{aligned}\quad [4.69a]$$

equazioni che sono il punto di partenza di ogni ragionamento successivo.

Per prima cosa consideriamo l'atmosfera libera al di sopra del PBL . In essa gli stress di Reynolds sono praticamente nulli ed in condizioni stazionarie le relazioni precedenti si riducono a:

$$\begin{aligned}0 &= +f\bar{v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - 0 \\ 0 &= -f\bar{u} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - 0\end{aligned}\quad [4.69b]$$

Quindi nell'atmosfera libera in condizioni circa stazionarie e in assenza di flussi turbolenti di quantità di moto, la forza di Coriolis bilancia esattamente la forza derivante dal gradiente medio orizzontale di pressione. Le componenti cartesiane del vento che derivano da questo stato di equilibrio sono dette componenti del *vento geostrofico* (u_g, v_g), definite come:

$$u_g = -\frac{1}{f \cdot \rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \quad v_g = +\frac{1}{f \cdot \rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\quad [4.69c]$$

Normalmente la *velocità* del vento geostrofico è data da $G = (u_g^2 + v_g^2)^{1/2}$. In sostanza, il vento geostrofico è molto vicino al vento che si riscontra al di sopra del PBL , quando le condizioni sinottiche evidenziano una sostanziale situazione di omogeneità orizzontale a una scala tipica della mesoscala. Con le definizioni di vento geostrofico è possibile riscrivere le (4.69a) in condizioni stazionarie come:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= +f(\bar{v} - v_g) - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= -f(\bar{u} - u_g) - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}\end{aligned}\quad [4.69d]$$

Per completezza va ricordato che:

- si dice *vento ageostrofico* (u_{ag}, v_{ag}) la differenza tra il vento reale e quello geostrofico, cioè:

$$u_{ag} = \bar{u} - u_g \quad v_{ag} = \bar{v} - v_g\quad [4.69e]$$

Se si è in condizioni di omogeneità orizzontale e in condizioni stazionarie, il vento ageostrofico è identicamente nullo.

- si definiscono *scostamenti geostrofici (geostrophic departures)* le quantità seguenti:

$$+ f(\bar{v} - v_g) \quad - f(\bar{u} - u_g) \quad [4.69f]$$

La Spirale di Ekman e la situazioni barotropica

A questo punto si consideri l'intero *PBL* in una situazione circa adiabatica. La sua situazione dinamica è fortemente influenzata dalla presenza della forza di Coriolis. In effetti, ipotizzando uno stato stazionario ed adottando una chiusura di tipo *K* per parametrizzare la divergenza dei flussi turbolenti, le (4.69a) si riducono alla forma seguente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} K_m \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right) + f(\bar{v} - \bar{v}_g) &= 0 \\ \frac{d}{dz} K_m \left(\frac{d\bar{v}}{dz} \right) - f(\bar{u} - \bar{u}_g) &= 0 \end{aligned} \quad [4.70a]$$

relazioni che esprimono il bilancio tra il gradiente di pressione, il termine di Coriolis e gli stress di Reynolds. Se si ipotizzano *costanti con la quota* K_m , u_g e v_g , si può ottenere una soluzione analitica del sistema precedente. Infatti, moltiplicando la seconda equazione per l'unità immaginaria i e sommandola alla prima, una volta definita la nuova variabile

$$\Phi = (\bar{u} - u_g) + i(\bar{v} - v_g)$$

e, posto $a = (f/2K_m)^{1/2}$, si ottiene l'equazione:

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - 2a^2 i \Phi = 0 \quad [4.70b]$$

che ha la soluzione generale: $\Phi = c_1 e^{a(1+i)z} + c_2 e^{-a(1+i)z}$. Ponendo le condizioni al contorno pari a:

$$\Phi = \begin{cases} -u_g - iv_g & \text{per } z = 0 \\ 0 & \text{per } z = \infty \end{cases} \quad [4.70c]$$

si ottiene la soluzione compatta:

$$\bar{u} + i\bar{v} = (u_g + iv_g) \cdot (1 - e^{-a(1+i)z}). \quad [4.70d]$$

In pratica, il profilo verticale delle componenti del vento entro il *PBL* è descritto dalle relazioni seguenti, che si riferiscono a situazioni stazionarie, vento geostrofico e diffusività turbolenta costanti con la quota:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u_g - e^{-az} \left(\bar{u}_g \cos(az) + \bar{v}_g \sin(az) \right) \\ \bar{v} &= v_g - e^{-az} \left(\bar{v}_g \cos(az) - \bar{u}_g \sin(az) \right) \end{aligned} \quad [4.71a]$$

Ruotando il sistema di riferimento in modo da avere il vento geostrofico lungo l'asse x , la (4.71a) si riduce a:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= G(1 - e^{-az} \cos(az)) \\ \bar{v} &= G e^{-az} \sin(az) \end{aligned} \quad [4.71b]$$

dove G è il modulo del vento geostrofico. E' tipico usare le (4.71b) per realizzare dei grafici aventi sull'asse x il rapporto \bar{u}/G e sull'asse y il rapporto \bar{v}/G e collegando tutti i punti relativi alle quote crescenti. Il risultato è una linea a spirale che indica la progressiva rotazione della direzione del vento con la quota (*Spirale di Ekman*). In Fig.4.9 è presentato un esempio di *spirale di Ekman* ottenuta con le relazioni (4.71b) in cui $a = 0.001$.

4. MODELLO OPERATIVO DEL PBL

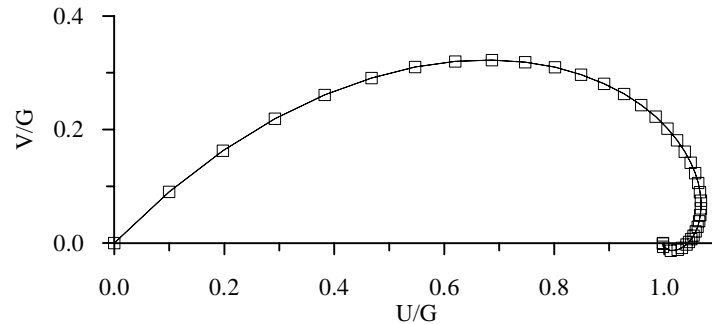


Fig. 4.9: esempio di spirale di Ekman

Anche se estremamente affascinante, il modello di *PBL* così ottenuto è ben poco fisico, nel senso che è ben lontano dalla realtà dei fatti. L'ipotesi più critica introdotta è la costanza con la quota del coefficiente di diffusività turbolenta. Posto che tale parametro possa essere impiegato (e questa è già di per sé un'ipotesi discutibile), sappiamo che esso deve assumere valori nulli al suolo, molto piccoli alla sommità del *PBL* e deve avere un massimo a quote intermedie.

Ritornando alle relazioni individuate, è ora possibile ottenere una relazione che esprima l'angolo tra il vettore vento medio ed il vettore vento geostrofico:

$$\tan(\alpha) = \frac{\bar{v}}{\bar{u}} = \frac{e^{-\alpha z} \sin(\alpha z)}{1 - e^{-\alpha z} \cos(\alpha z)} \quad [4.71c]$$

Si può vedere che, quando z tende a 0, α tende a 45° .

Alla sommità del *PBL*, il vento geostrofico deve coincidere col vento reale: questa condizione richiede che, detta z_i la sommità del *PBL*, valga la relazione $\alpha z_i = \pi$, cosa che comporta:

$$z_i = \pi \sqrt{\frac{2K_m}{f}} \quad [4.72]$$

Questa è la prima relazione che ci consente di stimare l'altezza del *PBL*. Anche se, viste le ipotesi adottate, tale *PBL* non può essere convettivo, ma circa adiabatico.

Esercizio 4.5

Si consideri valida la teoria barotropica che ha condotto alla Spirale di Ekman. Quando il coefficiente di diffusività turbolenta K_m , supposto costante con la quota, vale $12 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, il parametro di Coriolis f è pari a 10^{-4} , quanto è l'altezza del *PBL*?

Applicando la relazione (4.70) si giunge immediatamente alla soluzione:

$$z_i = \pi \sqrt{\frac{2K_m}{f}} = \pi \sqrt{(2 \cdot 12) \cdot 10^4} = 1539 \text{ m}$$

Questo valore può rappresentare un ragionevole ordine di grandezza, anche se nella realtà, anche nelle situazioni altamente convettive, risulta inferiore almeno di circa un terzo.

Il vento termico e la situazione baroclina

Le osservazioni sperimentali fatte nel *PBL* spesso hanno rilevato profili verticali delle componenti del vento molto differenti da quelli previsti dalla *spirale di Ekman*. Ciò dipende dalla stabilità atmosferica e dal fatto che il vento geostrofico, nella realtà, può variare con la quota visto che la distribuzione barica a mesoscala è frequente che vari da quota a quota. Per tener conto di quest'ultimo fenomeno, si differenzino entrambe le equazioni che descrivono le componenti del

vento geostrofico e si faccia uso dell'equazione idrostatica. Si arriva così a delle relazioni che descrivono il cambiamento del vento geostrofico con la quota (*vento termico*):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_g}{\partial z} &= -\frac{R_d}{f} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \frac{\partial \ln(\bar{p})}{\partial y} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \frac{\partial \ln(\bar{p})}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v_g}{\partial z} &= +\frac{R_d}{f} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \frac{\partial \ln(\bar{p})}{\partial x} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{\partial \ln(\bar{p})}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad [4.73a]$$

L'atmosfera si dice *barotropica* quando il *vento termico* è *nullo*; in caso contrario l'atmosfera si dice *baroclina*. In base ai dati sperimentali, le relazioni precedenti possono semplificarsi nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_g}{\partial z} &\cong -\frac{g}{f\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = -m \\ \frac{\partial v_g}{\partial z} &\cong +\frac{g}{f\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = n\end{aligned}\quad [4.73b]$$

dove m e n sono due parametri numerici, con valori tipici dell'ordine di $0.001s^{-1}$. Assumendo quindi, in prima approssimazione, un profilo lineare con la quota per il vento geostrofico:

$$u_g = u_{g0} - mz \quad v_g = v_{g0} + nz \quad [4.73c]$$

(dove u_{g0} e v_{g0} sono il valore assunto dalle componenti del vento geostrofico al suolo) si ottengono le seguenti relazioni approssimate:

$$\begin{aligned}\bar{u} &\cong u_{g0} \cdot (1 - e^{-az} \cos(az)) - v_{g0} \cdot e^{-az} \sin(az) - mz \\ \bar{v} &\cong v_{g0} \cdot e^{-az} \sin(az) + v_{g0} (1 - e^{-az} \cos(az)) + nz\end{aligned}\quad [4.73d]$$

Operando la solita rotazione di assi coordinati si ottiene:

$$\begin{aligned}\bar{u} &\cong G_0 (1 - e^{-az} \cos(az)) - mz \\ \bar{v} &\cong G_0 e^{-az} \sin(az) + nz\end{aligned}\quad [4.73e]$$

dove G_0 è il valore del modulo del vento geostrofico a livello del suolo. In Fig.4.10 è presentato un confronto tra una situazione *barotropica* ed una situazione *baroclina*.

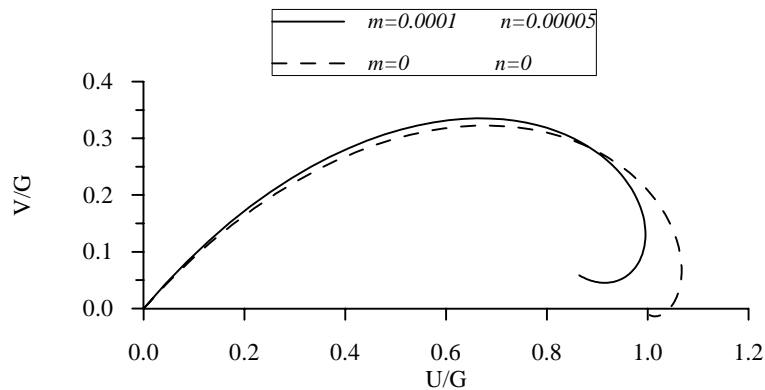


Fig.10: confronto tra una situazione barotropica ed una situazione baroclina.

Lo strato superficiale ed il vento logaritmico

Riprendendiammo in considerazione le equazioni del moto e della temperatura potenziale virtuale scritte in condizioni di omogeneità orizzontale:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= +f(\bar{v} - v_g) - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \\
\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= -f(\bar{u} - u_g) - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \\
\frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial t} &= - \frac{\partial \overline{w'\theta'}}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{4.74a}$$

Se indichiamo con F_u , F_v e F_θ i gradienti verticali dei flussi turbolenti, è possibile fare interessanti considerazioni. Si consideri inizialmente F_u definito come:

$$F_u = - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \tag{4.74b}$$

Se integriamo in z da 0 ad una quota z_* , si ha che (il pedice 0 si riferisce al valore del flusso all'interfaccia aria-suolo, mentre il pedice z_* al valore a tale quota):

$$\int_0^{z_*} F_u dz = \overline{u'w'} \Big|_{z_*} - \overline{u'w'} \Big|_0 \tag{4.74c}$$

In linea di principio z_* può essere una quota qualunque, tuttavia se la scegliamo in modo tale che il valore dell'integrale sia una frazione piccola e prefissata (per es. 0.1) del valore del flusso di quantità di moto all'interfaccia aria-suolo, la relazione precedente garantisce che nello strato di *PBL* prossimo al suolo (cioè il *SL*) il flusso varia poco con la quota e quindi lo si può considerare a tutti gli effetti costante. Lo stesso si può fare trattando F_v e F_θ . Ciò definisce di fatto z_* e quindi quello strato di *PBL* prossimo al suolo in cui i flussi turbolenti di fatto restano costanti (entro il 10% del valore assunto al suolo). Tale strato altro non è che il *SL* ed il suo spessore z_* tipicamente è nell'intervallo $10^0 \div 10^2$ metri.

Vista l'arbitrarietà del sistema di riferimento adottato, si può individuare una rotazione degli assi tale da portare l'asse x parallelo allo stress di Reynolds. In questo caso si ha che:

$$-\overline{u'w'} = u_*^2 \quad -\overline{v'w'} = 0 \quad -\overline{w'\theta'} = u_* T_* \tag{4.75a}$$

Ora se si ipotizza valida una chiusura di tipo K , si ha che:

$$\begin{aligned}
-\overline{u'w'} &= K_m \frac{d\bar{u}}{dz} = u_*^2 \\
-\overline{w'\theta'} &= K_h \frac{d\bar{\theta}}{dz} = u_* T_*
\end{aligned}
\tag{4.75b}$$

cioè:

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*^2}{K_m} \quad \frac{d\bar{\theta}}{dz} = \frac{u_* T_*}{K_h} \tag{4.75c}$$

Se cerchiamo di quantificare K_m utilizzando ragionamenti dimensionali, notiamo che le sue dimensioni sono tali da giustificare il fatto che possa essere proporzionale al prodotto tra una *lunghezza di scala* (che nel *SL* non può che essere la quota stessa z) ed una *velocità di scala* (che nel *SL* è certamente u_*); ciò comporta quindi che:

$$K_m = k u_* z \tag{4.75d}$$

dove k è una costante di proporzionalità nota come costante di von Karman pari a circa 0.4. Utilizzando tutto ciò si giunge immediatamente alla relazione seguente che sprime il gradiente verticale della velocità media del vento in una condizione che, per le approssimazioni fatte, non può che essere circa adiabatica:

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{kz} \quad [4.75e]$$

che integrata diventa:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \cdot \ln(z) + \text{cost} \quad [4.76a]$$

Per individuare la costante di integrazione è necessario premettere che la *no-slip condition* si realizza non all'interfaccia aria-suolo ma ad una quota z_0 (*parametro di rugosità superficiale*) proporzionale alle dimensioni degli elementi di rugosità presenti sul terreno. Pertanto, la forma finale della relazione precedente è:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad [4.77b]$$

che è il ben noto profilo logaritmico verticale del vento medio nel *SL* in condizioni adiabatiche.

Analogo ragionamento può essere fatto per la temperatura potenziale media. In particolare, ricordando che *Pr* cioè il Numero di Prandtl è pari al rapporto K_m/K_h , si ha che:

$$\frac{d\bar{\theta}}{dz} = \text{Pr} \cdot \frac{T_*}{kz} \quad [4.77a]$$

E' difficile definire e soprattutto misurare la temperatura all'interfaccia aria-suolo. In realtà anche per la temperatura (come si vedrà) è definito un parametro di rugosità z_{0h} (differente da z_0) che rappresenta di fatto lo zero di riferimento per l'integrazione della relazione precedente dove la temperatura potenziale virtuale vale θ_0 . Integrando la relazione precedente si giunge quindi a:

$$\bar{\theta}(z) = \theta_0 + \text{Pr} \frac{T_*}{k} \cdot \ln\left(\frac{z}{z_{0h}}\right) \quad [4.77b]$$

Il risultato ottenuto, che verrà confermato quando tratteremo la Teoria della Similarità, è che entro il *SL* le equazioni fluidodinamiche dell'atmosfera, opportunamente semplificate, hanno prodotto delle relazioni analitiche per il profilo verticale della velocità del vento e della temperatura potenziale, entrambe di tipo logaritmico con la quota. E' facile verificare che si poteva giungere ad una relazione di profilo simile anche per il contenuto di vapor d'acqua in aria e per ogni altro scalare.

4.5.4 CHIUSURA DI ORDINE UNO E MEZZO E DUE

L'esagerata aggregazione con cui le informazioni relative alla turbolenza atmosferica sono presenti in un modello con chiusura del primo ordine è senza dubbio la ragione del loro comportamento non sempre soddisfacente nella descrizione delle situazioni convettive. Sicuramente un sostanziale miglioramento si ha quando viene introdotta una chiusura del secondo ordine in cui ogni flusso turbolento presente nelle equazioni delle variabili medie, invece di essere parametrizzato, viene descritto dalle equazioni prognostiche (più o meno semplificate) viste al punto 4.3. Ovviamente un tale modello differenziale risulta molto complesso visto che consta di un numero rilevante di equazioni differenziali e, nelle equazioni relative ai momenti del secondo ordine, è necessario operare una serie di drastiche parametrizzazioni dei momenti del terzo ordine che in esse compaiono. Dettagli su tutto ciò possono essere trovati in Sorbjan (1989) e nella bibliografia ivi citata. In pratica è molto raro che venga utilizzata veramente una chiusura del secondo ordine (una chiusura che richieda la descrizione prognostica di tutti i momenti del secondo ordine). E' molto più comune che si apportino ulteriori semplificazioni alla formulazione base della chiusura del secondo ordine, riducendo il numero di equazioni prognostiche relative

ai momenti di ordine due. Chiusure di questo tipo non possono dirsi veramente del secondo ordine, ma sono intermedie tra il primo ed il secondo ordine. Per questo esse vengono classificate nella eterogenea famiglia delle *chiusure di ordine uno e mezzo*. Qui di seguito verranno forniti alcuni dettagli su due classi di chiusure di questo tipo particolarmente importanti nella pratica.

Va infine segnalato che nel libro di Sorbjan (1989), al paragrafo 6.5, viene presentata una descrizione minuziosa delle varie equazioni differenziali prognostiche dei momenti secondi in funzione di una loro possibile chiusura.

4.5.4.1 Le chiusure di Mellor e Yamada

Il lavoro più celebre sulle chiusure locali del secondo ordine è quello fatto nell'arco di più di un decennio da G. L. Mellor e Tetsuji Yamada. Essi sono partiti dalla formulazione completa della Chiusura del secondo Ordine e da essa hanno dedotto versioni sistematicamente sempre più semplificate, generando un'intera famiglia di ordine intermedio tra il primo ed il secondo ordine. Per distinguere una formulazione dall'altra, gli Autori hanno introdotto il concetto di *Livello* (il Livello 4 è il più complesso e coincide con la Chiusura completa del Secondo Ordine, mentre il Livello 1 coincide con una chiusura del primo ordine). L'elemento caratteristico che sta alla base di queste continue semplificazioni è il concetto di *anisotropia* dell'atmosfera. Qui di seguito introdurremo, una dopo l'altra, queste chiusure partendo dalla Chiusura di Livello 4.

Prima di fare ciò, vista la complessità delle relazioni differenziali coinvolte, ci è parso opportuno, per quanto possibile mantenere le ipotesi e la simbologia adottata in origine dagli Autori ed in particolare:

- con U , V , Θ e P vengono indicate rispettivamente la componente x e y medie del moto, la temperatura potenziale virtuale media e la pressione media;
- le fluttuazioni turbolente di queste grandezze vengono indicate con le rispettive lettere minuscole;
- va da sé che, in termini tensoriali, le fluttuazioni delle componenti del moto vengono indicate genericamente come u_j ;
- viene usata la grandezza q al posto dell'energia cinetica turbolenta E . Tra le due grandezze vale la relazione:

$$q^2 = 2E \quad \text{cioè:} \quad q = \sqrt{2E} \quad [4.78a]$$

- per abbreviare la scrittura nelle relazioni differenziali è stato introdotto l'operatore differenziale:

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + U_k \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k} \quad [4.78b]$$

che rappresenta in maniera compatta la somma del tasso di variazione temporale di una variabile media e della sua avvezione. Il lettore noterà una sorprendente somiglianza tra questo operatore e la derivata materiale, ma è solo una somiglianza visto che la derivata materiale si riferisce esclusivamente alle variabili meteorologiche istantanee;

- con f_j è stato indicato in maniera compatta il parametro di Coriolis, cioè $f_j = (0, f_y, f)$ e con g_j il vettore accelerazione di gravità, cioè $g_j = (0, 0, -g)$;
- è stato introdotto il coefficiente di espansione termica β definito come:

$$\phi = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad [4.78c]$$

- sono stati trascurati i termini di diffusività molecolare nelle equazioni relative alle variabili medie;
- si è ipotizzato che l'atmosfera sia incompressibile.

La presentazione che segue è totalmente derivata dai vari articoli pubblicati dai due Autori ed, in particolare, da Mellor e Yamada (1974 e 1982).

Chiusura di Livello 4

Il più elevato grado di complessità lo si ha con una Chiusura completa del secondo Ordine in cui, però, devono essere parametrizzati tutti i momenti di ordine superiore. Per fare ciò, vengono invocate due ipotesi:

- l'ipotesi di Kolmogorov 1941 che richiede l'isotropia locale dei vortici di piccole dimensioni. Di tale ipotesi e delle sue conseguenze pratiche si tratterà diffusamente nel Capitolo successivo;
- l'ipotesi di Rotta 1951, che è cruciale nella parametrizzazione dei momenti di ordine superiore al secondo. Secondo tale ipotesi il termine:

$$\overline{p \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}$$

noto come *termine di redistribuzione dell'energia*, può essere parametrizzato in funzione dei gradienti delle componenti medie del moto, degli stress di Reynolds e delle covarianze tra le componenti del moto e la temperatura potenziale virtuale secondo una relazione che qui non riportiamo e che può essere trovata in Yamada (1975).

In sostanza, il modello di *Livello 4* prevede:

1. le equazioni prognostiche per le variabili medie, cioè:

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0 \quad [4.79a]$$

$$\frac{DU_j}{Dt} + \varepsilon_{jkl} f_k U_l = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\overline{u_k u_j} \right) - \frac{\partial P}{\partial x_j} - g_j \beta \Theta \quad [4.79b]$$

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\overline{u_k \theta} \right) \quad [4.79c]$$

2. le equazioni prognostiche per gli stress di Reynolds, cioè:

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q \lambda_1 \left(\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_i} \right) \right] = \\ -\overline{u_k u_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_k u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{q^3}{\Lambda_1} \delta_{ij} - \frac{q}{3l_1} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 \right) + \\ + C_1 q^2 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \beta (g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta}) + \\ + C_2 \beta \left(g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta} - \frac{2}{3} \delta_{ij} g_k \overline{u_k \theta} \right) \end{aligned} \quad [4.80a]$$

3. le equazioni prognostiche per le covarianze tra la temperatura potenziale virtuale e le componenti del moto, cioè:

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_j\theta}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q\lambda_3 \left(\frac{\partial \overline{u_j\theta}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_k\theta}}{\partial x_j} \right) \right] = & \quad [4.80b] \\ -\overline{u_j u_k} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - \overline{\theta u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \beta g_j \overline{\theta^2} - \frac{q}{3l_2} \overline{u_j\theta} + C_3 g_j \beta \overline{\theta^2} \end{aligned}$$

4. l'equazione prognostica per la varianza della temperatura potenziale virtuale, cioè:

$$\frac{D\overline{\theta^2}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q\lambda_2 \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} \right] = -2\overline{u_k\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - 2\frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2} \quad [4.80c]$$

La parametrizzazione impiegata per i termini in cui erano presenti i momenti di ordine superiore al secondo contengono:

- i coefficienti C_1 , C_2 e C_3 e le lunghezze di scala l_1 e l_2 , parametri che derivano dall'aver adottato l'ipotesi di Rotta della redistribuzione dell'energia;
- le lunghezze di scala Λ_1 e Λ_2 , che derivano dall'adozione dell'ipotesi di isotropia locale di Kolmogorov,
- le lunghezze di scala λ_1 , λ_2 e λ_3 presenti nei termini diffusivi.

Gli Autori propongono che:

- tutte le lunghezze di scala siano proporzionali ad un'unica lunghezza di scala l , cioè:

$$l_1, l_2 = A_1 l, A_2 l \quad [4.81a]$$

$$\Lambda_1, \Lambda_2 = B_1 l, B_2 l \quad [4.81b]$$

Della lunghezza di scala l e delle costanti A_1 , A_2 , B_1 e B_2 parleremo nel seguito.

- le costanti C_2 e C_3 sono le uniche legate ai termini di buoyancy e vengono considerate nulle;
- le lunghezze di scala λ_1 , λ_2 e λ_3 sono considerate identiche e pari a λ_1 . Anche di λ_1 si parlerà nel seguito.

Va notato, poi, che nelle equazioni relative agli stress di Reynolds non sono stati introdotti i termini di Coriolis che sono trascurabili nel *PBL*.

Ciò che salta subito all'occhio è la tremenda complessità delle equazioni prognostiche (4.80); dato che è estremamente facile introdurre errori tipografici nel trascrivere equazioni così mostruose, chi le dovesse utilizzare è conveniente che le confronti con le equivalenti equazioni riportate negli articoli originali e nei relativi errata-corrige. Oltre a ciò, va rilevato che il modello di *Livello 4*, cioè il modello con Chiusura completa del Secondo Ordine, è costituito dal sistema costituito dalle equazioni (4.79) e (4.80), cioè complessivamente da ben 13 equazioni differenziali alle derivate parziali. Vista la mostruosità delle equazioni che costituiscono questo modello, l'opera degli Autori si è concentrata nella sistematica semplificazione o eliminazione dei termini presenti in esse. E' da questa azione di semplificazione sistematica che hanno origine le chiusure di livello inferiore, che però non sono Chiusure del Secondo Ordine in senso stretto, ma chiusure intermedie tra il primo ed il secondo ordine. Collettivamente le indicheremo come *Chiusure di Ordine 1.5*.

Chiusura di Livello 3

La prima semplificazione parte dalla constatazione che ogni equazione che esprime i momenti del secondo ordine può essere scomposta in una *porzione isotropa* e in una *porzione non isotro-*

pa. In particolare, i momenti secondi delle componenti del moto possono essere espressi nel modo seguente:

$$\overline{u_i u_j} = \left(\frac{\delta_{ij}}{3} + a_{ij} \right) q^2 \quad [4.82]$$

dove a_{ij} è la misura adimensionale dell'asimmetria. In effetti quando $i = j$, in condizioni di perfetta simmetria la varianza di una delle componenti del moto sarà 1/3 del doppio dell'energia cinetica turbolenta. Tutta la lunga strada percorsa dagli autori è tutta volta ad approssimare e a parametrizzare il più possibile l'asimmetria presente nelle varie relazioni del modello. Inserendo queste constatazioni nelle varie equazioni dei momenti secondi ed ignorando il tasso di variazione nel tempo, l'avvezione ed i termini diffusivi delle componenti anisotrope dei momenti secondi l'intero insieme delle equazioni prognostiche per i momenti secondi si riduce alla sola equazione per l'energia cinetica turbolenta (cioè per q^2) e per la varianza della temperatura potenziale. I dettagli di tutto ciò possono dati in Mellor Yamada (1974). Oltre a ciò, perché le due equazioni non contenessero momenti del terzo ordine, è stato necessario una loro drastica parametrizzazione.

In effetti, per dare un'idea di ciò che hanno fatto gli Autori, prendiamo in considerazione l'equazione per l'energia cinetica turbolenta E scritta, per semplicità, in condizioni di omogeneità orizzontale:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{g}{\Theta} \overline{w\theta} - \frac{\partial \left[\overline{w[p'/\rho + E']} \right]}{\partial z} - \varepsilon \quad [4.83a]$$

e consideriamo le varie parametrizzazioni dei termini di ordine superiore al secondo fatte dagli Autori:

- il quarto termine del membro di destra è stato parametrizzato nel modo seguente:

$$\frac{\partial \left[\overline{w[p'/\rho + E']} \right]}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[0.23 \frac{5 \cdot 2^{3/2}}{3} \cdot l \cdot E^{1/2} \frac{\partial E}{\partial z} \right] \quad [4.83b]$$

in cui l la stessa lunghezza turbolenta di scala incontrata in precedenza e di cui si tratterà nel seguito. Questa parametrizzazione ha sostituito le covarianze tra w e p e tra w e E con un'espressione dipendente direttamente da E e dal suo gradiente verticale;

- il quinto termine del membro di destra, cioè il tasso di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta viene parametrizzato come:

$$\varepsilon = 2^{5/2} \frac{E^{3/2}}{B_1 l} \quad [4.83c]$$

In questo modo il tasso di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta risulta direttamente proporzionale ad E ed inversamente proporzionale alla lunghezza di scala l . Si noti che B_1 è la costante numerica.

L'equazione prognostica per la varianza della temperatura potenziale virtuale, sempre in condizioni di omogeneità orizzontale, risulta pari a:

$$\frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial t} = -2\overline{w\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{\partial \overline{w\theta^2}}{\partial z} - 2\varepsilon_\theta \quad [4.84a]$$

Il secondo ed il terzo termine della parte destra dell'equazione richiedono anch'esse una parametrizzazione drastica. In particolare:

- Il secondo termine, cioè il gradiente verticale del flusso di varianza della temperatura, viene parametrizzato nel modo seguente:

$$\frac{\overline{\partial w \theta^2}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\sqrt{2} B_1^{-1/3} \cdot l \cdot E^{1/2} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial z} \right] \quad [4.84b]$$

- l'ultimo termine, cioè la dissipazione della varianza di temperatura diventa:

$$\varepsilon_\theta = \sqrt{2} E^{1/2} \frac{\overline{\theta^2}}{B_2 l} \quad [4.84c]$$

dove B_2 è un'altra costante numerica. Questa parametrizzazione è decisamente drastica ed evidenzia una proporzionalità diretta tra la varianza della temperatura e la sua dispersione viscosa.

A conti fatti e riproducendo fedelmente le equazioni riportate in Mellor e Yamada (1974), si ha che le dieci equazioni differenziali alle derivate parziali (4.80) che descrivevano i momenti del secondo ordine vengono sostituite dalle equazioni seguenti:

- l'equazione prognostica per l'energia cinetica turbolenta:

$$\frac{Dq^2}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{5}{3} q \lambda_1 \frac{\partial q^2}{\partial x_k} \right] = -2 \overline{u_k u_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - 2 \beta g_k \overline{u_k \theta} - 2 \frac{q^3}{\Lambda_1} \quad [4.85a]$$

- l'equazione prognostica per la varianza della temperatura potenziale virtuale:

$$\frac{D\overline{\theta^2}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q \lambda_2 \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} \right] = -2 \overline{u_k \theta} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - 2 \frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2} \quad [4.85b]$$

- le sei equazioni diagnostiche per gli stress di Reynolds:

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} = & \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 + \\ & - \frac{3l_1}{q} \left[\left(\overline{u_k u_i} - C_1 q^2 \delta_{ki} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \left(\overline{u_k u_j} - C_1 q^2 \delta_{kj} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u_k u_l} \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right] + \\ & - \frac{3l_1}{q} \beta \left(g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u_l \theta} \right) + \\ & + \frac{3l_1}{q} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{q \lambda_1}{3} \left(\delta_{ik} \frac{\partial q^2}{\partial x_j} + \delta_{jk} \frac{\partial q^2}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial q^2}{\partial x_k} \right) \right] \end{aligned} \quad [4.85c]$$

- le tre equazioni diagnostiche per le covarianze tra componenti del moto e temperatura potenziale virtuale:

$$\overline{u_j \theta} = -3 \frac{l_2}{q} \left[\overline{u_j u_k} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} + \overline{\theta u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \beta g_j \overline{\theta^2} \right] \quad [4.85d]$$

Nonostante le apparenze, la chiusura di Livello 3 è una chiusura di ordine uno e mezzo visto che delle dieci equazioni differenziali originarie (4.80) che descrivevano i momenti del secondo ordine ci si è ridotti a solo due equazioni differenziali (per l'energia cinetica turbolenta e la varianza della temperatura potenziale virtuale), mentre gli altri momenti sono descritti da nove equazioni algebriche.

Chiusura di Livello 2.5

Un ulteriore passo nel processo di semplificazione, indicato dagli Autori come *Livello 2.5*, si ottiene trascurando nel *Livello 3* la derivata materiale ed i termini diffusivi dell'equazione prognostica per la varianza della temperatura potenziale virtuale. In pratica, a questo livello di semplificazione, il modello mantiene le componenti isotropiche presenti nei termini delle varie equazioni. Oltre a ciò, limitatamente a queste equazioni, si ipotizza che siano trascurabili i gradienti e la divergenza orizzontale dei flussi turbolenti.

Il lato favorevole di questa ipotesi sta nel fatto che, così come è formulato, il modello di chiusura si applica nell'identica forma sia ad un modello di atmosfera completamente tridimensionale che ad uno monodimensionale del tipo, purchè entrambi idrostatici. Inoltre, dato che le relazioni differenziali diventano un poco più semplici, è ora possibile, senza esagerare nella complicazione, introdurre nel modello anche l'equazione di conservazione del vapor d'acqua rappresentato dal valor medio del rapporto di mescolanza R , la cui fluttuazione indicheremo come r . Nel caso monodimensionale e considerando trascurabili l'avvezione di umidità, le relazioni considerate sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= -f(V_g - V) - \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= +f(U_g - U) - \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + U \frac{\partial \Theta}{\partial x} + V \frac{\partial \Theta}{\partial y} &= - \frac{\partial \overline{w\theta}}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= - \frac{\partial \overline{wr}}{\partial z}\end{aligned}\quad [4.86a]$$

che diventerà il modello principe nelle sperimentazioni numeriche di un *PBL* convettivo.

Per completezza, seguendo Yamada e Mellor (1975), è possibile riformulare l'equazione per la temperatura potenziale virtuale media in termini di *vento termico* nel modo seguente:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{f\Theta}{g} \cdot \left[V \frac{\partial U_g}{\partial z} - U \frac{\partial V_g}{\partial z} \right] - \frac{\partial \overline{w\theta}}{\partial z}\quad [4.86b]$$

In aggiunta a queste semplificazioni, gli Autori hanno introdotto quella che chiamano *boundary layer approximation* e che consiste nell'utilizzare l'approssimazione idrostatica, oltre che nel trascurare i gradienti orizzontali delle variabili medie e la divergenza orizzontale dei flussi turbolenti. Il risultato di tutto ciò, ottenuto come riportato nei dettagli in Mellor e Yamada (1974), è il seguente:

- l'equazione altamente parametrizzata per q^2 che presenta la forma seguente:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{q^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left[lqS_q \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q^2}{2} \right) \right] = -\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{g}{\Theta} \overline{w\theta} - \frac{q^3}{\Lambda_1}\quad [4.87a]$$

dove S_q è una costante pari a 0.2 e Λ_1 un'opportuna lunghezza di scala. Come si nota, l'evoluzione dell'energia cinetica turbolenta dipende dai gradienti verticali delle componenti medie del moto, dagli stress di Reynolds e dal flusso turbolento verticale di calore sensibile;

- anche se non immediatamente visibile dall'equazione precedente, la dissipazione di energia cinetica turbolenta è data dal termine:

$$\varepsilon = q^3 / \Lambda_1\quad [4.87b]$$

e dipende solo dall'energia cinetica turbolenta stessa;

- i vari momenti del secondo ordine risultano, a questo punto, espressi solo da relazioni algebriche che li legano gli uni agli altri, ed in cui appaiono solo i gradienti verticali delle componenti orizzontali medie del moto ed il valor medio della temperatura potenziale virtuale. Tali relazioni sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\overline{u^2} &= \frac{q^3}{3} + \frac{l_1}{q} \cdot \left[-4\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + 2\overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} - 2\frac{g}{\Theta} \overline{w\theta} \right] \\ \overline{v^2} &= \frac{q^3}{3} + \frac{l_1}{q} \cdot \left[+2\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} - 4\overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} - 2\frac{g}{\Theta} \overline{w\theta} \right] \\ \overline{w^2} &= \frac{q^3}{3} + \frac{l_1}{q} \cdot \left[+2\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + 2\overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} + 4\frac{g}{\Theta} \overline{w\theta} \right]\end{aligned}\quad [4.87c]$$

$$\overline{\theta^2} = -\frac{\Lambda_2}{q} \cdot \overline{w\theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial z} \quad [4.87d]$$

$$\begin{aligned}-\overline{uv} &= \frac{3l_1}{q} \cdot \left[\overline{uw} \frac{\partial V}{\partial z} + \overline{vw} \frac{\partial U}{\partial z} \right] \\ -\overline{uw} &= \frac{3l_1}{q} \cdot \left[\left(\overline{w^2} - C_1 q^2 \right) \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{g}{\Theta} \overline{u\theta} \right] \\ -\overline{vw} &= \frac{3l_1}{q} \cdot \left[\left(\overline{w^2} - C_1 q^2 \right) \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{g}{\Theta} \overline{v\theta} \right]\end{aligned}\quad [4.87e]$$

$$\begin{aligned}-\overline{u\theta} &= \frac{3l_2}{q} \cdot \left[\overline{uw} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \overline{w\theta} \frac{\partial U}{\partial z} \right] \\ -\overline{v\theta} &= \frac{3l_2}{q} \cdot \left[\overline{vw} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \overline{w\theta} \frac{\partial V}{\partial z} \right] \\ -\overline{w\theta} &= \frac{3l_2}{q} \cdot \left[\overline{w^2} \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{g}{\Theta} \overline{\theta^2} \right]\end{aligned}\quad [4.87f]$$

- per la varianza del rapporto di mescolanza del vapor d'acqua e per i relativi flussi turbolenti valgono le analoghe relazioni ottenute per la temperatura potenziale virtuale;
- uno dei risultati ottenuti da questo insieme di semplificazioni è che ora è possibile individuare per i flussi turbolenti una relazione *formalmente* simile a quelle della chiusura K , cioè una relazione di proporzionalità con il gradiente verticale delle componenti medie orizzontali del moto e della temperatura potenziale virtuale:

$$\begin{aligned}\overline{uw} &= -K_m \frac{\partial U}{\partial z} \\ \overline{vw} &= -K_m \frac{\partial V}{\partial z} \\ \overline{w\theta} &= -K_h \frac{\partial \Theta}{\partial z}\end{aligned}\quad [4.88a]$$

- i coefficienti di diffusività K_m e K_h ora dipendono dalla turbolenza presente nel *PBL*, cioè da q e la una *lunghezza caratteristica di scala* l . Le espressioni dei due coefficienti di diffusività turbolenta sono:

$$\begin{aligned}K_m &= lq \cdot S_M \\ K_h &= lq \cdot S_h\end{aligned}\quad [4.88b]$$

dove S_M e S_h sono funzioni che modificano la lunghezza di scala l per tener conto dello *shear* del vento e della *buoyancy*.

Anche se formalmente il modello di chiusura di Livello 2.5 sarebbe completo, restano da definire numerosi *dettagli*.

In primo luogo, è necessario dare una forma funzionale alle funzioni S_M e S_h . Se si definiscono i due *termini di produzione di turbolenza* meccanica G_M e convettiva G_h nel modo seguente:

$$G_M = \frac{l^2}{q^2} \cdot \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \quad [4.88c]$$

$$G_M = \frac{l^2}{q^2} \cdot \frac{g}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

le funzioni S_M e S_h sono date implicitamente dal sistema di equazioni:

$$S_M (6A_1 A_2 G_M) + S_h (1 - 3A_2 B_2 G_h - 12A_1 A_2 G_h) = A_2 \quad [4.88d]$$

$$S_M (1 + 6A_1^2 G_M - 9A_1 A_2 G_h) - S_h (12A_1^2 G_h + 9A_1 A_2 G_h) = A_1 (1 - 3C_1)$$

Ponendo per semplicità di scrittura:

$$a_1 = 6A_1 A_2 G_M \quad a_2 = 1 - 3A_2 B_2 G_h - 12A_1 A_2 G_h \quad a_3 = A_2$$

$$b_1 = 1 + 6A_1^2 G_M - 9A_1 A_2 G_h \quad b_2 = 12A_1^2 G_h + 9A_1 A_2 G_h \quad b_3 = A_1 (1 - 3C_1)$$

il sistema (4.88d) può essere risolto ottenendo i risultati seguenti:

$$S_M = \frac{a_3 b_2 + a_2 b_3}{a_1 b_2 + a_2 b_1} \quad [4.88e]$$

$$S_h = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_1 b_2 + a_2 b_1}$$

Per evitare situazioni fisicamente non realistiche che potessero verificarsi, è necessario porre alcuni vincoli. Seguendo Hassid e Galperin (1984), se si definiscono le due quantità:

$$\Phi = \frac{3l^2 A_2}{q^2} \cdot \frac{g}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial z}; \quad \Xi = 6 \left(\frac{A_1 l}{q} \right)^2 \cdot \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \quad [4.89a]$$

perché non si cada in situazioni non realistiche è necessario che:

$$\Phi \geq -1/(6A_1 + B_2); \quad \Xi \leq \frac{1 + (7A_1 + B_2)\Phi + 3(4A_1 + B_2)A_1\Phi^2}{1 + (B_2 - 3A_2)\Phi} \quad [4.89b]$$

Per comodità di utilizzo di questi vincoli, qui di seguito si presenta la formulazione dei coefficienti di diffusività turbolenta (4.88b) espressi in termini di Φ e Ξ , del tutto equivalenti a quanto espresso in forma diversa in precedenza:

$$K_m = \frac{A_1 q l \cdot \{1 - 3C_1 + [B_2(1 - 3C_1) - 12A_1 C_1 - 3A_2]\Phi\}}{1 + (7A_1 + B_2)\Phi + 3A_1(4A_1 + B_2)\Phi^2 + \Xi[1 + (B_2 - 3A_2)\Phi]} \quad [4.89c]$$

$$K_h = \frac{A_2 q l (1 + 3A_1\Phi + 3C_1\Xi)}{1 + (7A_1 + B_2)\Phi + 3A_1(4A_1 + B_2)\Phi^2 + \Xi[1 + (B_2 - 3A_2)\Phi]} \quad [4.89d]$$

Nelle relazioni precedenti sono state introdotte 5 lunghezze di scala diverse. Di tutte queste lunghezze di scala, l è la *lunghezza di scala principale (master length scale)*, mentre tutte le altre sono ad essa proporzionali. In particolare, le relazioni tra le diverse lunghezze di scala sono:

$$(l_1, l_2, \Lambda_1, \Lambda_2) = (A_1, A_2, B_1, B_2) \cdot l \quad [4.90]$$

La lunghezza di scala principale

Il ruolo prioritario che la lunghezza di scala l gioca in questa chiusura e in tutte le altre della famiglia è evidente e molto è stato fatto negli ultimi 30 anni per la sua modellizzazione e, per sopperire alla cronica mancanza di dati sperimentali con cui verificare le varie teorie proposte, sono state impiegate anche simulazioni numeriche dettagliate ottenute impiegando modelli *LES*.

Il problema che sta alla base della determinazione di l è il fatto che questa lunghezza di scala la impieghiamo nelle varie parti dell'atmosfera, sia entro il *SL*, sia nel *PBL*, sia al di sopra e sia il *SL* che il *PBL* possono essere in condizioni sia stabili che convettive. Per tener conto di ciò, possiamo operare in vari modi. Inizialmente presentiamo la teoria proposta da Nakanishi (2001) e da Suseelj e Sood (2010).

Entro il *SL*, l dipenderà sia dalla quota z dalla superficie che dalle condizioni di stabilità che possiamo sintetizzare le rapporto adimensionale $\zeta = z/L$, dove L è la lunghezza di Monin-Obukhov. Se definiamo una lunghezza di scala l_s funzione di questi parametri, otteniamo che:

$$l = l_s = \begin{cases} kz/3.7 & \zeta \geq 1 \\ kz \cdot (1 + 2.7\zeta)^{-1} & 0 \leq \zeta < 1 \\ kz & \zeta = 0 \\ kz \cdot (1 - 100\zeta)^{0.2} & \zeta < 0 \end{cases} \quad [4.91a]$$

Lontano dal *SL* possiamo individuare due lunghezze di scala differenti, la prima l_T associata allo stato generale di turbolenza dell'atmosfera e la seconda l_B associata alla buoyancy, il cui ruolo è quello di vincolare l in un'atmosfera staticamente stabile, specialmente nella parte alta del *PBL*. Mentre la prima lunghezza di scala è intimamente legata all'energia cinetica turbolenta, cioè a q , la seconda è legata sia alla frequenza di Brunt-Vaisala N che al flusso turbolento di calore sensibile al suolo. In pratica si ha che:

$$l_T = 0.23 \frac{\int_0^{\infty} qz \cdot dz}{\int_0^{\infty} q \cdot dz} \quad [4.91b]$$

Nella pratica, l'estremo superiore dei due integrali può essere limitato alla quota z_1 cui corrisponde la sommità del *PBL*. Se definiamo poi una *velocità verticale di scala* q_c come:

$$q_c = \left(\frac{g}{\Theta_0} \overline{w\theta_0} \cdot l_T \right)^{1/3} \quad [4.91c]$$

la lunghezza di scala l_B può essere data dalla relazione seguente:

$$l_B = \begin{cases} a_2 q/N & \partial\Theta/\partial z > 0 \quad \text{e} \quad \zeta \geq 0 \\ \left[a_2 q + a_3 q \cdot \sqrt{(q_c/l_T N)/N} \right] & \partial\Theta/\partial z > 0 \quad \text{e} \quad \zeta < 0 \\ \infty & \partial\Theta/\partial z \leq 0 \end{cases} \quad [4.91d]$$

in cui le costanti a_2 e a_3 valgono rispettivamente 1 e 5. A seconda delle varie condizioni in cui si trova l'atmosfera alla quota z (fuori dal *SL*), la lunghezza principale di scala l dipenderà più o meno da l_s , l_T e l_B : per tener conto di ciò si è proposto che:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_s} + \frac{1}{l_T} + \frac{1}{l_B} \quad [4.91e]$$

Questo è il modo di procedere adottato oggi nei principali modelli meteorologici in cui viene usata la Chiusura 2.5 di Mellor-Yamada (per esempio il modello WRF). In precedenza è stata impiegata una parametrizzazione diagnostica proposta da Sun e Ogura (1980) secondo cui:

$$l = \begin{cases} l_u & \text{se } \frac{\partial \Theta}{\partial z} \leq 0 \\ \frac{1}{l_u^{-1} + l_s^{-1}} & \text{se } \frac{\partial \Theta}{\partial z} > 0 \end{cases} \quad [4.92a]$$

Se k è la costante di Von Karman e z_i l'altezza del PBL, la lunghezza di scala l_u è data da:

$$l_u = kz / (1 + kz / l_0) \quad [4.92b]$$

dove

$$l_0 = 0.1S_1 \frac{\int_0^\infty E^{1/2} z \cdot dz}{\int_0^\infty E^{1/2} dz} \quad S_1 = \begin{cases} 0.75 + 1.25 \cdot z / z_i & \text{se } z < z_i \\ 2 & \text{se } z \geq z_i \end{cases} \quad [4.92c]$$

Per la lunghezza l_s , è stata proposta la relazione seguente:

$$l_s = \sqrt{2q^2 / \left(\frac{g}{\Theta} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} \right)} \quad [4.92d]$$

Entrambi questi modi di procedere prevedono una stima diagnostico della lunghezza di scala l , tuttavia in Mellor e Yamada (1982) si è proposta una strada alternativa del tutto prognostica. Senza entrare nei dettagli, il modello di Livello 2.5 si arricchisce di una nuova equazione differenziale alle derivate parziali per la variabile $q^2 l$. Tale relazione risulta espressa nel modo seguente (Weng e Taylor, 2003):

$$\frac{\partial q^2 l}{\partial t} = E_1 \left(-uw \frac{\partial U}{\partial z} - vw \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{g}{\Theta} w \theta \right) - \frac{q^3}{B_1} \left[1 + E_2 \left(\frac{l}{l_R} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(l q S_l \frac{\partial q^2 l}{\partial z} \right) \quad [4.93]$$

in cui la lunghezza di scala l_R è pari a kz . Nonostante l'introduzione di questa nuova equazione costituisca, almeno in teoria, un miglioramento nella descrizione fisica della lunghezza di scala l , nella pratica tuttavia si sono riscontrati numerosi problemi pratici nel suo utilizzo, facendo di fatto preferire la formulazione diagnostica.

Le costanti numeriche

Le costanti presenti in tutte queste relazioni sono state ottenute dal confronto con i dati sperimentali disponibili e con simulazioni LS. Nei vari lavori presentati dai vari Autori esiste una certa differenza nei valori numerici attribuiti alle varie costanti numeriche presenti nelle relazioni del modello. L'insieme di valori attualmente attribuito più comunemente ad esse è:

$$(A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, E_1, E_2, S_l) = (0.92, 0.74, 16.6, 10.1, 0.08, 1.8, 1.33, 0.2) \quad [4.90b]$$

Condizioni al contorno

Restano solo da porre le condizioni al contorno dell'equazione dell'energia cinetica turbolenta e della lunghezza di scala l . La disponibilità dei profili verticali delle componenti cartesiane medie del moto consente di calcolare direttamente il valore alla sommità del dominio di calcolo. Per quanto riguarda, invece, la condizione al contorno inferiore, essa darà da data da:

$$\begin{aligned} q_0^2 &= B_1^{2/3} u_*^2 \\ q_0^2 l &= 0 \end{aligned} \quad [4.91e]$$

Una volta noto il profilo verticale della lunghezza di scala l , dei coefficienti di diffusione turbolenta K_m e K_h e di q^2 , risulta possibile, mediante le (4.87c, d, e, f) ottenere il profilo verticale di tutti i momenti del secondo ordine.

Chiusura di Livello 2

Il Livello 2 è la forma più semplificata di chiusura di questa famiglia. Essa parte dall'ipotesi che nell'equazione prognostica dell'energia cinetica turbolenta, nella forma del *livello 2.5*, i termini di *produzione* (il termine meccanico, proporzionale allo *shear* del vento ed il termine convettivo) bilancino *completamente* il termine dissipativo. In questo caso si può sostituire l'equazione prognostica per E con una sua approssimazione algebrica e ciò porta ad una semplificazione generale del problema. In effetti ciò significa che, introducendo questa drastica approssimazione, si ha:

$$-\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{g}{\Theta} \overline{w\theta} - \varepsilon = 0 \quad [4.92a]$$

che, ricordando la definizione di Numero di Richardson flusso R_f , diventa:

$$\left(-\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \cdot (1 - R_f) = \varepsilon \quad [4.92b]$$

Utilizzando le (4.87e) per esprimere i flussi turbolenti, la (4.87b) per sostituire al tasso di dissipazione di energia cinetica turbolenta una parametrizzazione dipendente da q , si ottiene la versione algebrica dell'equazione per l'energia cinetica turbolenta (o meglio per q^2) data da:

$$q^2 = l^2 B_1 S_M \left(\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right) \cdot (1 - R_f) \quad [4.92c]$$

da cui si ottiene immediatamente q^2 una volta noto R_f , l ed i gradienti verticali delle componenti orizzontali medie del moto.

Dato che la conoscenza dei profili verticali medi delle componenti orizzontali del moto e della temperatura potenziale virtuale consentono di calcolare facilmente il *Gradiente Number* R_i , è necessaria una relazione tra i due parametri di stabilità R_i e R_f , scritta nel contesto delle parametrizzazioni fatte al *Livello 2.5*. Tale relazione risulta data da (Yamada, 1975):

$$R_f = \frac{1}{2} \frac{A_2 E_5}{A_1 E_4} \left\{ R_i + \frac{A_1 E_3}{A_2 E_5} - \left[R_i^2 + 2 \frac{A_1}{A_2} \frac{E_3 E_5 - 2 E_1 E_4}{E_5^2} R_i + \left(\frac{A_1 E_3}{A_2 E_5} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad [4.93a]$$

dove:

$$\begin{aligned} E_1 &= B_1 - 6A_1 \\ E_2 &= B_1 + 12A_1 + 3B_2 \\ E_3 &= B_1(1 - 3c) - 6A_1 \\ E_4 &= B_1(1 - 3c) + 12A_1 + 9A_2 \\ E_5 &= B_1 + 3A_1 + 3B_2 \end{aligned}$$

che, una volta introdotti i valori numerici appropriati per le varie costanti, diventa:

$$R_f = 0.659 \left\{ R_i + 0.178 - \left[R_i^2 + 0.322R_i + 0.0316^2 \right]^{1/2} \right\} \quad [4.93b]$$

Nota quindi R_f , il problema si sposta all'individuazione delle espressioni per K_m e K_h . Anche in questo caso valgono le (4.87e) in cui sono presenti le due funzioni S_M e S_H . Per quanto riguarda la prima delle due funzioni si ha che:

$$S_M = C_M \frac{(R_{fc} - R_f) \cdot (R_{f1} - R_f)}{(1 - R_f) \cdot (R_{f2} - R_f)} \quad [4.94a]$$

dove il *Critical Richardson Number* R_{fc} e gli altri parametri sono definiti come:

$$R_{fc} = E_1/E_2 \quad R_{f1} = E_3/E_4 \quad R_{f2} = E_1/E_5 \quad [4.94b]$$

$$C_M = \frac{A_1}{B_1} \frac{E_2 E_4}{E_5}$$

Per quanto riguarda, invece, la quantità S_H la relazione che la esprime è:

$$S_H = C_H \frac{R_{fc} - R_f}{1 - R_f} \quad [4.94c]$$

dove:

$$C_H = \frac{A_2}{B_1} E_2 \quad [4.94d]$$

Dal punto di vista pratico, una volta noto il profilo verticale di U , V e Θ , per ottenere q^2 si può procedere impiegando il seguente metodo iterativo:

1. si inizializza la lunghezza di scala l con una semplice funzione dell'altezza come indicato in precedenza;
2. si calcola il profilo di R_i e di R_f con la (4.93b);
3. si calcola q^2 con la (4.92c);
4. si ricalcola;
5. ci cicla il processo fino a quando non si notano più variazioni significative nel profilo della lunghezza di scala l .

A questo punto, noto q^2 ed i coefficienti di diffusione turbolenta, risulta immediato con le (4.87) ottenere il profilo di tutti i momenti del secondo ordine.

Per concludere, nel contesto del *Livello 2* è utile ottenere anche il profilo del tasso di dissipazione di energia cinetica turbolenta ε . Seguendo Enger (1990), essa risulta espressa come:

$$\varepsilon = \frac{q^3}{B_3 \lambda} \quad [4.95a]$$

dove B_3 è pari a 27 e la lunghezza di scala λ dipende dalla stabilità e dalla quota z nel modo seguente:

- nelle situazioni convettive e nel *SL* quando $z \leq 0.1 z_i$ (L è la lunghezza di Monin-Obukhov):

$$\lambda = \frac{kz}{B_3} \left[\frac{2(7 + 0.52 z_i/|L|)^{2/3} + 1.7(1 + 3 z/|L|)^{2/3}}{1 + 0.5 z/|L|} \right] \quad [4.95b]$$

- nelle situazioni convettive quando $0.1z_i \leq z \leq 1.1z_i$:

$$\lambda = \frac{(0.75 + 1.75 \cdot (z/z_i)^{2/3} - 1.65 \cdot (z/z_i)^{4/3})^{3/2} z_i}{B_1 (0.55 \cdot (z/z_i)^{-1/3} - 0.3)} \quad [4.95c]$$

- quando $z > 1.1z_i$ e nelle situazioni stabili:

$$\lambda = \min \left[\lambda(z = 1.1z_i); 0.5 \cdot \left[q^2 / \left(\frac{g}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) \right]^{1/2} \right] \quad [4.95d]$$

Osservazioni conclusive

I modelli meteorologici che utilizzano chiusure del tipo Mellor-Yamada sono ormai numerosissimi, specialmente quelli che usano la chiusura di Livello 2.5. In tutti questi anni (ormai più di 30) molti ricercatori hanno continuamente perfezionato queste chiusure, soprattutto nel renderle sempre più immuni da situazioni meteorologiche *patologiche*. E' impossibile elencare la vastissima Bibliografia in merito e qui di seguito daremo solo alcune indicazioni che ci paiono importanti e che abbiamo utilizzato per questa presentazione.

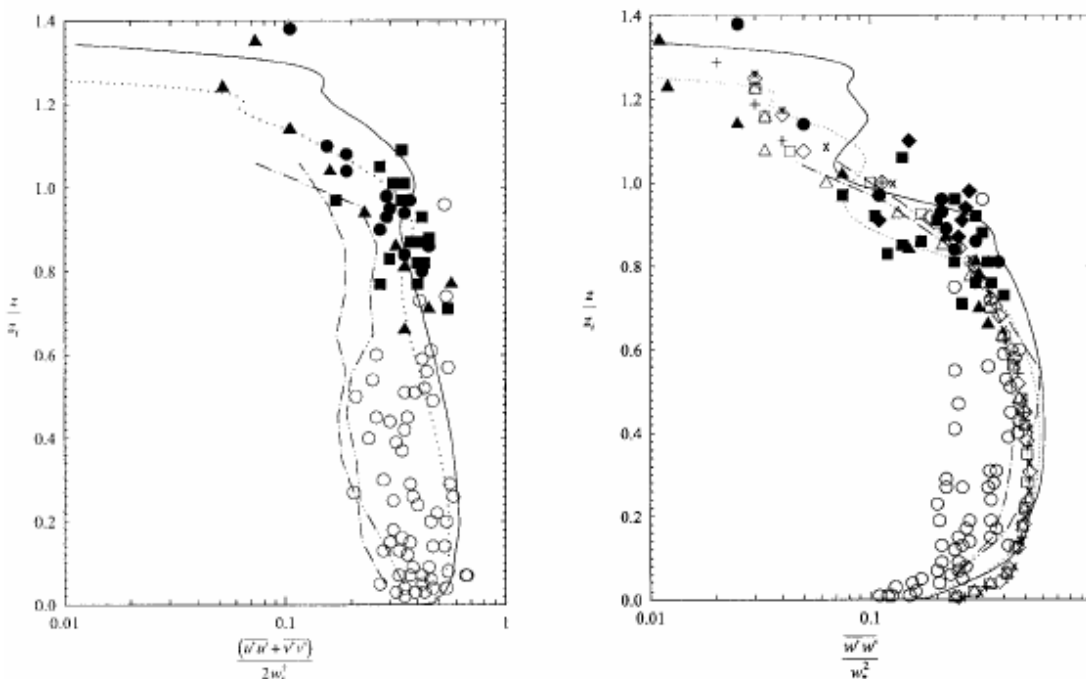


Fig. 4.11: confronto tra dati sperimentali e simulazioni realizzate con chiusura di Livello 2.5. A sinistra: componente orizzontale dell'energia cinetica turbolenta. A destra: componente verticale dell'energia cinetica turbolenta (Liu e Leung, 2001)

I dettagli relativi alle relazioni dei vari livelli di chiusura e alla loro derivazione si è fatto riferimento a Mellor Yamada (1974), Yamada (1975), Yamada (1979), Mellor e Yamada (1982), Hassid e Galperin (1984) e Sun e Ogura (1980).

Tra le molteplici applicazioni del metodo di chiusura, qui si citano solo pochi riferimenti ed in

particolare: Mellor (1973), Mellor e Yamada (1975), Yamada (1977), Yamada (1979), Yamada (1983), Yamada e Bunker (1988), Yamada e Bunker (1989), Yamazawa (1989) e Foster e Brown (1994). Queste sono solo poche citazioni bibliografiche di un metodo di chiusura tra i più usati nel mondo, soprattutto nei modelli a mesoscala dedicati alle previsioni meteorologiche ed alla simulazione della dispersione degli inquinanti in aria.

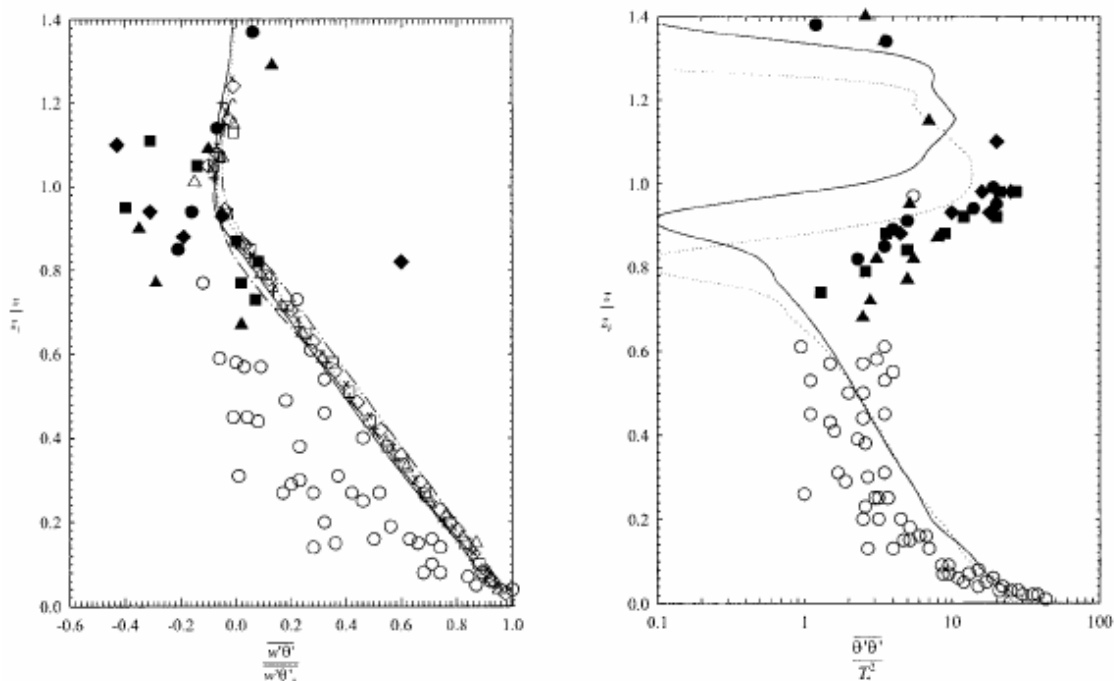


Fig. 4.12: confronto tra dati sperimentali e simulazioni realizzate con chiusura di Livello 2.5. A sinistra: flusso di calore turbolento. A destra: varianza della temperatura potenziale (Liu e Leung, 2001)

Per concludere è interessante mostrare quanto siano accurati i modelli dotati di chiusure di questo tipo. La Letteratura presenta un'infinità di lavori sul tema ma, semplicemente per dare un'idea quantitativa, è interessante vedere le Figg. 4.11 e 4.12 in cui sono confrontati i dati sperimentali disponibili con le simulazione di un modello con chiusura Mellor-Yamada 2.5 in situazioni convettive. Dalle figure si vede come siano ben rappresentate dal modello sia la componente orizzontale e verticale dell'energia cinetica turbolenta, che il profilo verticale del flusso turbolento di calore sensibile e della temperatura potenziale.

4.5.4.2 La chiusura $k-\varepsilon$

Un approccio alternativo alla famiglia di chiusura alla Mellor-Yamada, è costituito da una chiusura che vede presente sia l'equazione prognostica per l'energia cinetica turbolenta che un'equazione, sempre prognostica, per la sua dissipazione. Pur essendo questo tipo di chiusura uno standard nei calcoli fluidodinamici di interesse ingegneristico, non è molto impiegata nei modelli meteorologici. Essa prende il nome di *Chiusura $k-\varepsilon$* (Etling, 1996) e, limitando al minimo le complicazioni formali, può essere illustrata facilmente nel caso monodimensionale. Nell'esposizione successiva faremo riferimento al lavoro di Duykerke (1988).

Il modello monodimensionale che adotti questo tipo di chiusura è costituito:

- dalle equazioni relative alle variabili medie, cioè delle due componenti del vento e della temperatura potenziale virtuale. Anche in questo caso supporremo valida l'ipotesi di incomprimibilità dell'atmosfera e trascureremo la presenza esplicita di vapor d'acqua nell'aria. Tali equazioni, indicando con U_g e V_g le componenti del vento geostrofico,

sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z} \overline{uw} + f(U - U_g) \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z} \overline{vw} - f(U - U_g) \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z} \overline{w\theta}\end{aligned}\quad [4.96a]$$

- dalle espressioni che descrivono i momenti secondi presenti nelle equazioni precedenti. Tali espressioni mettono in relazione i momenti secondi verticali di una variabile con il gradiente verticale del rispettivo valor medio:

$$\begin{aligned}-\overline{uw} &= K \frac{\partial U}{\partial z} \\ -\overline{vw} &= K \frac{\partial V}{\partial z} \\ -\overline{w\theta} &= K \frac{\partial \Theta}{\partial z}\end{aligned}\quad [4.96b]$$

- dal coefficiente di diffusione K che è legato all'energia cinetica turbolenta E ed alla sua dissipazione ε dalla relazione di chiusura (c_μ è una costante pari a 0.033):

$$K = c_\mu E^2 / \varepsilon \quad [4.96c]$$

- dall'equazione prognostica relativa all'energia cinetica turbolenta E che, nel caso monodimensionale risulta pari a:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \underbrace{-\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z}}_S + \underbrace{\frac{g}{\Theta_0} \overline{w\theta}}_B - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{wE'} + \frac{\overline{pw}}{\rho} \right)}_T - \varepsilon \quad [4.97a]$$

Come si vede, sono stati evidenziati nel membro di destra sia la componente di produzione meccanica (S) che quella di buoyancy (B). Il quarto termine (T) può essere parametrizzato in termini di gradiente verticale di energia cinetica turbolenta nel modo seguente:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{wE'} + \frac{\overline{pw}}{\rho} \right) = \frac{K}{\sigma_E} \cdot \frac{\partial E}{\partial z} \quad [4.97b]$$

dove σ_E è una costante numerica prossima a 1.

- dall'equazione prognostica per ε che presenta una forma altamente parametrizzata e può essere così espressa:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w\varepsilon}}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{E} (c_{1\varepsilon} P - c_{2\varepsilon} \varepsilon) \quad [4.98a]$$

In questa equazione è presente il termine P che rappresenta la produzione di energia cinetica turbolenta e due coefficienti numerici $c_{1\varepsilon}$ e $c_{2\varepsilon}$ rispettivamente pari a 1.46 e 1.83. Per quanto riguarda il termine P , facendo riferimento ai termini evidenziati nella (4.97a), si è giunti alla conclusione che:

$$P = S + \max(0, B) + \max(0, T) \quad [4.98b]$$

Il primo termine a destra della relazione (4.98a) è un momento di ordine superiore a due

e quindi deve essere parametrizzato. La parametrizzazione adottata fa sì che il flusso turbolento verticale di ε sia proporzionale al rispettivo gradiente verticale ed il coefficiente di proporzionalità è ancora K ; tale parametrizzazione può essere così espressa:

$$-\overline{w\varepsilon} = \frac{K}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \quad [4.98c]$$

dove σ_ε è una costante numerica pari a 2.38.

Anche se all'apparenza questo schema di chiusura pare molto accurato, tuttavia si può vedere facilmente come la sua complessità computazionale sia almeno dello stesso ordine di grandezza di quella del Livello 3 di Mellor-Yamada e le sue prestazioni, per ora, non sembrano all'altezza delle aspettative.

4.5.4.3 Osservazioni

Le chiusure di ordine uno e un mezzo e due sono state molto utilizzate negli ultimi 30 anni con buoni risultati, soprattutto la chiusura Mellor-Yamada di Livello 2.5. Dal confronto tra le simulazioni fatte e le misure sperimentali disponibili si può concludere che:

- questi schemi creano una situazione di rimescolamento durante le ore diurne, cosa che non avveniva con i modelli con chiusura del primo ordine;
- durante le ore notturne tali modelli ricostruiscono, concordemente con le misure sperimentali, un jet di vento a bassa quota;
- l'intensità della turbolenza sale a valori elevati durante le ore diurne per poi ridimensionarsi drasticamente nelle ore notturne.

Tutto ciò porta a dire che questi tipi di chiusura forniscono previsioni decisamente più realistiche rispetto alle chiusure del primo ordine. Va sottolineato però il fatto che, essendo aumentato il numero di equazioni, la risoluzione numerica del sistema risulta piuttosto complessa. Tuttavia, viste la realistica richiesta ai modelli di previsione meteorologica ad area limitata ed ai modelli che preparano i campi meteorologici e di turbolenza per la simulazione della dispersione degli inquinanti in aria, questi schemi di chiusura diventano decisivi ed irrinunciabili anche a costo di notevoli appesantimenti dei tempi di calcolo.

4.5.5 LE CHIUSURE LOCALI DI ORDINE SUPERIORE

Lo sviluppo di chiusure di ordine più elevato è andato al passo con l'evoluzione dei supercomputer. La motivazione del loro sviluppo è stata la ricerca di un maggior realismo nelle previsioni della turbolenza atmosferica, specialmente in situazioni di elevata convettività. Come si è visto, dalle equazioni di bilancio relative ai valori istantanei delle varie grandezze meteorologiche non solo è possibile dedurre analoghe equazioni per i rispettivi valori medi, ma anche equazioni che descrivono il comportamento dinamico delle fluttuazioni e dei momenti di ordine superiore. E' quindi pensabile costruire un modello di *PBL* costituito non solo dalle equazioni prognostiche per i valori medi, ma anche da equazioni prognostiche per i momenti di ordine superiore (anche superiori al secondo). Ciò è stato effettivamente fatto, ottenendo però modelli molto complessi, usati solo per scopi di ricerca. Oltre alle difficoltà formali che tali modelli presentano (il numero di equazioni e di variabili cresce vertiginosamente), esiste il problema di dover parametrizzare i momenti di ordine superiore al secondo, problema acuito dal fatto che in termini sperimentali è molto difficile disporre di misure sufficientemente precise dei momenti di ordine superiore. In letteratura sono stati proposti alcuni modelli di *PBL* con chiusura del secondo ordine e superiori. Si veda per esempio Etling (1996 e Enger (1986). Va tuttavia ribadito che tali modelli costituiscono più dei *tools* di ricerca di base che strumenti effettivamente operativi in pratica.

4.6 METODI DI CHIUSURA NON LOCALE

A differenza della chiusura locale che vede i flussi turbolenti proporzionali alle *proprietà locali* del moto del fluido, la *chiusura non locale* è basata sul concetto che tutti i vortici turbolenti possono trasportare porzioni di fluido (e quindi loro proprietà) per distanze finite. In sostanza, questo tipo di chiusura *ipotizza che la turbolenza abbia prevalentemente una natura avveviva e non diffusiva*, cosa che, del resto, emerge nelle situazioni convettive dai dati ottenuti sperimentalmente in campo (pochi), dalle simulazioni fisiche in laboratorio (Willis e Deardorff 1974, 1976, 1978, 1981) e dalle simulazioni con modelli LES (Ebert e al, 1989).

Si consideri, per esempio, l'equazione di conservazione di una data variabile meteorologica S (uno scalare o una componente della quantità di moto) e si ipotizzi che sia applicabile l'ipotesi di Reynolds, secondo cui il suo valore istantaneo, ottenibile come sovrapposizione di un valor medio e di una fluttuazione, ubbidisca all'equazione:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u_j \frac{\partial S}{\partial x_j} = \dots + \nu \frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2} \quad [4.99a]$$

mentre per la componente media valga l'equazione di conservazione:

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_j} = - \frac{\partial \overline{u_j' S'}}{\partial x_j} + \dots + \text{infinitesimi} \quad [4.99b]$$

Nella seconda relazione:

- il primo termine di sinistra rappresenta il tasso di variazione nel tempo del valor medio di S ,
- il secondo termine di sinistra l'avvezione dovuta al vento medio,
- il primo termine di destra la divergenza del flusso turbolento.

La divergenza del flusso turbolento, come è noto, deriva dal termine avvevivo e dall'ipotesi di Reynolds ed il problema sta nell'individuare un modello conveniente di parametrizzazione di tale termine. Mentre la chiusura locale del primo ordine, di fatto, tenta di parametrizzarlo in modo diffusivo, assimilandolo quindi alla diffusione molecolare, una modellizzazione ai limiti delle possibilità degli attuali strumenti di calcolo (per esempio i modelli *LES* o la risoluzione diretta delle equazioni istantanee) evidenzia che diminuendo le dimensioni della griglia di calcolo ed il *time step*, quello che sembrava essere un fenomeno di tipo diffusivo diventa progressivamente e sempre più chiaramente un processo avvevivo. Si potrebbe pensare che ciò derivi esclusivamente dalle procedure di calcolo, anche se molto sofisticate, tuttavia ci sono molte evidenze della presenza in atmosfera (soprattutto nelle situazioni convettive) di strutture turbolente coerenti e di grandi vortici. Esempi di ciò sono i *thermals* che si originano alla superficie, ben visibili nel facsimile *SODAR*, il looping dei pennacchi delle ciminiere ed altri fenomeni ancora. Tali vortici, o meglio tali strutture coerenti, sono presenti massicciamente durante le situazioni convettive e sono le responsabili dell'apporto sistematico e continuo di energia cinetica turbolenta al sistema *PBL*. Analizzando lo spettro dell'energia cinetica turbolenta, è evidente come in tali strutture sia concentrata la maggior parte di energia cinetica turbolenta e come la loro dimensione sia paragonabile a quella del *PBL* stesso. I modelli di chiusura non locale che presenteremo cercano di modellizzare soprattutto questa tipologia di fenomeni.

4.6.1 LE BASI LOGICHE DI UNA CHIUSURA NON LOCALE

Per poter rappresentare l'effetto della dinamica delle strutture coerenti di un *PBL* convettivo nell'ambito di una chiusura locale è stato necessario aumentare l'ordine della chiusura stessa inserendo nel modello almeno tutti i momenti del secondo ordine e possibilmente momenti di or-

dine superiore (Stull, 1988). Il risultato di tutto ciò è stato un modello fluidodinamico estremamente complesso, la cui implementazione numerica richiede, per la descrizione di situazioni reali, tempi di calcolo eccessivi. A fronte di ciò, è stata esplorata una possibilità alternativa che in qualche modo era già apparsa in alcuni lavori teorici presentati in Letteratura. L'*idea chiave* di ciò era quella di *abbandonare il concetto di proporzionalità tra un flusso turbolento e le proprietà che il moto dell'aria presentava localmente* e di ritenere invece che un flusso turbolento in un dato punto dello spazio fosse il risultato congiunto di azioni la cui sede operativa era, di fatto, tutto il *PBL*. Questi concetti hanno avuto inizialmente una serie di sviluppi sfociati in attività teoriche di ricerca, come si può vedere in Stull (1984, Stull e Hasegawa, 1984 e Stull 1986), tutti poco operativi soprattutto perché si cercavano soluzioni nel continuo, abituati a ciò dalla consuetudine operativa adottata nelle chiusure locali. La soluzione operativa è apparsa chiara e semplice appena si è discretizzato il problema, cosa che comunque era inevitabile fare risolvendo numericamente le equazioni fluidodinamiche.

Anche se è possibile affrontare il problema tridimensionale, è conveniente, per semplicità espositiva, considerare esclusivamente la *diffusione turbolenta verticale* di una grandezza q (temperatura potenziale, concentrazione di un inquinante, quantità di moto, ecc.). Innanzitutto con q si intende qui il valore medio di una generica grandezza, mentre con q' la sua fluttuazione turbolenta.

Il dominio di indagine e di calcolo (che in questo caso coincidono) è, quindi, *monodimensionale* e costituito, come mostrato in *Fig.4.13*, da una colonna d'aria con base unitaria, che si estende dal suolo fino alla sommità del dominio di calcolo (quota sicuramente superiore alla sommità del *PBL*). Questa colonna viene poi suddivisa in N *celle elementari* che, per semplicità operativa, riteniamo tutte identiche. Esse hanno quindi una base unitaria ed un'altezza pari a Δz . Al centro di ogni cella viene definito il valor medio delle varie grandezze q e quindi il profilo verticale di q non risulta più una funzione continua, ma una serie discreta di valori q_j , $j=1,2,\dots,N$, ciascuno relativo alle quote $z_j = \Delta z/2 + (j-1)\Delta z$.

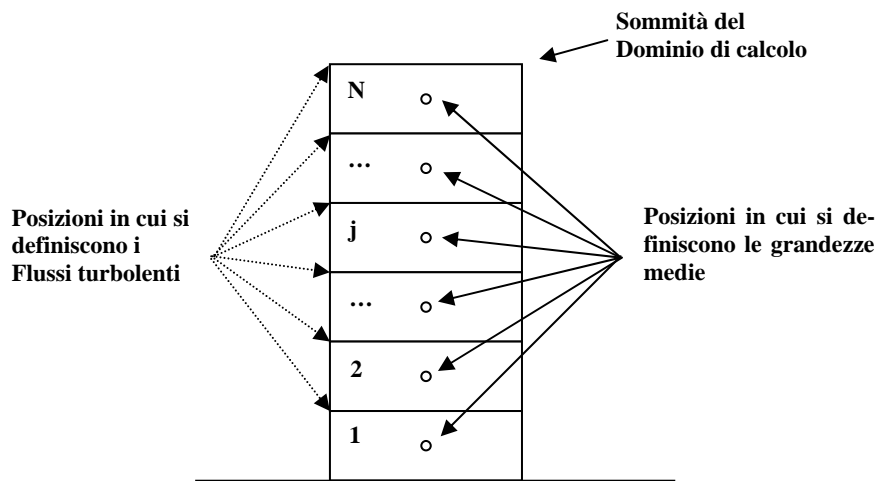


Fig.4.13: dominio monodimensionale e griglia di calcolo per una chiusura non locale

Il flusso turbolento di q è più logico che venga rappresentato da uno scambio di proprietà fisiche tra una e cella e l'altra e che, quindi, sia relativo al piano orizzontale che separa una cella j da quella immediatamente sovrastante $j+1$. Pertanto, il flusso verticale turbolento di q sarà relativo ai vari livelli j localizzati alle quote $z_j = j \cdot \Delta z$, $j = 1, 2, \dots, N$. In pratica, anticipando quanto verrà detto in un Capitolo successivo, si è adottata una *griglia di calcolo sfalsata (staggered grid)*.

Un'altra discretizzazione necessaria è quella relativa al tempo. In questo senso il fenomeno verrà seguito da un tempo t_0 ad un tempo t e l'intervallo temporale considerato verrà suddiviso in sottointervalli elementari (*time step*) uguali e di durata Δt .

L'ipotesi di base, adottata da ogni modello di chiusura non locale, è che il valore medio che una variabile di interesse assume all'istante $t+\Delta t$ in una cella j (Cella di destinazione), cioè $q_j(t+\Delta t)$, sia il risultato di una serie di *scambi fisici di materia* che provengono, a priori, da ogni altra cella della colonna e che hanno luogo nell'intervallo di tempo Δt . Ogni apporto d'aria da una cella k (Cella di provenienza) alla cella j , porta con sé l'informazione dello stato della cella k e, tra l'altro, l'informazione del valore originario del valor medio di q in quella cella. Dal *rimescolamento* di tutte queste informazioni provenienti da tutta la colonna d'aria, relative a tutte le scale possibili (la dimensione di scala massima sarà pari all'altezza dell'intera colonna), avrà origine lo stato della generica cella j al tempo $t+\Delta t$. In pratica:

$$q_j(t+\Delta t) = \sum_{k=1}^N c_{jk}(t, \Delta t) \cdot q_k(t) \quad [4.100a]$$

Di fatto, i valori assunti da q a $t+\Delta t$ nelle N celle della colonna, indicati sinteticamente dal vettore $\mathbf{q}(t+\Delta t)$ si ottengono da quelli assunti al tempo t , $\mathbf{q}(t)$ moltiplicati per la *Transilient Matrix C*, cioè:

$$\mathbf{q}(t+\Delta t) = \mathbf{C}(t, \Delta t) \cdot \mathbf{q}(t) \quad [4.100b]$$

E' opportuno fare subito alcune considerazioni di base:

1. i coefficienti c_{jk} rappresentano lo scambio di massa che ha luogo tra il tempo t ed il tempo $t+\Delta t$ dalla cella k (cella di provenienza) alla cella j (cella di destinazione). A priori il loro valore potrà variare sia con t che con Δt e quindi è opportuno ricordare tale dipendenza anche se nel seguito, per ragioni tipografiche, li si indicherà semplicemente come c_{jk} .
2. è necessario esprimere la *conservazione della massa dell'aria* in questo nuovo contesto. Essa è data, per ogni cella di destinazione j , da:

$$\sum_{k=1}^N c_{jk}(t, \Delta t) = 1 \quad [4.101a]$$

Per rendersi conto di ciò (Stull, 1984), si consideri il caso particolare di una colonna d'aria nelle cui celle il valore di q sia costante. L'unico modo per cui le (4.100) possano valere è che valga la relazione precedente.

3. è necessario esprimere la *conservazione dello stato*, per esempio la conservazione di una sostanza inquinante. Tale principio è data dalla relazione seguente:

$$\sum_{j=1}^N c_{jk}(t, \Delta t) = 1 \quad [4.101b]$$

valida per ogni cella di provenienza k . Per rendersi conto della validità di tale relazione, consideriamo una situazione in cui q sia nullo in tutte le celle tranne in una. Dopo un processo di rimescolamento durato Δt , l'aria della cella con valore non nullo di q avrà raggiunto, a priori, ogni altra cella della colonna, tuttavia la quantità complessiva di q nella colonna non potrà che essere quella iniziale se, come si è ammesso, non ci sono sorgenti di q . E ciò non potrà che richiedere la validità della relazione precedente.

Essa è rigorosamente vera solo quando l'altezza di ogni cella è uguale e vale Δz . Se l'altezza delle varie celle fosse differente e pari a Δz_j per la cella di destinazione e Δz_k per quella di provenienza, la (4.101b) si modificherebbe come:

$$\sum_{j=1}^N \frac{\Delta z_j}{\Delta z_k} c_{jk}(t, \Delta t) = 1 \quad [4.101c]$$

4. è immediato vedere come $c_{jk} = 0$ significhi che non c'è scambio d'aria tra la cella k e la cella j , mentre $c_{jk} = 1$ comporta che tutta l'aria contenuta nella cella k venisse scambiata con la cella j . I coefficienti c_{jj} sono, quindi, la frazione di massa che non abbandona la cella j .

Queste considerazioni comportano che:

- la matrice \mathbf{C} è *bistocastica*, cioè la somma degli elementi di ogni singola riga e la somma degli elementi di ogni singola colonna è sempre pari a 1;
- i coefficienti c_{jk} sono tali che $0 \leq c_{jk} \leq 1$;
- dall'algebra lineare si ha che il più grande degli autovalori $|\lambda|$ di una matrice \mathbf{C} non può eccedere nessuno dei due limiti:

$$\|\mathbf{C}\|_{\infty} = \max_i \sum_j c_{ij} \quad \|\mathbf{C}\|_1 = \max_j \sum_i c_{ij}$$

Viste le caratteristiche dei coefficienti della *Transient Matrix* risulterà che il modulo di ogni suo autovalore non potrà mai superare l'unità. Questa proprietà sarà utile in seguito per assicurare la stabilità numerica del metodo esplicito di risoluzione nel tempo della chiusura di Stull.

La matrice \mathbf{C} dipende, come si è visto, da t e da Δt e, come si nota dalle relazioni (4.100), i suoi coefficienti sono adimensionali. A volte, però, può essere opportuno definire scambi di materia da cella a cella nell'unità di tempo e ciò porta a definire una Matrice di Transizione \mathbf{M} i cui elementi m_{jk} , aventi dimensione s^{-1} , sono legati agli analoghi coefficienti c_{jk} da: $m_{jk} = c_{jk}/\Delta t$.

Consideriamo ora i flussi turbolenti. Essi, come detto, vengono definiti ad ogni quota z_j che rappresenta il confine tra la cella i e la cella $i+1$. Visto il tipo di contesto in cui operiamo, tali flussi sono turbolenti ma non locali. Un flusso F_i di q al livello $z_i = i\Delta z$ è la somma algebrica di tutti gli scambi di materia che, partendo da una cella k ed arrivando alla cella j , attraversano la quota z_i , pertanto F_i dipende solo dai vortici che hanno origine *sotto* z_i e terminano *sopra* z_i e viceversa. In Fig.4.14 è illustrato un esempio di scambio d'aria che contribuisce (negativamente) al flusso alla quota z_i . Invece, un flusso dalla cella j (indicata in figura) alla cella N o dalla cella 1 alla cella 2 non contribuisce al flusso alla quota z_i .

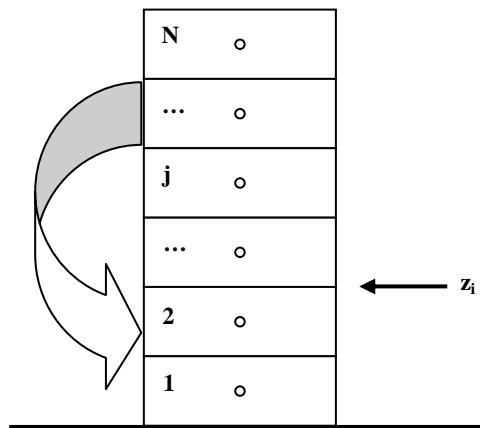


Fig.4.14: un esempio di cambio d'aria che contribuisce al flussi non locali al livello z_i

In termini matematici, si ha che:

$$F_i(t, \Delta t) = \frac{\Delta z}{\Delta t} \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^N c_{jk}(t, \Delta t) \cdot [q_j(t) - q_k(t)] \quad [4.102a]$$

E' facile dimostrare che la relazione precedente può essere riscritta in termini ricorsivi come:

$$F_i(t, \Delta t) = F_{i-1}(t, \Delta t) + \frac{\Delta z}{\Delta t} \sum_{k=1}^N c_{jk}(t, \Delta t) \cdot [q_i(t) - q_k(t)] \quad [4.102b]$$

molto comoda nella applicazioni pratiche. Tra l'altro, se ogni cella avesse altezza differente, la relazione precedente diventerebbe:

$$F_i(t, \Delta t) = F_{i-1}(t, \Delta t) + \frac{\Delta z_i}{\Delta t} \sum_{k=1}^N c_{jk}(t, \Delta t) \cdot [q_i(t) - q_k(t)] \quad [4.102c]$$

Un ulteriore elemento di interesse, utile soprattutto quando si tratterà la dispersione turbolenta orizzontale, è il concetto non locale di *lunghezza di rimescolamento*, che può essere definita come la distanza media percorsa dall'aria nel processo di rimescolamento. Nel contesto non locale adottato, è possibile attribuire ad ogni cella k una lunghezza di rimescolamento l_k che rappresenta il valore medio delle distanze percorse dai flussi di materia in arrivo o in partenza dalla tale cella. In termini matematici l_k è dato da:

$$l_k = \frac{\Delta z}{2} \sum_{i=1}^N [c_{ik}(t, \Delta t) + c_{ki}(t, \Delta t)] \cdot |i - k| \quad [4.103]$$

Con questi elementi è possibile ora adottare la chiusura non locale, che è del primo ordine, alla dispersione turbolenta verticale espressa dalle equazioni differenziali (U, V, Θ , Q, C sono il valore medio delle due componenti orizzontali del moto, della temperatura potenziale virtuale, dell'umidità e della concentrazione di una specie chimica, mentre u, v, θ , q e c sono le rispettive fluttuazioni turbolente):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= - \frac{\overline{\partial uw}}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= - \frac{\overline{\partial vw}}{\partial z} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial z} &= - \frac{\overline{\partial w \theta}}{\partial z} \\ \frac{\partial Q_v}{\partial z} &= - \frac{\overline{\partial qw}}{\partial z} \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= - \frac{\overline{\partial cw}}{\partial z} \end{aligned} \quad [4.104a]$$

Indicando con S una generica delle variabili considerate, l'equazione prototipo da risolvere è:

$$\frac{\partial S}{\partial z} = - \frac{\overline{\partial sw}}{\partial z} = - \frac{\partial F}{\partial z} \quad [4.104b]$$

dove F è il flusso turbolento verticale di S . Nel contesto spaziale discreto in cui si opera, considerando una generica cella j , la reazione precedente diventa:

$$\frac{\partial S_i}{\partial z} = - \frac{F_j - F_{j-1}}{\Delta z} \quad [4.104c]$$

Ricordando che anche il tempo è discretizzato, una possibile trasformazione della relazione precedente è:

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} [F_j - F_{j-1}] \quad [4.104d]$$

che, ricordando la (4.102c), diventa:

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \sum_{k=1}^N c_{jk} [S_j - S_k] \quad [4.104e]$$

Nello scrivere le (4.104c,d) non si è chiarito se i flussi coinvolti debbano essere quelli riferiti al tempo t^n o al tempo t^{n+1} . Si possono adottare tre strategie, come sarà più chiaro in un Capitolo successivo:

- una *strategia esplicita* che rappresenta la maniera operativa usata dal metodo di Eulero per la risoluzione delle equazioni differenziali. Secondo tale strategia:

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} [F_j^n - F_{j-1}^n] \quad [4.105a]$$

Questo metodo, come si vedrà, quando è applicabile è immediato visto che i valori al tempo t^{n+1} dipendono solo da quelli al tempo t^n . Tuttavia, maggiore è Δt , minore è la precisione del risultato.

- una *strategia esplicita* secondo cui:

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} [F_j^{n+1} - F_{j-1}^{n+1}] \quad [4.105b]$$

Questo metodo garantisce una maggiore precisione di previsione ma richiede come contropartita la soluzione di un sistema di equazioni algebriche che può risultare dispendioso dal punto di vista computazionali.

- una *strategia semi-implicita* che combina le due precedenti e che mostra ottime caratteristiche numeriche. Secondo essa:

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\alpha (F_j^{n+1} - F_{j-1}^{n+1}) + (1-\alpha) (F_j^n - F_{j-1}^n) \right] \quad [4.105c]$$

dove α è un parametro minore di 1. Quando $\alpha = 0.5$, lo schema prende il nome di schema di Crank-Nicholson, ben noto nell'Analisi Numerica.

La chiusura non locale, qui presentata sinteticamente, sarebbe operativamente applicabile se fosse nota la *Transient Matrix C* o la *matrice di transizione M*. Ma è proprio qui che si concentra la fisica della chiusura ed è proprio in questo aspetto che si differenziano i tre principali metodi di chiusura proposti.

4.6.2 LO SCHEMA DI BLACKADAR

Il primo schema veramente non locale proposto in Letteratura è quello di Blackadar (1978), descritto da Zhang e Anthes (1982). Questo schema, oltre a costituire un esempio interessante di applicazione dei concetti di chiusura non locale, ha avuto anche un impiego operativo nei modelli meteorologici MM4 e MM5. Va subito detto che il limite principale di questo schema di chiusura è il fatto che è in grado di trattare solo il *PBL* convettivo e quindi, quando deve essere impiegato in un modello operativo, deve convivere con altri schemi di chiusura incaricati di descrivere le situazioni di un *PBL* adiabatico, di un *PBL* stabile e dell'atmosfera libera.

Per descriverlo, inizialmente si considererà solo l'equazione della dispersione verticale della temperatura potenziale virtuale media e solo successivamente si estenderanno i risultati alle altre

equazioni (4.104a). Inoltre, come fatto in precedenza, condurremo una descrizione *discreta* secondo cui la dispersione verticale interessa una colonna d'aria a base unitaria, suddivisa in tante celle sovrapposte, ognuna di altezza Δz (Fig. 4.15). La cella a diretto contatto col suolo è la Cella 1. La cella a quota più elevata è la Cella N .

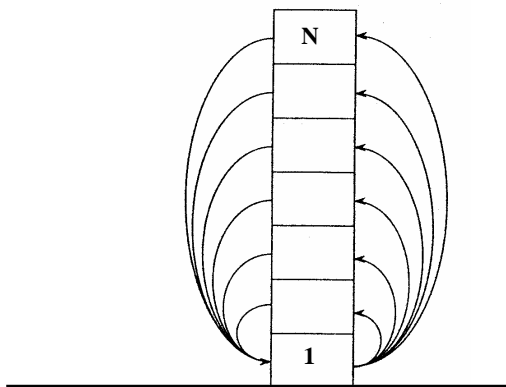


Fig.4.15: flussi d'aria tra le varie celle di una colonna d'aria in una situazione convettiva secondo il modello di Blackadar

Le ipotesi su cui si basa lo schema di chiusura non locale di Blackadar è che:

- le forzanti del sistema, relative alla sola dispersione verticale, sono localizzate tutte all'interfaccia aria-suolo e quindi entro la Cella 1. Esse sono il flusso turbolento di calore sensibile H_0 per l'equazione della temperatura potenziale, u_*^2 per le equazioni del moto ed il flusso turbolento di calore latente H_E per l'equazione dell'umidità;
- la perturbazione dello stato della Cella 1, indotta dalle forzanti a suolo, si propaga verso l'alto attraverso scambi di porzioni di aria che hanno origine dalla Cella 1 e si dirigono verso tutte le altre celle sovrastanti, interne al PBL;
- le celle coinvolte dai vari processi convettivi sono solo quelle entro il PBL. Pertanto, delle N celle della colonna d'aria, vengono considerate dallo schema di Blackadar solo le celle $1, 2, \dots, K$, dove $K \leq N$ e, detto z_i l'altezza del PBL, $K\Delta z \leq z_i \leq (k+1)\Delta z$;
- queste circolazioni che vanno dalla Cella 1 alle varie celle j , con $j = 2, 3, \dots, K$, per la conservazione della massa generano analoghi flussi in direzione opposta (cioè in discesa verso la Cella 1), come evidenziato in Fig.4.15. Di fatto, questo schema sta cercando di evidenziare gli scambi d'aria derivanti dai vortici convettivi di grandi dimensioni ed ipotizza che questa circolazione turbolenta di masse d'aria sia totalmente simmetrica;
- ogni flusso di aria che parte dalla Cella 1 e giunge ad una delle K celle sovrastanti è caratterizzato da una frazione di aria scambiata costante;
- tra le varie celle della colonna non ci sono scambi diretti o indiretti di aria (a meno che una delle due celle coinvolte sia la Cella 1) e quindi non è consentito alcun flusso locale.

Se consideriamo le equazioni prognostiche monodimensionali (cioè riferite solo alla diffusione turbolenta verticale) per le diverse variabili meteorologiche medie ed in particolare quella relativa alla temperatura potenziale virtuale Θ , possiamo pensare di riscriverle in forma discreta, congruentemente con quanto evidenziato in Fig. 4.15. In generale, per ogni generica Cella j , questa equazione può essere riscritta come:

$$\frac{\partial \Theta_j}{\partial t} = - \sum_{k=1}^K m_{jk}(t) \cdot [\Theta_j(t) - \Theta_k(t)] \quad [4.106]$$

in cui è stato messo in evidenza lo scambio discreto di porzioni di aria tra le diverse celle. In questa relazione (ed in tutte le altre relative alle diverse variabili meteorologiche medie) tale meccanismo è stato introdotto in maniera del tutto generale attraverso i coefficienti della *Matrice di Trasferimento* m_{jk} , senza, per ora, preoccuparci di specificarne le caratteristiche.

Se, però, adottiamo lo schema di Blackadar, risulta subito evidente che per ogni coppia di Celle j e k si ha che:

$$m_{1k} = M_u \quad m_{j1} = M_u \quad [4.107]$$

dove M_u , per ora incognito, è la frazione di aria che, nell'unità di tempo, viene trasferita dalla Cella 1 ad ogni cella j , $j = 2, 3, \dots, K$ entro il *PBL* convettivo. Dato che tra ogni generica coppia di celle della colonna non è consentito alcun scambio di aria (a meno che una delle due celle sia la Cella 1), ogni m_{ij} , $i \neq 1$ $j \neq 1$ sarà nullo.

Per stimare il coefficiente di scambio M_u , concentriamo la nostra attenzione sul solo flusso verticale di calore ed ipotizziamo di conoscere il profilo verticale di temperatura potenziale media. In questo caso va ricordato che:

- all'interfaccia aria-suolo, cioè entro la Cella 1, è attiva la sorgente di calore rappresentata dal flusso turbolento di calore sensibile H_0 ;
- dato che nella colonna non sono attive altre sorgenti, ad ogni quota generica il flusso di calore potrà essere determinato sulla base della legge di conservazione dell'energia secondo cui:

$$H(z) = H_0 - M_u \int_0^z \rho C_p \cdot [\Theta_0 - \Theta_z] \cdot dz \quad [4.108a]$$

- quando il limite di integrazione dell'equazione precedente corrisponde alla sommità del *PBL* (z_i), il flusso di calore corrispondente sarà nullo, quindi:

$$M_u = \frac{H_0}{\int_0^{z_i} \rho C_p \cdot [\Theta_0 - \Theta_z] \cdot dz} \quad [4.108b]$$

Questa relazione, che consente l'individuazione di M_u , deve essere un po' adattata alla visione discreta che abbiamo introdotto. In primo luogo si deve individuare Θ_0 . Ci sono diverse possibilità operative che verranno presentate nel seguito. La più semplice implica la conoscenza al tempo t della radiazione ad onda lunga (infrarosso) in allontanamento dal suolo; dalla sua conoscenza e dell'impiego della legge di Stefan-Boltzmann è immediato ottenere la temperatura potenziale all'interfaccia aria-suolo Θ_0 . Comunque, ciò che è disponibile è Θ_0 e ρC_p all'interfaccia aria-suolo (cioè a $z = 0$) e la temperatura potenziale Θ_j e $(\rho C_p)_j$ al centro delle varie celle j . E quindi è possibile impiegare uno dei metodi numerici di integrazione (per esempio il metodo dei trapezi) per approssimare l'integrale nella (4.108b). Fatto ciò, si ottiene immediatamente il valore per il coefficiente di scambio M_u .

Una volta ottenuto il valore del coefficiente di scambio M_u , non resta che integrare la (4.106) o in termini espliciti o in termini impliciti e in maniera semi-implicita, con differenti livelli di complessità e con diverso peso computazionali. Il metodo più comunemente impiegato nella pratica è quello semi-implicito, che rappresenta un buon compromesso tra velocità di calcolo e precisione, e si ha quindi che la versione discreta della (4.106) per la Cella 1 è:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_1^{n+1} - \Theta_1^n}{\Delta t} = & -\alpha \frac{M_u}{\Delta z} \left[(K\Delta z - \Delta z) \cdot \Theta_1^{n+1} - \sum_{k=2}^K \Delta z \Theta_k^{n+1} \right] + \\ & -(1-\alpha) \frac{M_u}{\Delta z} \left[(K\Delta z - \Delta z) \cdot \Theta_1^n - \sum_{k=2}^K \Delta z \Theta_k^n \right] \end{aligned} \quad [4.109a]$$

mentre per tutte le altre Celle j della colonna d'aria si ha che:

$$\frac{\Theta_j^{n+1} - \Theta_j^n}{\Delta t} = -\alpha \cdot M_u \left[\Theta_j^{n+1} - \Theta_1^{n+1} \right] + (1-\alpha) M_u \left[\Theta_j^n - \Theta_1^n \right] \quad [4.109b]$$

Se le celle avessero altezze differenti, queste relazioni si trasformerebbero nelle relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_1^{n+1} - \Theta_1^n}{\Delta t} = & -\alpha \frac{M_u}{\Delta z_1} \left[(Z - \Delta z_1) \cdot \Theta_1^{n+1} - \sum_{k=2}^K \Delta z_k \Theta_k^{n+1} \right] + \\ & -(1-\alpha) \frac{M_u}{\Delta z} \left[(K\Delta z - \Delta z_1) \cdot \Theta_1^n - \sum_{k=2}^K \Delta z_k \Theta_k^n \right] \end{aligned} \quad [4.109c]$$

$$\frac{\Theta_j^{n+1} - \Theta_j^n}{\Delta t} = -\alpha \cdot M_u \frac{\Delta z_1}{\Delta z_j} \left[\Theta_j^{n+1} - \Theta_1^{n+1} \right] + (1-\alpha) M_u \frac{\Delta z_1}{\Delta z_j} \left[\Theta_j^n - \Theta_1^n \right] \quad [4.109d]$$

L'insieme di tutte queste K equazioni algebriche può essere rappresentato in forma matriciale nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} d_1 & f_1 & f_2 & \cdots & \cdots & f_K \\ e_2 & d_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots \\ e_j & \vdots & \vdots & d_j & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ e_K & \cdots & 0 & 0 & 0 & d_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1^{n+1} \\ \Theta_2^{n+1} \\ \vdots \\ \Theta_j^{n+1} \\ \vdots \\ \Theta_K^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_K \end{pmatrix} \quad [4.109e]$$

in cui i vari elementi valgono:

- per $j = 1$:

$$d_1 = 1 + \alpha \frac{\Delta t \cdot M_u}{\Delta z_1} \cdot [Z - \Delta z_1]$$

$$b_1 = 1 - (1-\alpha) \frac{\Delta t \cdot M_u}{\Delta z_1} [Z - \Delta z_1] \cdot \Theta_1^n + (1-\alpha) \frac{\Delta t \cdot M_u}{\Delta z_1} \sum_{k=1}^K \Delta z_k \Theta_k^n$$

- e per $j = 2, 3, \dots, K$:

$$f_j = -\alpha \left(\frac{M_u \Delta t}{\Delta z_j} \right) \Delta z_1 \quad e_j = -\alpha \left(\frac{M_u \Delta t}{\Delta z_1} \right) \Delta z_j \quad d_j = 1 + \alpha \left(\frac{M_u \Delta t}{\Delta z_j} \right) \Delta z_1$$

$$b_j = \left[1 - (1-\alpha) \cdot \left(\frac{M_u \Delta t}{\Delta z_j} \right) \Delta z_1 \right] \cdot \Theta_j^n + (1-\alpha) \cdot \left(\frac{M_u \Delta t}{\Delta z_j} \right) \Delta z_1 \cdot \Theta_1^n$$

La matrice dei coefficienti è molto sparsa e la sua struttura ammette un metodo risolutivo molto semplice. In effetti è semplice dimostrare che valgono le relazioni seguenti che forniscono direttamente le temperature medie alle varie celle convettive della colonna d'aria:

$$\Theta_1^{n+1} = \frac{b_1 - \sum_{j=2}^K b_j f_j / d_j}{d_1 - \sum_{j=2}^K e_j f_j / d_j} \quad \Theta_j^{n+1} = \frac{b_j - e_j \Theta_1^n}{d_j} \quad [4.109f]$$

Per quanto riguarda le altre equazioni prognostiche, si giungerà allo stesso sistema di equazioni algebriche in cui si sostituirà di volta in volta Θ con U , V , Q .

Questo schema totalmente non locale è estremamente interessante ed ha fornito ottimi risultati nelle applicazioni pratiche in situazioni convettive. Come anticipato, non può però essere l'unico schema di chiusura adottato da un modello meteorologico, visto che è in grado di rappresentare la diffusione turbolenta solo nella porzione convettiva del *PBL*. Inoltre, come si sarà certamente notato, per poter essere applicato richiede la conoscenza dell'altezza z_i della porzione convettiva del *PBL* che deve essere determinata in maniera indipendente. Come determinare questa grandezza è un problema che affronteremo sistematicamente nel seguito, anche se nel prossimo paragrafo presenteremo un metodo impiegato proprio nei modelli che adottano chiusure non locali.

4.6.3 LO SCHEMA DI PLEIM E CHANG

La chiusura non locale proposta da Pleim e Chang (1992), nota come *ACM* (*Asymmetrical Convective Model*), prende le mosse dalla schema proposto originariamente da Blackadar (1978) e rispetto ad esso differisce per una visione ancora più realistica dei movimenti verticali delle masse d'aria. In effetti lo schema di Blackadar è basato sull'ipotesi che il rimescolamento turbolento nel *PBL* è isotropico (cioè simmetrico). Tuttavia le osservazioni e le simulazioni *LES* (Schummann, 1989) indicano che i processi di rimescolamento nel *boundary layer* convettivo sono essenzialmente asimmetrici (la turbolenza non è quindi isotropia) con correnti ascendenti che si muovono con velocità ascensionali elevate e correnti discendenti più lente.

Per tener conto di tutto ciò, Pleim e Chang (1992) hanno rivisto il modello di Blackadar introducendo un rimescolamento asimmetrico. Questo schema di chiusura ha avuto un notevole successo nelle applicazioni pratiche, ma con l'aumentare della disponibilità di potenza di calcolo e con l'aumentare della risoluzione verticale considerata, tale schema ha mostrato la necessità di essere rivisto (Pleim, 2007a, b). Qui di seguito presenteremo prima la versione originaria della chiusura non locale di Pleim e Chang e successivamente la versione più recente della stessa.

4.6.3.1 La formulazione originale

Anche in questo caso adottiamo una *visione discreta* della diffusione turbolenta verticale e consideriamo, come in precedenza, una colonna d'aria con base unitaria, suddivisa in celle con Δz costante. Questo modello, noto come modello *ACM* (*Asymmetric Convective Model*) ipotizza che i flussi di materia che hanno luogo durante la diffusione turbolenta in verticale sono illustrati in Fig. 4.16. Si ipotizzi, poi, per semplicità che la sua sommità coincida con la sommità del *PBL* convettivo, che la Cella 1 sia la cella a diretto contatto col suolo e la Cella N sia alla sommità del *PBL*.

Una situazione convettiva è caratterizzata dal fatto che al suolo si viene a stabilire un flusso turbolento di calore sensibile H_0 positivo e tale situazione determinerà il generarsi di un vortice convettivo che si propagherà alle quote superiori. Analizziamo ora la situazione rappresentata in figura. L'immissione di calore sensibile H_0 nella Cella 1 la destabilizzerà e, come reazione a tale destabilizzazione, da tale cella partiranno flussi d'aria diretti verso tutte le celle sovrastanti. L'ipotesi chiave del modello di Pleim e Chang è che i flussi d'aria originati dalla Cella 1 verso ognuna delle celle sovrastanti sono tutti uguali.

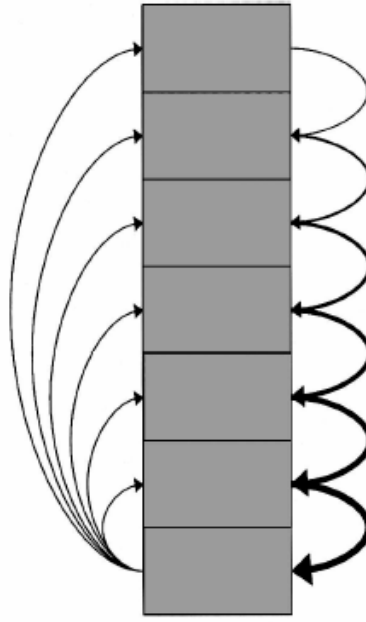


Fig. 4.16: vortice turbolento nel modello ACM di Pleim e Chang.

Se Θ_1 è il valore medio della temperatura potenziale virtuale nella Cella 1 dopo la sua destabilizzazione, la quantità di calore nell'unità di tempo da essa *inviato* ad ognuna delle celle sovrastanti risulta pari a:

$$Q^{in} = \rho C_p \bar{\theta}_1 \cdot \Delta z \cdot M_u \quad [4.110]$$

dove M_u è il *tasso di rimescolamento verso l'alto* (*upward mixing rate*) espresso in s^{-1} . Una volta destabilizzata, la cella invierà verso l'altro questa quantità di calore distribuendolo simmetricamente a tutte le celle sovrastanti. Questo è il *meccanismo di salita* del vortice turbolento che viene visto come l'insieme di vortici di dimensioni caratteristiche pari a multipli interi della dimensione verticale Δz della cella. Questo meccanismo *mima* straordinariamente bene le caratteristiche spettrali di un *PBL* convettivo, in cui sono presenti vortici di tutte le dimensioni, incluso anche vortici con dimensioni caratteristiche dell'ordine dell'altezza del *PBL*.

Il *ritorno al suolo* del vortice ha una storia decisamente differente. Dalla cella più elevata (Cella N), per la conservazione della massa, partirà una quantità di aria pari a:

$$Q^N = M_u \Delta z \quad [4.111a]$$

e tale quantità giungerà *solamente* alla cella $N-1$. Ancora a causa della conservazione della massa, dalla Cella N-1 partirà una nuova quantità di aria, diretta esclusivamente alla cella sottostante $N-2$, la cui entità sarà pari alla somma dell'aria in arrivo dalla Cella 1 (*aria in salita*) e dell'aria in arrivo dalla Cella N (*aria in discesa*), cioè:

$$Q^{N-1} = M_u \Delta z + Q^N \quad [4.111b]$$

e quindi, per la (4.11a):

$$Q^{N-1} = 2M_u \Delta z \quad [4.111c]$$

Quanto visto per la cella $N-1$ si proporrà per tutte le celle sottostanti. Questo meccanismo di discesa del vortice può essere efficacemente rappresentato da una discesa a cascata, che *mima* ancora una volta il processo di *energy cascade* che sta alla base dell'Ipotesi di Kolmogorov. Se si considera una generica cella j -esima, si avrà in generale che:

$$Q^j = (N - j + 1)\Delta z \cdot M_u \quad [4.111d]$$

Se invece di avere tutte le celle della colonna d'aria di pari altezza Δz , avessimo celle di altezza variabile (tipicamente ad altezza crescente con la quota), detta z_j la quota cui corrisponde la sommità della Cella j , la relazione precedente può essere riscritta come:

$$Q^j = (z_N - z_{j-1}) \cdot M_u \quad [4.111e]$$

Se introduciamo il tasso di mescolanza verso il basso (*downward mixing rate*) M_{dj} dalla cella j alla cella $j-1$, è immediato ottenere dalla (4.111d) la relazione seguente:

$$M_{dj} = M_u + M_{dj+1} = M_u \frac{(N - j + 1)\Delta z}{\Delta z} \quad [4.112a]$$

se le celle sono di ugual altezza, oppure, se le celle hanno altezza diversa, dalla relazione equivalente:

$$M_{dj} = M_u + M_{dj+1} = M_u \frac{(z_N - z_{j-1})}{\Delta z} \quad [4.112b]$$

Se consideriamo ora una qualunque proprietà dell'aria, per esempio il valore medio della temperatura potenziale virtuale Θ , il tasso di variazione relativo per la cella j risulta pari a:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = M_u \Theta_1 - M_{dj} \Theta + M_{dj+1} \Theta_{j+1} \quad [4.113]$$

che è la *versione discretizzata* dell'equazione prognostica per la temperatura potenziale virtuale media, in cui è stato considerato solo il meccanismo di dispersione verticale.

Per poterla impiegare effettivamente, bisogna individuare un'espressione per il tasso di rimescolamento M_u . A tal proposito consideriamo inizialmente la Cella 1. Se la situazione è convettiva, tale cella riceverà un flusso turbolento di calore sensibile H_0 incrementando quindi il calore posseduto. Nell'unità di tempo, il calore ricevuto dalla Cella 1 verrà ridistribuito a tutte le altre celle sovrastanti attraverso il movimento asimmetrico del vortice descritto in precedenza. Se consideriamo le varie celle, dalla *N-esima* alla *seconda*, l'incremento di calore nell'unità di tempo sarà:

$$\begin{aligned} \text{Cella } N &\Rightarrow \Delta Q_N = \rho C_p (M_u \Theta_1 - M_{dN} \Theta_N) \Delta z \\ \text{Cella } N-1 &\Rightarrow \Delta Q_{N-1} = \rho C_p (M_u \Theta_1 - M_{dN-1} \Theta_{N-1} + M_{dN} \Theta_N) \Delta z \\ &\dots\dots\dots \\ \text{Cella } j &\Rightarrow \Delta Q_j = \rho C_p (M_u \Theta_1 - M_{dj} \Theta_j + M_{dj+1} \Theta_{j+1}) \Delta z \\ &\dots\dots\dots \\ \text{Cella } 2 &\Rightarrow \Delta Q_2 = \rho C_p (M_u \Theta_1 - M_{d2} \Theta_2 + M_{d3} \Theta_3) \Delta z \end{aligned}$$

La somma degli incrementi di calore nell'unità di tempo di tutte le celle sovrastanti la prima dovranno eguagliare H_0 e ciò comporta che:

$$H_0 = \rho C_p M_u (z_N - z_1) \cdot (\Theta_1 - \Theta_2) \quad [4.114a]$$

e quindi:

$$M_u = \frac{H_0}{\rho C_p (z_N - z_1) \cdot (\Theta_1 - \Theta_2)} \quad [4.114b]$$

Con la conoscenza di M_u , lo schema di chiusura è completo e l'equazione prognostica (4.113) può effettivamente essere risolta.

E' immediato constatare che è possibile scrivere equazioni analoghe anche per le componenti medie del vento, per l'umidità specifica media e per la concentrazione di specie inquinanti. In realtà in tutte queste equazioni prognostiche è presente solo il meccanismo di diffusione verticale e ciò potrebbe sembrare estremamente limitante. In realtà ciò non è, come sarà chiaro nel seguito.

Facciamo un ulteriore passo nella direzione operativa e *discretizziamo la derivata temporale* presente nella (4.113). Se Δt è il passo temporale di discretizzazione, se per generalità si consentono altezze differenti per le varie celle e se si adotta un approccio semi-implicito, si ha:

- per una generica Cella 1:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_i^{n+1} - \Theta_i^n}{\Delta t} = & -M_u \frac{z_N - z_1}{\Delta z_1} \left[\alpha \cdot \Theta_1^{n+1} + (1-\alpha) \cdot \Theta_1^n \right] + \\ & + M_u \frac{z_N - z_1}{\Delta z_1} \left[\alpha \cdot \Theta_2^{n+1} + (1-\alpha) \cdot \Theta_2^n \right] \end{aligned} \quad [4.115a]$$

- e per la generica Cella i -esima:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_i^{n+1} - \Theta_i^n}{\Delta t} = & M_u \left[\alpha \cdot \Theta_1^{n+1} + (1-\alpha) \cdot \Theta_1^n \right] - \frac{z_N - z_{i-1}}{\Delta z_i} \left[\alpha \cdot \Theta_i^{n+1} + (1-\alpha) \cdot \Theta_i^n \right] + \\ & \frac{z_N - z_i}{\Delta z_i} \left[\alpha \cdot \Theta_{i+1}^{n+1} + (1-\alpha) \cdot \Theta_{i+1}^n \right] \end{aligned} \quad [4.115b]$$

Questo è un sistema lineare che può essere scritto nella forma matriciale seguente:

$$\begin{pmatrix} d_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ e_2 & d_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots \\ e_j & \vdots & \vdots & d_j & c_j & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & c_{N-1} \\ e_N & \cdots & 0 & 0 & 0 & d_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Theta_1^{n+1} \\ \Theta_2^{n+1} \\ \vdots \\ \Theta_j^{n+1} \\ \vdots \\ \Theta_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \quad [4.115c]$$

dove i vari elementi della matrice dei coefficienti e del vettore dei termini noti sono dati alle relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} d_1 &= 1 + \alpha \cdot M_u \frac{z_N - z_1}{\Delta z_1} \Delta t & c_1 &= -M_u \frac{z_N - z_1}{\Delta z_1} \alpha \cdot \Delta t \\ b_1 &= \left[1 - M_u \frac{z_N - z_1}{\Delta z_1} (1-\alpha) \cdot \Delta t \right] \cdot \Theta_1^n + M_u \frac{z_N - z_1}{\Delta z_1} (1-\alpha) \cdot \Delta t \cdot \Theta_2^n \\ e_j &= -M_u \alpha \cdot \Delta t & d_j &= 1 + M_u \frac{z_N - z_j}{\Delta z_{j+1}} \alpha \cdot \Delta t & c_j &= -M_u \frac{z_N - z_j}{\Delta z_j} \alpha \cdot \Delta t \\ b_j &= \left[1 - M_u \frac{z_N - z_{j-1}}{\Delta z_j} (1-\alpha) \cdot \Delta t \right] \cdot \Theta_j^n + M_u \frac{z_N - z_j}{\Delta z_{j+1}} (1-\alpha) \cdot \Delta t \cdot \Theta_{j+1}^n + M_u (1-\alpha) \cdot \Delta t \cdot \Theta_1^n \end{aligned}$$

Quindi, se al tempo t_n è noto H_0 ed il valore delle temperatura media nelle varie celle della colonna d'aria, è immediato costruire i coefficienti della matrice presente nel sistema (4.115c), matrice nota *come Transilient Matrix* ed i coefficienti del vettore dei termini noti b_j . La risoluzione di tale sistema consente la determinazione della temperatura media nelle varie celle della colonna al tempo t_{n+1} . Per risolvere un tale sistema sono disponibili algoritmi risolutivi molto efficaci come il seguente:

- si definiscano queste due grandezze per una generica cella j :

$$\alpha_j = e_j - \alpha_{j-1} d_j / c_{j-1} \quad \beta_j = b_j - \beta_{j-1} \cdot d_j / c_{j-1}$$

e per $j = 1$, $\alpha_1 = d_1$ e $\beta_1 = b_1$;

- allora:

$$\Theta_1^{n+1} = \frac{d_N \beta_{N-1} - b_N c_{N-1}}{d_N \alpha_{N-1} - e_N c_{N-1}} \quad \Theta_j^{n+1} = \frac{\beta_j - \alpha_j \Theta_1^{n+1}}{c_1}$$

Questo schema di chiusura può essere impiegato solo nelle situazioni convettive e consente di ottenere risultati molto realistici e l'unico problema reale che presenta, del resto comune allo schema di Blackadar, è la necessità di stimare l'altezza del PBL che può essere determinata diagnosticamente dal profilo della temperatura potenziale virtuale media, come vedremo al punto successivo.

Questo schema di chiusura, oltre ad essere impiegato con maggior successo in modelli di PBL (Alapaty et al., 1997), risulta fondamentale anche in molti modelli che trattano la dispersione degli inquinanti in aria ed i relativi processi di trasformazione chimica e fotochimica.

Per concludere va ricordato anche uno schema ACM modificato da Mihailovic et al. (2008) e denominato VUR. In sostanza, tale schema è ancora lo schema ACM in cui, però, i coefficienti di rimescolamento μ diminuiscono con la quota e dipendono dall'energia cinetica turbolenta. Per i dettagli si rimanda al Riferimento citato.

4.6.3.2 La formulazione attuale

Lo svantaggio della chiusura ACM di Pleim e Chang sta nel fatto che una delle ipotesi su cui si fonda è la totale assenza di diffusione locale verso l'alto. Gli effetti negativi di una tale ipotesi sono risultati visibili quando la risoluzione verticale dei modelli è aumentata. Per eliminare questo potenziale problema Pleim (2007a,b) ha proposto una correzione a tale schema, noto come ACM2 in cui viene aggiunto una componente locale di diffusione verticale alla originaria componente non locale. Ciò è illustrato in Fig.4.17.

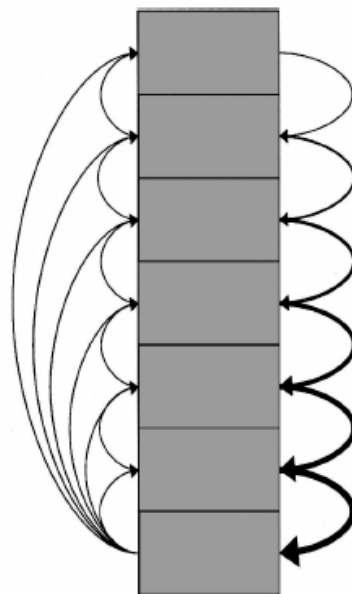


Fig. 4.17: vortice turbolento nel modello ACM2 di Pleim

Lo schema di chiusura viene qui presentato nella sua forma più generale. Consideriamo sempre una colonna d'aria a base unitaria, suddivisa in celle di altezza non necessariamente uguale. Le grandezze scalari medie di cui consideriamo le equazioni prognostiche (temperatura potenziale, vapor d'acqua, forme condensate dell'acqua, specie chimiche e componenti orizzontali del moto) sono definite al centro di ogni cella e vengono indicate con l'indice i . L'altezza di ogni cella, in generale variabile da cella a cella, è Δz_i . I flussi verticali, le velocità verticali e le diffusività turbolente sono localizzati all'interfaccia tra le celle e quindi indicate con un indice frazionario: per esempio il generico flusso $F_{i+1/2}$ è il flusso che ha luogo alla sommità della Cella i . In Analisi Numerica, una griglia di questo tipo prende il nome di griglia *staggered*.

Se introduciamo come abbiamo fatto in precedenza i coefficienti di rimescolamento convettivo verso l'alto Mu (che rappresenta il tasso di materia che parte dalla Cella 1 e giunge ad ogni cella superiore) e verso il basso Md_i (che rappresenta il tasso di materia che lascia la generica Cella i), l'equazione prognostica per uno scalare C alla quota della Cella i , trascurando la componente locale di diffusione, è data da:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = MuC_1 - Md_i C_i + Md_{i+1} C_{i+1} \frac{\Delta z_{i+1}}{\Delta z_i} \quad [4.116a]$$

Come abbiamo visto in precedenza:

$$Md_i = Mu \cdot (h - z_{i-1/2}) / \Delta z_i \quad [4.116b]$$

dove con h abbiamo indicato l'altezza del *PBL*. Così, il flusso della grandezza C ad ogni interfaccia tra cella e cella ($i + 1/2$) è data da:

$$F_{i+1/2} = Mu \cdot (h - z_{i+1/2}) \cdot C_1 - Md_{i+1} \Delta z_{i+1} C_{i+1} \quad [4.117a]$$

cioè:

$$F_{i+1/2} = Mu \cdot (h - z_{i+1/2}) \cdot (C_1 - C_i) \quad [4.117b]$$

Così, nel caso in cui la grandezza C sia la temperatura potenziale virtuale, il coefficiente di rimescolamento Mu può essere definito in termini di flusso di calore cinematico alla sommità della cella inferiore $B_{1.5}$ come:

$$Mu = \frac{B_{1.5}}{(h - z_{1+1/2}) \cdot (\Theta_1 - \Theta_2)} \quad [4.117c]$$

Assumiamo che la sommità della Cella 1 sia sufficientemente vicina al suolo (entro il *SL*) da far sì che i flussi siano dominati dai vortici a piccola scala. In questo caso la Teoria della Similarità nel *SL* ci garantisce che la diffusività turbolenta di calore K_h ad una quota z è data da:

$$K_h(z) = k \frac{u_*}{\Phi_h(z/L)} \cdot z \cdot (1 - z/h)^2 \quad [4.118a]$$

dove:

$$\Phi_h = (1 - 16z/L)^{-1/2} \quad [4.118b]$$

Questa considerazione ci porta, quindi, a dire che:

$$B_{1.5} = K_h(z_{1+1/2}) \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Delta z_1} \quad [4.118c]$$

cioè:

$$Mu = \frac{K_h(z_{1+1/2})}{\Delta z_1(h - z_{1+1/2})} \quad [4.118d]$$

Se ora consentiamo alla diffusione locale di agire assieme alla componente di diffusione non locale, la (4.116a) si trasforma nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} = & M2u \cdot C_1 - M2d_i \cdot C_i + M2d_{i+1} \cdot C_{i+1} \frac{\Delta z_{i+1}}{\Delta z_i} + \\ & + \frac{1}{\Delta z_i} \left[\frac{K_{i+1/2}(C_{i+1} - C_i)}{\Delta z_i} + \frac{K_{i-1/2}(C_i - C_{i-1})}{\Delta z_i} \right] \end{aligned} \quad [4.119a]$$

in cui ora appaiono i coefficienti di rimescolamento $M2u$ e $M2d_i$. Si nota immediatamente come la relazione precedente esprima il fatto che il tasso di variazione dello scalare C per diffusione turbolenta verticale sia rappresentato dalla somma di una componente non locale di diffusione e da una componente locale. L'ipotesi chiave dello schema di chiusura $ACM2$ è che:

$$M2u = f_{conv} Mu \quad [4.119b]$$

e che la diffusività turbolenta K è data da:

$$K(z) = K_z(z) \cdot (1 - f_{conv}) \quad [4.119c]$$

In sostanza si ipotizza che la diffusione turbolenta verticale di uno scalare C è una combinazione lineare di una diffusione locale e di una diffusione non locale.

La diffusione locale è caratterizzata dal coefficiente di diffusività K_z che, per le componenti orizzontali del moto, è data da:

$$K_z = K_m(z) = k \frac{u_*}{\Phi_m(z_s/L)} z \cdot (1 - z/h)^2 \quad [4.119d]$$

e per gli altri scalari da:

$$K_z = K_h(z) = k \frac{u_*}{\Phi_h(z_s/L)} z \cdot (1 - z/h)^2 \quad [4.119e]$$

In queste relazioni $z_s = \min(z, 0.1h)$ e el funzioni di Similarità sono espresse dalle relazioni:

$$\Phi_m = (1 - 16z/L)^{-1/4} \quad [4.119f]$$

$$\Phi_h = (1 - 16z/L)^{-1/2} \quad [4.119g]$$

Il parametro chiave di tutta la chiusura è il coefficiente f_{conv} , che determina quanto il peso reciproco tra la componente non locale e la componente locale. Tale coefficiente non assumerà, come ovvio, un valore fisso, ma varierà a seconda del livello di convettività del PBL e dell'estensione verticale dell'atmosfera rimescolata h . Pleim (2007a), partendo dai risultati ottenuti da Holtslag e Moeng (1991), è giunto alla conclusione che:

$$f_{conv} = \left[1 + \frac{k^{-2/3}}{0.72} \left(-\frac{h}{L} \right)^{-1/3} \right]^{-1} \quad [4.120]$$

Anche lo schema di chiusura $ACM2$ ha bisogno di conoscere l'altezza h del PBL . Nel seguito tratteremo questo problema nel dettaglio. Tuttavia, dato che stiamo trattando uno schema di chiusura che verosimilmente opererà all'interno di un modello meteorologico numerico, seguendo Pleim (2007a) è possibile definire una metodologia diagnostica per la determinazione di

questa grandezza dal profilo verticale di temperatura potenziale. In primo luogo si determina l'estensione massimo dello Strato Rimescolato (*ML*) z_{mix} . Tale quota è quella per cui la relativa temperatura potenziale è data da (Nielsen-Gammon et al. 2010):

$$\Theta(z_{mix}) = \Theta_1 + 8.5 \frac{\overline{w\theta_0}}{(u_*^3 + 0.6w_*^3)^{1/3}} \quad [4.121a]$$

Se poi si definisce il Numero di Richardson Bulk come:

$$Ri_b = \frac{g[\Theta(h) - \Theta(z_{mix})] \cdot (h - z_{mix})}{\overline{\Theta} \cdot [U(h) - U(z_{mix})]^2} \quad [4.121b]$$

la sommità h del *PBL* è quella quota, sopra z_{mix} , per cui Ri_b raggiunge il valore critico 0.25.

Anche lo schema ACM2 può operare, come quelli visti in precedenza, solo all'interno del *PBL*. Nelle situazioni stabili e al di sopra del *PBL* è necessario utilizzare schemi diversi, di natura locale. Come esempio, Pleim (2007b) ha adottato nelle situazioni stabili e sopra il *PBL* una chiusura locale del primo ordine con coefficiente di diffusività turbolenta pari a:

$$K_z = K_{z0} + \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| \cdot \left(1 - \frac{Ri}{Ri_c} \right)^2 l^2 \quad (Ri > 0) \quad [4.122a]$$

$$K_z = K_{z0} + \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| \cdot (1 - 25Ri)^2 l^2 \quad (Ri \leq 0)$$

in cui è presente la lunghezza di scala l data da:

$$l = \left(\frac{kz\lambda}{kz + \lambda} \right)^2 \quad [4.122b]$$

con $\lambda = 80$ m e $K_{z0} = 0.05$ m²s⁻¹. Altri dettagli modellistici possono essere trovati in Pleim (2007b) e in Nielsen-Gammon et al (2010), assieme ai risultati ottenuti impiegando questo schema di chiusura.

4.6.4 LO SCHEMA DI STULL

Lo schema proposto da Stull è sicuramente lo schema di chiusura non locale più generale e completo, applicabile sia alle situazioni convettive che a quelle stabili entro o fuori il *PBL*. I principali riferimenti di Letteratura sull'argomento sono: Stull (1984, 1986, 1987, 1988, 1990, 1991, 1993), Stull e Hasegawa (1984), Stull e Dridonks (1987) e Raymond e Stull (1990).

La teoria su cui si basa è esattamente quella presentata in precedenza e le relazione (4.100a, b) ne sono l'espressione base. Lo schema, a priori, non è monodimensionale come i precedenti, ma può essere generalizzato anche per tener conto della dispersione turbolenta in orizzontale. Anche se ciò è ben poco documentato in Letteratura, alla fine della discussione se ne darà cenno per poterne evidenziare gli aspetti implementativi. Comunque, vista l'importanza fondamentale che riveste la dispersione turbolenta verticale e date le peculiarità dei metodi numerici che potranno essere utilizzati per la risoluzione delle equazioni fluidodinamiche, la maggior parte dell'esposizione si riferirà alla sola diffusione turbolenta verticale. Pertanto il dominio di indagine è esattamente la colonna d'aria a base unitaria, suddivisa in celle di uguale altezza Δz rappresentata in Fig.4.13.

4.6.4.1 La Transilient Matrix

Le basi teoriche descritte in precedenza e basate su si possono riassumere completamente nelle

equazioni (4.100a, b) e da esse emerge la necessità di individuare i valori degli elementi della *Transient matrix* C . Le caratteristiche di tale matrice sono riassunte graficamente in Fig.4.18 e le proprietà che i suoi elementi devono soddisfare sono ancora una volta le relazioni (4.100a e b) che rappresentano la conservazione della massa e dello stato. Oltre a ciò, nello schema di Stull si introduce un'ulteriore caratteristica che devono rispettare i vari elementi della matrice.

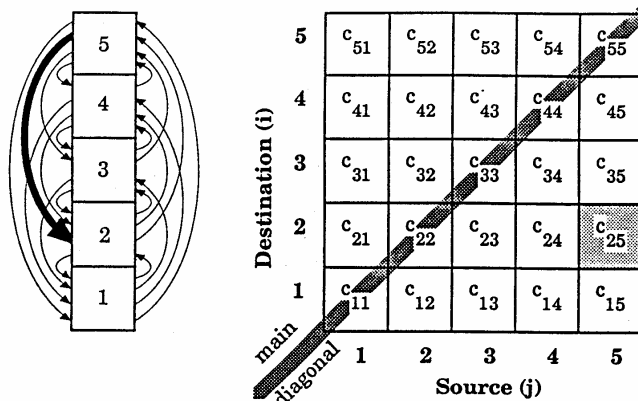


Fig. 4.18: schematizzazione del modello di chiusura non locale di Stull (1991)

Lo schema prevede un'ipotesi di scambio (*exchange hypothesis*) secondo cui $c_{ij} = c_{ji}$, cioè la matrice C è simmetrica. Dal punto di vista fisico ciò sta a significare che se una certa porzione di aria proveniente dalla Cella j si rimescola nella Cella i , allora un'uguale porzione di aria partirà da i per rimescolarsi in j . Questa ipotesi, ovviamente, non muta le caratteristiche intrinseche alla *Transient Matrix*, per esempio resta valido il fatto che i suoi autovalore in modulo non possono mai superare l'unità.

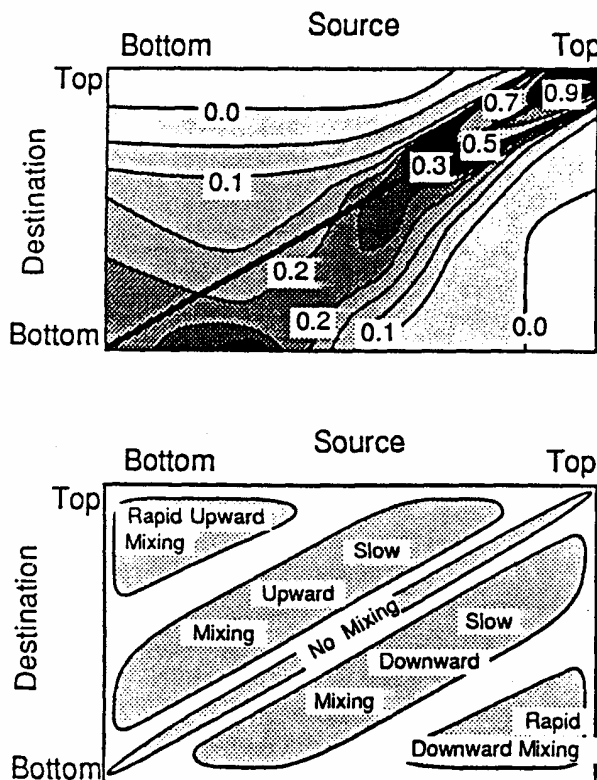


Fig.4.19: struttura della *Transient Matrix* (da Stull, 1991)

Anche se sia lo schema di Blackadar che quello di Pleim e Chang possono essere inquadrati a buon diritto nella teoria generale delle chiusure non locali discrete del primo ordine, si nota immediatamente come entrambe abbiano stabilito a priori la forma della *Transilient Matrix*. Nello schema di Stull, ciò non avviene ed i vari coefficienti verranno ricavati tenendo conto dello stato del *PBL* che si sta trattando.

La *Transilient Matrix* non può essere misurata direttamente con la strumentazione meteorologica attualmente disponibile, tuttavia l'impiego dei modelli *LES* ad alta risoluzione ne ha consentito un calcolo realistico che è servito da confronto per verificare la bontà della ricostruzione operata dalla parametrizzazione proposta in questo schema di chiusura. In Fig.4.19 ne è presentato un esempio desunto da una simulazione *LES* confrontata con un disegno che evidenzia il significato dei vari termini che la compongono. Come si può notare, la matrice individuata è asimmetrica ed evidenzia il fatto che le parti di aria nella parte media ed alta del *PBL* si muovono lentamente verso il basso, mentre una quantità inferiore di aria si muove molto più rapidamente verso l'alto, partendo dalla superficie, cosa consistente con le misure di velocità verticale dell'aria in condizioni di forte convettività ed anche col modello di Pleim e Chang, presentato al paragrafo precedente.

E' quindi evidente l'importanza dell'individuazione di un metodo per la determinazione dei coefficienti della *Transilient Matrix*.

4.6.4.2 La determinazione dei coefficienti della *Transilient Matrix*

Mentre negli schemi di Blackadar e Pleim e Chang le ipotesi fatte sul meccanismo di generazione dei vortici determinava la forma della *Transilient Matrix* (che risultava essere una matrice fortemente sparsa) e quindi individuava in maniera univoca i suoi coefficienti, nello schema di Stull, non facendo alcun tipo di ipotesi a priori sul tipo di rimescolamento in atto nell'atmosfera, richiedeva inevitabilmente un modello specifico per la determinazione dei coefficienti della *Transilient Matrix*. Tra i vari modelli possibili, si è scelto di utilizzare concetti già ampiamente utilizzati in fluidodinamica, adattati però al contesto non locale tipico di questo schema. Di fatto due sono i principali modelli proposti ed utilizzati.

Metodo dell'energia cinetica turbolenta.

Il punto di partenza del metodo sta nell'individuare un opportuno *potenziale* che descriva gli scambi turbolenti che hanno luogo in atmosfera. A tale scopo si indichi con A_{ij} il potenziale responsabile del rimescolamento dell'aria tra le celle i e j . Tale potenziale è legato all'ammontare di instabilità del flusso, che si assume responsabile del rimescolamento che ne deriva. Per poter utilizzare tale parametrizzazione nella determinazione degli elementi della *Transilient Matrix*, si definisca la *norma di riga* RN_i :

$$RN_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \quad [4.123a]$$

e la *norma di matrice*:

$$\|A\|_{\infty} = \max_i (RN_i) \quad [4.123b]$$

Dal rapporto tra un potenziale e la norma di matrice, si può costruire un *Transilient Coefficient* che soddisfi i vincoli di conservazione della massa. Gli elementi non diagonali vengono definiti come:

$$c_{ij} = \frac{A_{ij}}{\|A\|_{\infty}} \quad i \neq j \quad [4.124a]$$

e, dato che ciascuna riga della matrice deve dare come somma 1 per la conservazione della mas-

sa, si ha che gli elementi diagonali possono essere ottenuti con la relazione:

$$c_{ii} = 1 - \sum_{i=1, j \neq i}^N c_{ij} \quad [4.124b]$$

Il potenziale di mescolamento, e quindi anche la *Transilient Matrix*, sono funzioni del tempo, cosa che richiede il loro ricalcolo ad ogni time step per rispondere alle perturbazioni ricevute dal sistema.

Stull e Driedonks (1987) hanno usato un'analogia non locale dell'equazione dell'energia cinetica turbolenta per parametrizzare il potenziale di mescolamento per le coppie di celle i e j (non coincidenti). In particolare, il punto di partenza è l'equazione prognostica dell'energia cinetica turbolenta riferita a condizioni di forte omogeneità orizzontale. Se con U e V si indicano le componenti orizzontali del moto e con Θ il valor medio della temperatura potenziale virtuale, mentre u , v e θ sono le fluttuazioni turbolente relative, detto E l'energia cinetica turbolenta e ε il suo tasso di dissipazione, l'equazione in forma semplificata risulta essere:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{g}{\Theta} \overline{w\theta} + \varepsilon \quad [4.125a]$$

Si supponga, ora, che ogni instabilità statica o dinamica tra due celle qualsiasi i e j di una colonna d'aria generi energia cinetica della stessa scala $|j-i| \cdot \Delta z$ destinata a rimuovere tale instabilità, oltre che, in parte, dissiparsi in calore (cosa descritta dal termine ε). Indicando con E_{ij} , \overline{uw}_{ij} , \overline{vw}_{ij} , $\overline{w\theta}_{ij}$ e ε_{ij} rispettivamente l'energia cinetica turbolenta, le due componenti cartesiane del flusso di quantità di moto, il flusso cinematico di calore sensibile ed il tasso di dissipazione di energia cinetica turbolenta tutti relativi alla scala $|j-i| \cdot \Delta z$, la (4.125a) può essere riscritta in termini discreti nel modo seguente:

$$\frac{\Delta E_{ij}}{E_{ij}} = \left[-\frac{\overline{uw}_{ij}}{E_{ij}} \cdot \left(\frac{\Delta U}{\Delta z} \right)_{ij} - \frac{\overline{vw}_{ij}}{E_{ij}} \cdot \left(\frac{\Delta V}{\Delta z} \right) + \frac{g}{\Theta} \frac{\overline{w\theta}_{ij}}{E_{ij}} - \frac{\varepsilon_{ij}}{E_{ij}} \right] \Delta t \quad [4.125b]$$

Per poter impiegare in qualche modo questa equazione è necessario parametrizzare i vari flussi non locali in essa presenti. A tale scopo:

$$-\frac{\overline{uw}_{ij}}{E_{ij}} = T_0 \left(\frac{\Delta U}{\Delta z} \right)_{ij} = T_0 \frac{U_i - U_j}{z_i - z_j} \quad [4.126a]$$

$$-\frac{\overline{vw}_{ij}}{E_{ij}} = T_0 \left(\frac{\Delta V}{\Delta z} \right)_{ij} = T_0 \frac{V_i - V_j}{z_i - z_j} \quad [4.126b]$$

$$+\frac{\overline{w\theta}_{ij}}{E_{ij}} = \frac{T_0}{R_c} \left(\frac{\Delta \Theta}{\Delta z} \right)_{ij} = T_0 \frac{\Theta_i - \Theta_j}{z_i - z_j} \quad [4.126c]$$

$$+\frac{\varepsilon_{ij}}{E_{ij}} = \frac{D}{T_0} \quad [4.126d]$$

dove T_0 è un tempo caratteristico di scala, R_c è un parametro adimensionale che mette in relazione la *buoyancy* con lo *shear* (di fatto è l'equivalente non locale del Numero di Richardson critico) e D è un fattore adimensionale di dissipazione. I valori numerici attribuiti a questi parametri sono rispettivamente 1000 s, 0.21 e 1.

Dato che il termine sinistro dell'equazione (4.125b) è una misura del cambio di energia cinetica associato al rimescolamento turbolento sulla scala $|i-j| \cdot \Delta z$, la parte destra dell'equazione, a questo punto, può essere interpretata come il meccanismo che guida questo cambio. Per esempio, se, in assenza di forze esterne un flusso turbolento di un fluido diviene non turbolento in un in-

tervallo di tempo Δt perché lo *shear* e le instabilità vengono ridotte dal processo di rimescolamento stesso, allora la parte destra dell'equazione precedente è una misura dell'abilità delle instabilità a causare rimescolamento prima che cessi la turbolenza. Questo concetto può essere esteso fino a definire il membro di destra dell'equazione un potenziale di rimescolamento. In effetti, introducendo le parametrizzazioni indicate, si ha che:

$$Y_{ij} = \frac{\Delta t \cdot T_0}{(\Delta z)_{ij}^2} \left[(\Delta U)_{ij}^2 + (\Delta V)_{ij}^2 - \frac{g \cdot (\Delta z)_{ij} \Delta \Theta_{ij}}{\Theta \cdot R_c} \right] - \frac{D \cdot \Delta t}{T_0} \quad [4.127a]$$

Pur rimandando ai riferimenti originali per i particolari, va sottolineato che, dato che l'ipotesi più forte fatta nello schema di Stull è l'ipotesi di scambio, cioè il fatto che la *Transilient Matrix* sia simmetrica, inevitabilmente dovrà essere che $Y_{ij} = Y_{ji}$. Oltre a ciò, considerazioni teoriche e sperimentali richiedono che gli elementi Y_{ij} della matrice \mathbf{Y} crescano monotonicamente dai bordi della matrice verso la sua diagonale principale e che gli elementi Y_{ii} sulla diagonale principale abbiano il valore maggiore di tutta la riga. Essi, tra l'altro, rappresentano il rimescolamento interno che ha luogo entro ciascuna cella e che, in qualche modo, trova una sua parametrizzazione nella definizione di un potenziale di riferimento Y_{ref} il cui valore è risultato dell'ordine di 1000. Pertanto, i coefficienti Y_{ii} saranno dati dalla relazione:

$$Y_{ii} = \max\{Y_{i,i-1}, Y_{i,i+1}\} + Y_{ref} \quad [4.127b]$$

Con le relazioni (4.127), noti i profili verticali delle componenti medio orizzontali del moto e della temperatura potenziale media, si ottengono tutti gli elementi della matrice potenziale \mathbf{Y} . Dato che $Y_{ij} = A_{ij}$, mediante le (4.124) i coefficienti della *Transilient Matrix*. Se il potenziale di mescolamento è nullo o negativo, allora c_{ij} è posto pari a zero indicando assenza di turbolenza.

Metodo del Numero di Richardson non locale

L'analogo non locale del Numero di Richardson può essere definito come:

$$r_{ij} = \frac{g \cdot \Delta \Theta_{ij} \cdot \Delta z_{ij}}{\Delta U_{ij}^2 + \Delta V_{ij}^2} \quad [4.128a]$$

dove $r_{ij} = r_{ji}$. Se $r_{ij} > R_c$ allora non ci sono le condizioni per la presenza della turbolenza e quindi $Y_{ij} = Y_{ji} = A_{ij}$ è posto a zero. In caso contrario, si assume che la turbolenza agisca rimescolando la colonna d'aria finché si è raggiunto un Numero di Richardson R_T . Da tutto ciò risulta, alla fine che, per ogni $i \neq j$:

$$A_{ij} = A_{ji} = Y_{ij} = w_{ij} \cdot [1 - r_{ij}/R_T] \quad [4.128b]$$

dove w_{ij} è una funzione peso definita come:

$$w_{ij} = w_{ji} = U_0 \cdot \frac{\Delta t}{|i-j| \cdot \Delta z}$$

Sia w_{ij} che A_{ij} vengono troncati in modo tale che i loro valori restino nell'intervallo $0 \div 1$. Noti gli A_{ij} , gli elementi della *Transilient Matrix* non diagonali vengono individuati dalla relazione:

$$c_{ij} = c_{ji} = A_{ij}/N_d \quad [4.128c]$$

dove con N_d si è indicato il numero di celle della colonna che risultano turbolente.

Gli elementi diagonali vengono ancora una volta calcolati con la (4.124b).

4.6.4.3 Implementazione del modello di Stull

Una volta noti gli elementi della *Transilient Matrix*, risulta possibile l'applicazione pratica dello schema di chiusura e l'integrazione delle equazioni prognostiche per le variabili medie. La metodologia proposta è sostanzialmente quella ben nota in Analisi Numerica dello *splitting in time* (o *fractional time step*) che si compone di una serie di azioni elementari, ognuna delle quali sfrutta i risultati ottenuti dalla precedente. Una volta noti i profili delle variabili medie al tempo t , per calcolare gli stessi a $t+\Delta t$ sono necessari i passi operativi seguenti (Raymond e Stull, 1990) che verranno descritti in un generale contesto tridimensionale.

Passo 1: introduzione delle forzanti esterne e interne

Per prima cosa, vengono realizzati i convenzionali calcoli che non implicano la turbolenza, come il calcolo delle avvezioni orizzontali, l'introduzione dell'effetto della forza di Coriolis, gli eventuali effetti di impoverimento e gli effetti delle divergenze radiative. Gli algoritmi da utilizzarsi a questo scopo possono essere quelli che verranno presentati in un Capitolo seguente.

Oltre a ciò è necessario applicare le forzanti al suolo nelle celle ad esso adiacenti. L'introduzione di queste forzanti, che daranno origine alla turbolenza avviene con un processo di destabilizzazione dei profili nelle celle al suolo. Si ignori inizialmente l'interazione orizzontale tra le varie celle adiacenti al suolo e quindi si ritorni a considerare una colonna d'aria verticale e la sua cella inferiore. L'introduzione in questa cella delle forzanti al suolo genererà una destabilizzazione dei profili delle grandezze medie nella colonna, cosa che determinerà una perturbazione nell'energia cinetica turbolenta e quindi anche nel potenziale di rimescolamento. A tale alterazione il sistema reagirà cercando un nuovo punto di equilibrio. Da questo ritorno ad una situazione di stabilità si dedurrà quantitativamente la *Transilient Matrix*. Di fatto si ipotizza che possa essere applicato il *Principio di Le Chatelier* secondo cui, se si applica una perturbazione ad un sistema in equilibrio determinandone un cambiamento, si otterrà un'evoluzione dello stesso che tenderà ad annullare l'effetto della perturbazione. Si supponga che ad un certo istante arrivi alla superficie terrestre del calore di provenienza solare che riscaldi il suolo e determini un allontanamento dallo stato di equilibrio raggiunto in precedenza dal sistema *PBL*. In risposta a tale instabilità statica si svilupperà una circolazione turbolenta che muoverà dell'aria calda verso l'alto. Una volta che tale aria calda sarà salita agli strati alti del *PBL*, il sistema raggiungerà l'equilibrio e la circolazione turbolenta cesserà. Una simile evoluzione capita anche quando lo *shear* del vento cresce al punto tale da far cadere il numero di Richardson al di sotto del valore critico, determinando una instabilità dinamica del flusso. Si svilupperà in risposta una turbolenza tale da rimescolare gli strati di aria, in modo da ristabilire la stabilità dinamica senza turbolenza. Nel *PBL* non ci sono queste perturbazioni a delta di Dirac, ma continue iniezioni di energia; ciò comporta che il sistema *PBL* sia continuamente chiamato a rispondere a queste forzanti senza comunque poter ritornare immediatamente ad uno stato di equilibrio.

In pratica in ogni *time step* ha origine un processo destabilizzante in cui agiscono le forzanti attive, costituite sia dagli apporti dovuti ai flussi turbolenti sia dalle altre forzanti di contorno (forzanti dinamiche) rappresentate, nelle equazioni fluidodinamiche, da tutti i termini esclusi quelli di diffusione turbolenta. Il risultato di tale processo è l'alterazione dei profili verticali della temperatura e della velocità del vento. Se tali variazioni sono sufficienti, si verrà a generare della turbolenza come risposta a tale perturbazione. Subito dopo ha luogo il secondo processo che comporta un rimescolamento verticale dell'atmosfera e quindi una parziale soppressione della turbolenza che riduce gli *shear* e i gradienti di temperatura. Il processo di destabilizzazione, che deriva dall'immissione nel sistema dei vari flussi turbolenti superficiali, determina un'alterazione delle proprietà medie della cella inferiore della colonna d'aria. Siano:

- U, V, Θ e Q rispettivamente le due componenti medie della velocità orizzontale del vento, la temperatura potenziale e l'umidità media della cella inferiore;
- $\overline{uw}, \overline{vw}, \overline{w\theta}, \overline{wq}$ i flussi turbolenti che si instaurano al suolo tra t e $t+\Delta t$;

- Δt il time step e Δz la dimensione verticale di ogni cella

Il valore assunto dalle variabili meteorologiche medie della cella inferiore al termine del processo di destabilizzazione sarà dato dalle relazioni seguenti

$$U_d = \frac{\Delta t}{\Delta z} \cdot \overline{uw} + U_1 \quad [4.129a]$$

$$V_d = \frac{\Delta t}{\Delta z} \cdot \overline{vw} + V_1 \quad [4.129b]$$

$$\Theta_d = \frac{\Delta t}{\Delta z} \cdot \overline{w\theta} + \Theta_1 \quad [4.129c]$$

$$Q_d = \frac{\Delta t}{\Delta z} \cdot \overline{wq} + Q_1 \quad [4.129d]$$

dove U_1 , V_1 , Θ_1 e Q_1 sono i valori assunti dalle variabili medie nella cella 1 dopo l'introduzione delle forzanti non turbolente mentre le stesse variabili con pedice d sono i valori assunti dopo la destabilizzazione. Ciò viene ripetuto per ogni singola colonna d'aria e alla fine del primo passo operativo si dispone dei campi tridimensionali di tutte le variabili medie dopo aver loro applicato tutte le forzanti interne ed esterne.

Passo 2: calcolo degli elementi della Transilient Matrix

Considerando separatamente ogni singola colonna d'aria viene calcolata, sulla base dei profili medi destabilizzati ottenuti al passo precedente, la *Transilient Matrix*. I dettagli numerici per fare ciò sono riportati in Stull (1987) dove si possono trovare anche le routine base per realizzare correttamente il calcolo. Si è quindi pronti per calcolare il rimescolamento verticale in tutto il dominio di calcolo.

Passo 3: calcolo del rimescolamento verticale

Sempre operando su ogni singola colonna, l'applicazione della (4.100) consente di ottenere il nuovo profilo verticale delle variabili medie che tengono conto non solo delle forzanti interne e esterne, ma anche del rimescolamento verticale. L'insieme di tutti questi profili determina la conoscenza degli interi campi medi di interesse. A differenza dei metodi di Blackadar e Pleim e Chang, visto che la *Transilient Matrix* non è una matrice sparsa, è conveniente adottare un metodo esplicito di integrazione temporale. Dato che tutti gli autovalori della *Transilient Matrix* non possono in modulo superare l'unità, il metodo è intrinsecamente stabile e sufficientemente preciso. Sperimentazioni numeriche hanno dimostrato che è opportuno che tra Δz e Δt sussista la relazione seguente: $\Delta t < 0.1 \Delta z$.

Passo 4: calcolo del rimescolamento orizzontale

Di ciò si parlerà al punto successivo. Va comunque detto che sicuramente questo è il passo meno influente sui risultati finali.

4.6.4.4 Il rimescolamento orizzontale

Una volta calcolata la *Transilient Matrix* per ogni colonna verticale che compone il dominio di calcolo, si avrà che le varie celle del dominio potranno essere classificate in *turbolente* o *non turbolente*. Di fatto, una cella j di una colonna d'aria è turbolenta se l'elemento c_{jj} della relativa *Transilient Matrix* è diverso da zero. In Fig.4.20 è presentata una semplice rappresentazione bidimensionale in cui le celle contrassegnate dal simbolo X sono celle in cui è presente la turbolenza. Se una cella non possiede turbolenza, ovviamente non potrà scambiarla con le celle adiacenti.

Se ci si pone ad una certa quota, due celle adiacenti appartenenti a due diverse colonne potranno generare un rimescolamento turbolento se entrambe possiedono turbolenza. Sempre consideran-

do la Fig.4.20, le celle che oltre ad essere contrassegnate da X sono grigie saranno sede di un rimescolamento orizzontale reciproco.

La procedura per realizzarlo consiste nell'esaminare una colonna la volta. Per comodità, indichiamo la colonna esaminata con l'indice $i = 0$ e ciascuna delle quattro colonne adiacenti con gli indici 1, 2, 3, 4. Esaminiamo ora una quota la volta. Se la cella della colonna 0 a quella quota e la cella adiacente della colonna i non è turbolenta allora non sarà possibile alcun rimescolamento orizzontale tra le due celle e attribuiremo ad un potenziale di rimescolamento orizzontale P_{0i} , il valore $P_{0i} = 0$. Se invece entrambe sono sede di turbolenza, allora il potenziale di rimescolamento orizzontale sarà pari a:

$$P_{0i} = \frac{h_{0i} \Delta t}{\tau \cdot \Delta x} \quad [4.130a]$$

dove τ è un tempo di scala proporzionale al tempo di evoluzione tipico delle strutture turbolente. Si è visto che un valore opportuno è pari a 100 s. Con Δx , poi, si è indicata la dimensione orizzontale della cella di calcolo e con h_{0i} è una lunghezza di scala proporzionale all'estensione orizzontale tipica della struttura coerente che ha originato il rimescolamento verticale nella colonna 0 a quella quota. In pratica tale parametro risulta pari a Δz se sopra e sotto la quota in esame le celle adiacenti non sono entrambe sede di turbolenza o $M \cdot \Delta z$ se ci sono complessivamente $M-1$ delle adiacenti, sopra e sotto la quota considerata, entrambe sede di turbolenza.

		X	X		X
X		X		X	X
X	X	X		X	
	X	X	X	X	X
	X	X	X		X

Fig.4.20: visione schematica bidimensionale della presenza di celle turbolente (cotrassegnate da una X). Le celle in grigio sono anche sede del rimescolamento orizzontale (da Raymond e Stull, 1990)

Dopo aver individuato i valori P_{0i} per ogni cella i della colonna d'aria verticale, detto S il valor medio di una generica variabile di interesse (per esempio una delle due componenti orizzontali del moto) prima di realizzare il rimescolamento orizzontale e con S^h il suo valore dopo, si ha che:

$$S_i^h = \frac{\sum_{i=1}^4 P_{0i} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^4 P_{0i}} \quad [4.130b]$$

E' opportuno memorizzare in un vettore separato questo profilo corretto di S . Dopo aver operato separatamente su ogni colonna d'aria del dominio di calcolo, il campo finale per la variabile media S sarà l'insieme di tutti questi vettori contenenti i profili modificati dal rimescolamento orizzontale ottenuti in precedenza e salvati allo scopo nei vettori temporanei di cui si è detto.

4.7 VARIE FORME DELLA COORDINATA VERTICALE

Tutte le relazioni fluidodinamiche sviluppate fin qui sono state scritte in coordinate cartesiane ortogonali, che è la scelta più semplice e più immediata, anche se non sempre è la più opportuna. Per esempio, quando le equazioni fluidodinamiche dell'atmosfera devono essere applicate ad un dominio sinottico, la curvatura della terra rende difficile l'impiego delle coordinate cartesiane. In effetti, praticamente tutti i modelli a scala sinottica o globale impiegano le coordinate sferiche che sono, in questo caso, la scelta più naturale. Dato che il nostro obiettivo è la descrizione dell'atmosfera a mesoscala, non tratteremo questo argomento, rimandando chi fosse interessato a Dutton (1995) e Holton (2004). Si segnala, poi, che in Pielke (2002) il problema della scrittura delle equazioni fluidodinamiche in termini di coordinate generalizzate è trattato in maniera approfondita (e piuttosto complessa) e lì si rimanda chi fosse interessato all'argomento. Qui di seguito si tratterà, invece, un problema decisamente più semplice legato all'impiego delle equazioni fluidodinamiche in un dominio a mesoscala quando in esso sia presente l'orografia. In questo caso l'impiego delle coordinate cartesiane ortogonali risulta piuttosto difficile, visto che le superfici ad eguale quota intersecano l'orografia. Per questo caso sono stati introdotti sistemi di coordinate particolari, dette *coordinate terrain-following* di cui tratteremo qui di seguito e con cui esprimeremo le equazioni fluidodinamiche dell'atmosfera.

4.7.1 LE COORDINATE TERRAIN-FOLLOWING

In generale, le coordinate *terrain-following* sono coordinate che *seguono* l'orografia. Dal punto di vista matematico, le normali coordinate x , y e z vengono sostituite da un'altra terna di coordinate x_1 , y_1 , s che presentano le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ y_1 &= y \\ s &= f(x, y, z) \end{aligned} \quad [4.131]$$

dove f è, a priori, una qualsiasi funzione continua e derivabile. In sostanza, le coordinate orizzontali restano inalterate, mentre si introduce una nuova coordinata verticale e proprio nella definizione di tale coordinata sta la descrizione implicita dell'orografia. Per comprendere ciò, è conveniente riferirsi al dominio bidimensionale (x, z) di Fig.4.21 in cui è presente una montagna di forma estremamente regolare. In figura sono evidenziate chiaramente le coordinate x e z .

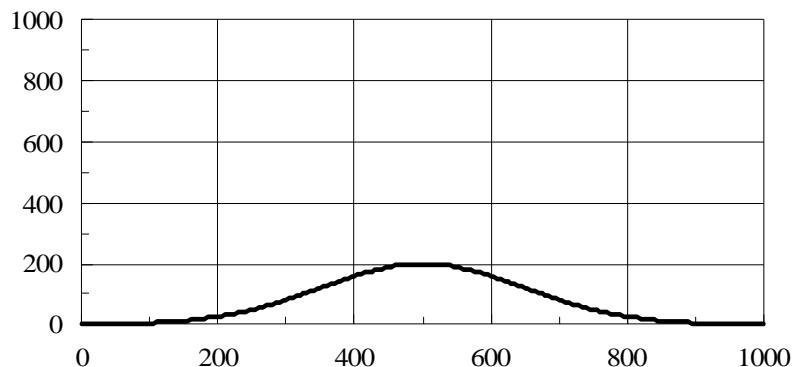


Fig.4.21: orografia in un dominio bidimensionale con coordinate cartesiane

La coordinata *terrain-following* potrebbe essere espressa da moltissime funzioni differenti, tuttavia qui di seguito prenderemo in considerazione solo tre tipi diversi di funzioni che sono le più diffuse nelle applicazioni pratiche:

$$s = H_t \cdot \frac{z - h(x, y)}{H - h(x, y)} = H_t \cdot \frac{z - h(x, y)}{Z_t(x, y)} \quad [4.132a]$$

$$s = \frac{H - z}{H - h(x, y)} = \frac{H - z}{Z_t(x, y)} \quad [4.132b]$$

$$s = z - h(x, y) \quad [4.132c]$$

In tutte le (4.132) $h(x,y)$ è la quota orografica relativa ad una quota di riferimento (per esempio il livello del mare), mentre z è la normale coordinata cartesiana verticale che indica la quota relativa alla quota di riferimento di un generico punto del dominio di indagine. Oltre a ciò, nelle prime due relazioni sono presenti due lunghezze di scala, H e H_t in generale coincidenti con la sommità del dominio di calcolo. Consideriamo ora alcune caratteristiche significative delle tre forme di coordinate *terrain-following* considerate. In primo luogo, consideriamo queste relazioni dal punto di vista dimensionale. Che in un sistema di riferimento cartesiano, le coordinate x , y e z siano delle lunghezze è del tutto evidente, come è evidente che le coordinate x e y resteranno sempre delle lunghezze in coordinate *terrain-following*. Però così non è in generale per la coordinata *verticale* s . Infatti, mentre s è una lunghezza quando si considerano le relazioni (4.132a) e (4.132c), è un numero adimensionale quando si considera la relazione (4.132b).

Con l'adozione della (4.132c) si vede immediatamente come le superfici a s costante siano rappresentate da superfici aventi la *stessa* forma dell'orografia sottostante, come indicato nella Fig.4.22. Questo tipo di coordinata verticale è estremamente semplice da comprendere ed è concettualmente comoda perché rappresenta direttamente la distanza verticale (espressa in metri) che separa il generico punto considerato dal livello del suolo.

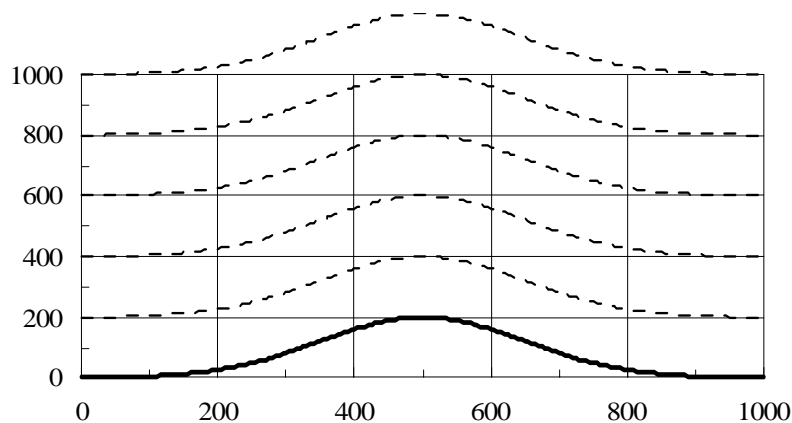


Fig.4.22: coordinate *terrain-following* secondo la relazione (4.132c)

La definizione (4.132a), invece, è concettualmente più complessa. Con H si è indicata l'estensione verticale del dominio di interesse, cioè la dimensione verticale del parallelepipedo che rappresenta in normali coordinate cartesiane il dominio stesso. Pertanto, il denominatore, indicato sinteticamente come $Z_t(x,y)$, rappresenta la distanza *cartesiana* tra la superficie del terreno e la sommità del dominio. Il numeratore $z - h(x,y)$, invece, rappresenta la distanza verticale che separa il generico punto del dominio ed il suolo. Il loro rapporto è, evidentemente, un numero adimensionale non superiore a 1. Il prodotto con H_t (che dimensionalmente è una lunghezza) fa sì che s torni ad essere dimensionalmente una lunghezza e non un numero puro. Spesso, numericamente, H_t e H sono uguali, cosa che ne semplifica apparentemente la comprensione. Questa definizione di s comporta che le superfici ad s costante siano diverse tra loro. Quando $s = 0$, la superficie corrispondente ricalca fedelmente la forma dell'orografia. Quando $s = H_t$, la superficie è il piano corrispondente alla sommità del dominio di calcolo e quando s assume valori intermedi, la corrispondente superficie assume una forma che all'aumentare di s *perde* il ricordo dell'orografia. In Fig.4.23 sono state tracciate le curve per s pari a 200, 400, 600 e 800.

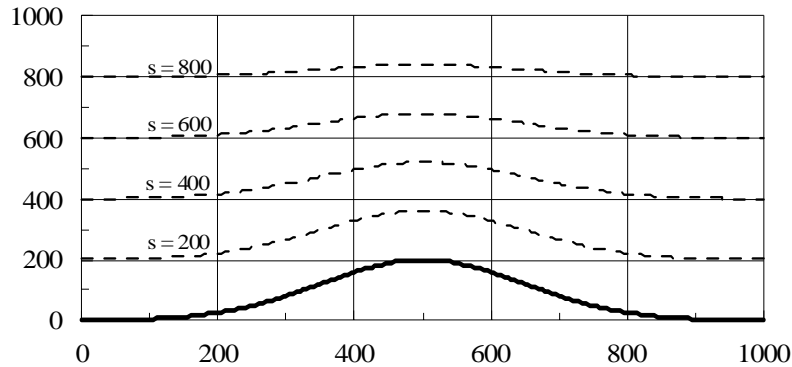


Fig.4.23: coordinate terrain-following secondo la relazione (4.132a)

La definizione (4.132b) è decisamente la più strana. Innanzitutto si nota che s dimensionalmente è un numero puro variabile nell'intervallo $0 \div 1$. In particolare si ha $s = 0$ quando $z = H$ e quindi la corrispondente superficie ad eguale s è un piano coincidente con la sommità del dominio di calcolo. Quando invece $s = 1$, la superficie ad eguale s ricalca fedelmente l'orografia. Mano a mano che s diminuisce numericamente dal valore 1 al valore 0, la superficie ad eguale s perde sempre più il ricordo dell'orografia sottostante fino a degenerare in un piano ad $s = 0$. In Fig.4.24 sono state disegnate le superfici ad s pari a 0.8, 0.6, 0.4 e 0.2.

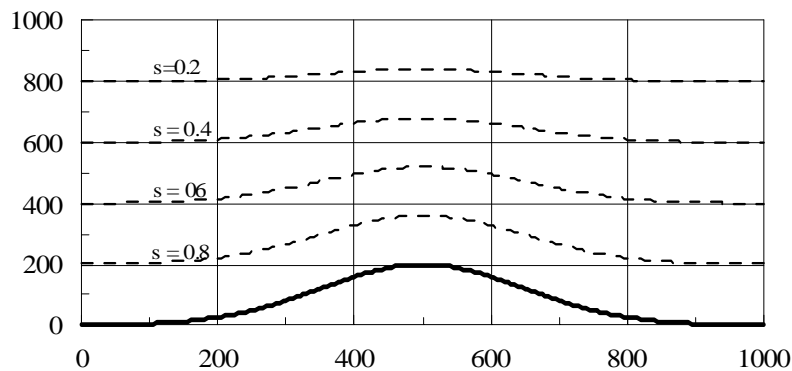


Fig.4.24: coordinate terrain-following secondo la relazione (4.132b)

4.7.2 ALCUNE RELAZIONI PRELIMINARI

Prima di evidenziare le trasformazioni che le varie equazioni del modello fluidodinamico dell'atmosfera subiscono con l'intrusione di un sistema di coordinate *terrain-following*, è indispensabile ricordare un importante risultato dell'Analisi Matematica, la *Chain Rule* (vedi anche l'Appendice A).

Si consideri una funzione $f(x,y,z)$ definita e differenziabile nel normale sistema cartesiano (x,y,z) e si consideri, inoltre, un generico sistema di coordinate *terrain-following* caratterizzato dalla proprietà espresse dalla (4.131). Secondo il Teorema della *Chain Rule* la derivata parziale di f rispetto alle coordinate x e y è data dalle relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} \end{aligned} \quad [4.133a]$$

Questo risultato ci consente di affermare che l'operatore derivazione parziale rispetto ad una

delle coordinate orizzontali del sistema cartesiano originale può essere trasformato nel sistema di coordinate *terrain-following* nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial s}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\end{aligned}\quad [4.133b]$$

Consideriamo, ora, la variabile s . Essa è una funzione di (x, y, z) e quindi il suo differenziale esatto è:

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial y} dy + \frac{\partial s}{\partial z} dz \quad [4.133c]$$

Se si dividono entrambi i membri per dt , si ottiene nella parte sinistra dell'equazione *la componente verticale del vento* w^* in coordinate *terrain-following*, mentre nella parte destra compaiono le componenti cartesiane del moto u , v e w . La relazione che ne risulta è:

$$w^* = \frac{\partial s}{\partial x} u + \frac{\partial s}{\partial y} v + \frac{\partial s}{\partial z} w \quad [4.133d]$$

e quindi, ricordando dall'Analisi che $1/(\partial s/\partial z) = \partial z/\partial s$, si ottiene:

$$w = \frac{\partial z}{\partial s} w^* - \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial x} u + \frac{\partial s}{\partial y} v \right) \quad [4.133e]$$

Appare immediato constatare che la componente verticale del moto in coordinate *terrain-following* interiorizza spontaneamente l'informazione dell'orografia presente nel dominio. A questo punto è possibile ottenere le espressioni di w e w^* specifiche di ognuna delle trasformazioni (4.132).

In particolare, se si considera la definizione (4.132a) e si applicano le relazioni ottenute, si ha che:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \left(\frac{s - H_t}{Z_t} \right) \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \left(\frac{s - H_t}{Z_t} \right) \quad \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{H_t}{Z_t} \quad [4.134a]$$

e quindi la velocità verticale del moto, in coordinate *terrain-following* ed in coordinate cartesiane è data rispettivamente dalle relazioni:

$$\begin{aligned}w^* &= \left(\frac{s - H_t}{Z_t} \right) \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v \right) + \frac{H_t}{Z_t} w \\ w &= \frac{Z_t}{H_t} w^* - \left(\frac{s - H_t}{H_t} \right) \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v \right)\end{aligned}\quad [4.134b]$$

Se, invece, si considera la definizione (4.132b) si ottiene:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \left(\frac{s}{Z_t} \right) \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \left(\frac{s}{Z_t} \right) \quad \frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{1}{Z_t} \quad [4.135a]$$

e quindi:

$$\begin{aligned}w^* &= \frac{s}{Z_t} \left[\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v \right] - \frac{1}{Z_t} w \\ w &= s \left[\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v \right] - Z_t w^*\end{aligned}\quad [4.135b]$$

Se, infine, consideriamo la definizione (4.132c) otteniamo:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial x} \quad \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial y} \quad \frac{\partial s}{\partial z} = 1 \quad [4.136a]$$

e quindi:

$$w^* = w - \left(\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v \right) \quad [4.136b]$$

$$w = w^* + \left(\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v \right)$$

4.7.3 LA NUOVA FORMA DELLE EQUAZIONI FLUIDODINAMICHE

L'impiego delle coordinate *terrain-following* altera la forma delle varie equazioni che compongono il modello fluidodinamico dell'atmosfera e nei punti che seguono vengono dedotte le loro forme funzionali per le tre definizioni date.

4.7.3.1 L'equazione di continuità

Per rendere più semplice e chiara la trattazione conviene considerare inizialmente l'equazione di continuità nella sua forma incomprimibile, secondo cui la divergenza delle componenti medie del moto è nulla. Da quanto visto in precedenza si ha che per le componenti orizzontali del moto valgono le relazioni:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \quad [4.137a]$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} + \frac{\partial s}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial s}$$

mentre per la componente verticale, dalla relazione (4.133e) risulta che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \cdot w^* \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial z}{\partial s} \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial x} u + \frac{\partial s}{\partial y} v \right) \right] = \\ &= \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial z} - \left[u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \right) + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right] = \\ &= \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial z} - \left[u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \right) + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \right] \end{aligned} \quad [4.137b]$$

Introducendo queste relazioni nell'equazione diagnostica di continuità in forma incomprimibile si ottiene l'espressione seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} + \frac{\partial w^*}{\partial s} - \left[u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad [4.137c]$$

A questo punto è necessario specificare questa relazione per ognuna delle trasformazioni *terrain-following* considerate. Se la trasformazione che si considera è la (4.132a), l'equazione di continuità diventa:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} + \frac{\partial w^*}{\partial s} - \frac{1}{Z_t} \left[u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right] = 0 \quad [4.138a]$$

Se, invece, consideriamo la (4.130b), è facile dimostrare che l'equazione di continuità in forma incomprimibile è ancora espressa dalla relazione precedente. Se, invece, si considera la trasformazione (4.132c), l'equazione di continuità in forma incomprimibile diventa semplicemente:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} + \frac{\partial w^*}{\partial s} = 0 \quad [4.138b]$$

Una volta individuata la forma per l'equazione di continuità in forma incomprimibile, è immediato ottenere la stessa in forma anelastica, che è data da:

$$\frac{\partial \rho_0 \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_0 \bar{v}}{\partial y_1} + \frac{\partial \rho_0 w^*}{\partial s} - \rho_0 \left[u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \right) \right] = 0 \quad [4.139a]$$

ed in forma elastica da:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\rho} \cdot \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\rho} \cdot \bar{v}}{\partial y_1} + \frac{\partial \bar{\rho} w^*}{\partial s} - \bar{\rho} \cdot \left[u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \right) \right] \quad [4.139b]$$

4.7.3.2 Le equazioni di Navier-Stokes

Le equazioni di Navier-Stokes sono composte da alcuni *blocchi* caratteristici: la derivata materiale della componente del moto, il termine di gradiente di pressione, il termine di Coriolis e la divergenza dei flussi turbolenti. Per quanto possibile, tutti questi *blocchi* vengono presi in considerazione uno per uno, tranne il termine di Coriolis che non si modifica. Per la complessità delle relazioni, non verrà presentato il termine di divergenza dei flussi turbolenti relativamente all'equazione della componente verticale del moto. In realtà molto spesso ci si trova ad operare con modelli idrostatici in cui tale equazione non compare. A volte il termine di dispersione turbolenta è semplificato, mantenendo solo la divergenza verticale che può essere facilmente dedotta in coordinate *terrain-following* applicando le relazioni presentate.

La derivata materiale

Tutte le tre equazioni del moto, comunque siano scritte, contengono la derivata materiale relativa alla componente media del moto.

A rigore, dovremmo parlare di derivata materiale solo quando si considerano variabili istantanee, tuttavia, per semplice comodità, detta a una qualsiasi grandezza (per esempio le componenti orizzontali medie del moto), definiamo (impropriamente) derivata materiale la relazione seguente:

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} + w \frac{\partial a}{\partial z} \quad [4.140a]$$

in cui abbiamo aggregato, come nella derivata materiale vera, il tasso di variazione di a ed il suo trasporto.

Utilizzando le (4.133b) e la (4.133d) si ha che:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= \frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} + w \frac{\partial a}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial s} \cdot \left(u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} + w^* \frac{\partial a}{\partial s} \end{aligned} \quad [4.140b]$$

Vista la genericità di a , questa considerazione vale per le due componenti orizzontali del moto, ottenendo:

$$\mathfrak{S}_{1x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + w^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \quad [4.141a]$$

$$\mathfrak{S}_{1y} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w^* \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \quad [4.141b]$$

L'applicazione di queste relazioni al caso delle trasformazioni *terrain-following* considerate è del tutto immediata.

Per ottenere una relazione analoga anche per la componente verticale del moto è necessario ricordare la trasformazione (4.133e) della velocità verticale nelle nuove coordinate. Il risultato che si ottiene è piuttosto complesso ed è dato da:

$$\mathfrak{S}_{1z} = \left[\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial x} + w^* \frac{\partial}{\partial s} \right] \cdot \left[\frac{\partial z}{\partial s} w^* - \frac{\partial z}{\partial s} \left(\frac{\partial s}{\partial x} u + \frac{\partial s}{\partial y} v \right) \right] \quad [4.141c]$$

I termini di gradiente di pressione.

Nelle equazioni di Navier Stokes sono presenti i termini di gradiente della pressione media. Se si considera in particolare:

$$\mathfrak{S}_{2x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad [4.142a]$$

impiegando la (4.133b) diventa:

$$\mathfrak{S}_{2x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} \right) \quad [4.142b]$$

Analoghi ragionamenti conducono alla relazione seguente:

$$\mathfrak{S}_{2y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y_1} + \frac{\partial s}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} \right) \quad [4.142c]$$

Se si considera il termine relativo al gradiente verticale di pressione media, è immediato constatare che vale la relazione seguente:

$$\mathfrak{S}_{2z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} \right) \quad [4.1429d]$$

Se si considerano, nello specifico, le trasformazioni (4.132):

- per la trasformazione (4.132a) si ottengono le relazioni:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{2x} &= \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \left(\frac{s - H_t}{Z_t} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} \right) \\ \mathfrak{S}_{2y} &= \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y_1} + \left(\frac{s - H_t}{Z_t} \right) \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} \right) \\ \mathfrak{S}_{2z} &= \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{H_t}{Z_t} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} \right) \end{aligned} \quad [4.143a]$$

- per la trasformazione (4.132b):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}_{2x} &= \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \left(\frac{s}{Z_t} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} \right) \\
\mathfrak{T}_{2y} &= \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y_1} + \left(\frac{s}{Z_t} \right) \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} \right) \\
\mathfrak{T}_{2z} &= \frac{1}{\rho} \cdot \left(-\frac{1}{Z_t} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} \right)
\end{aligned} \tag{4.143b}$$

- per la trasformazione (4.132c):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}_{2x} &= \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} \right) \\
\mathfrak{T}_{2y} &= \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y_1} - \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} \right) \\
\mathfrak{T}_{2z} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial s}
\end{aligned} \tag{4.143c}$$

La divergenza dei flussi turbolenti

Ognuna delle equazioni di Navier Stokes presenta tre termini che tengono conto della divergenza dei flussi turbolenti. Consideriamo inizialmente l'equazione relativa alla componente media u . I termini presenti sono:

$$\mathfrak{T}_{3x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{u' u'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{u' v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{u' w'} \right) \tag{4.144a}$$

Per poter trasformare questi termini, in cui non si è ipotizzato alcun tipo di chiusura, è necessario utilizzare le (4.133b) per trasformare le derivate rispetto alle coordinate orizzontali e trasformare la derivata rispetto a z applicando ancora una volta la *Chain Rule*. Il risultato che si ottiene è:

$$\mathfrak{T}_{3x} = \frac{\partial \overline{u' u'}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{u' v'}}{\partial y_1} + \frac{\partial s}{\partial z} \cdot \frac{\partial \overline{u' w'}}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial \overline{u' u'}}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial y} \cdot \frac{\partial \overline{u' v'}}{\partial s} \tag{4.144b}$$

Relazioni analoghe si possono ottenere anche per i termini presenti nelle altre due equazioni di Navier Stokes.

Se si utilizza una chiusura del primo ordine o di ordine uno e mezzo, la (4.144a) diventa:

$$\mathfrak{T}_{3x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{xy} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \tag{4.145a}$$

Anche in questo caso, l'uso delle (4.133b) consente di riscrivere questa equazione in termini di coordinate *terrain-following* ottenendo la relazione seguente alquanto complessa:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}_{3x} &= \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \right] \cdot \left\{ K_{xx} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right] \right\} + \\
&\quad \left[\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial s}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \right] \cdot \left\{ K_{xy} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} + \frac{\partial s}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right] \right\} + \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right)
\end{aligned} \tag{4.145b}$$

Operando in maniera del tutto analoga per i corrispondenti termini dell'equazione relativa alla componente orizzontale v , si ottiene una relazione del tutto analoga.

La complessità di queste relazioni ha condotto a tralasciare i termini ritenuti trascurabili, ottenendo alla fine le relazioni seguenti:

$$\mathfrak{S}_{3x} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(K_{xx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(K_{xy} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1} \right) + \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right) \quad [4.146a]$$

$$\mathfrak{S}_{3y} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(K_{xy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(K_{yy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} \right) + \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(K_m \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \right) \quad [4.146c]$$

Per quanto riguarda, infine, l'equazione relativa alla componente verticale del moto, presente solo quando il modello fluidodinamico non è idrostatico, l'espressione che si ottiene è decisamente troppo complessa e non è il caso di riprodurla qui. Per essa si rimanda a Jacobson (2000).

4.7.3.3 Le equazioni prognostiche per gli scalari

Per quanto riguarda le equazioni prognostiche per gli altri scalari come la temperatura potenziale virtuale, l'umidità (in fase solida, liquida e gassosa) e le specie chimiche, non c'è molto da aggiungere a quanto già detto. Infatti la derivata materiale presente in ciascuna di esse è trasformabile semplicemente impiegando la (4.140b), mentre i termini che rappresentano la divergenza dei flussi turbolenti possono essere espressi o dalla (4.144b) oppure dalla (4.146) se viene adottata una chiusura del primo ordine.

L'unico appunto da fare è relativo ai termini di sorgente presenti in esse. In generale è necessario che essi vengano esplicitati con precisione e quando in essi si rinviene un operatore differenziale (tipicamente una derivata parziale in z), la si trasforma con le regole appena introdotte. Ciò è vero in particolare per il termine di sorgente dell'equazione della temperatura potenziale virtuale in cui è sicuramente presente, tra l'altro, la divergenza verticale della radiazione netta, cioè:

$$D = \frac{\partial R_N}{\partial z} \quad [4.147a]$$

che, secondo le regole viste, si trasformerà in:

$$D = \frac{\partial s}{\partial z} \cdot \frac{\partial R_N}{\partial s} \quad [4.147b]$$

4.8 OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

I paragrafi precedenti ci hanno indicato come l'adozione di una visione stocastica della turbolenza atmosferica porti, a rigore, ad un sistema di infinite equazioni differenziali; tuttavia, l'esperienza maturata in questi ultimi decenni ci assicura che normalmente è possibile considerare le sole equazioni delle variabili medie ed eventualmente, soprattutto quando si vuole riprodurre in maniera realistica le situazioni convettive, anche le equazioni prognostiche dei momenti del secondo ordine. Questo lo si può fare, ovviamente, adottando opportune forme di chiusura delle equazioni, cioè opportune relazioni semiempiriche con cui esprimere le variabili presenti nelle equazioni, ma di cui non si abbia considerata la rispettiva equazione prognostica. A questo punto, con opportune condizioni iniziali ed al contorno, questo sistema di equazioni differenziali può essere integrato. In pratica il vero modello matematico del PBL è un insieme di equazioni basate sulle leggi di conservazione della fisica e di equazioni, sempre algebriche, che sono o la semplificazione di alcune delle relazioni prognostiche o semplici relazioni semiempiriche derivate dalle misure. Questa è una consuetudine nella fluidodinamica e anche qui non si fa eccezione. Nel Cap. 6 si presenterà la Teoria della Similarità che rappresenta un semplice apparato

semiempirico in grado di descrivere molte delle caratteristiche della turbolenza atmosferica basandosi semplicemente sull'analisi dimensionale e sulle misure sperimentali. Frequentemente i risultati della Teoria della Similarità consentono di esprimere relazioni di chiusura e, a volte, di fronte a situazioni reali particolarmente semplici, addirittura possono sostituire il modello differenziale del *PBL* con relazioni decisamente più maneggevoli.

Per quanto riguarda i metodi con cui tali equazioni possono essere integrate, non è questo il momento di parlarne. Lo faremo con un certo dettaglio in un Capitolo successivo. Va comunque subito sottolineato che lo schema di risoluzione numerica di queste equazioni riveste una importanza almeno pari alla scelta del metodo di chiusura. Infatti, metodi numerici non appropriati possono introdurre nelle soluzioni errori tali da mascherare addirittura il fenomeno fisico che si sta indagando. Pertanto, scegliere i metodi numerici più appropriati per risolvere il modello matematico del *PBL* è un'impresa delicata e difficile e non a torto alcuni hanno affermato che è quasi una forma di *arte*.

La cosa, però, di maggiore importanza che ci preme sottolineare è la seguente. Siamo partiti inizialmente affermando che per la descrizione della turbolenza del *PBL* era necessaria la conoscenza degli infiniti momenti centrali delle variabili che ne descrivono la dinamica ed ora, alla fine del Capitolo, possiamo affermare che, con una buona approssimazione, per questa descrizione possono bastare pochi momenti: i valori medi ed eventualmente i momenti secondi. E' un indubbio successo, rafforzato dal fatto che anche le condizioni iniziali ed al contorno si riferiscono a tali momenti, e quindi più facilmente misurabili o stimabili. Ovviamente non è pensabile misurare, con la tecnologia attualmente disponibile, il campo tridimensionale del vento, della temperatura potenziale ecc. in un dato istante per poter dare le condizioni iniziali e nemmeno è agevole determinare nel tempo il loro valore al contorno (al suolo e l'estremo superiore del dominio di calcolo). Tuttavia se non è possibile misurare, è però possibile stimare, per esempio con metodi interpolativi più o meno raffinati, come è consuetudine nelle diverse applicazioni geofisiche, o con tecniche di Similarità. La cosa interessante però è considerare con attenzione le relazioni di chiusura. Tutte, in una forma o in un'altra, richiedono le informazioni seguenti: il valore delle variabili medie ed i flussi verticali di quantità di moto e di calore sensibile misurati al suolo, oltre, naturalmente all'estensione verticale del *PBL*. In sostanza tutto ciò ci assicura che lo studio dettagliato di quello che avviene nei pressi del suolo è di importanza primaria nella modellizzazione dell'intero *PBL*.

Esercizi

- 4.1 Supponiamo che le componenti del vento geostrofico u_g e v_g valgano ciascuna 5 ms^{-1} ad ogni quota, che u_* sia pari a 0.3 ms^{-1} e che valga la relazione:

$$\overline{u'w'} = -(u_* + cz)^2$$

dove $c = 0.001 \text{ s}^{-1}$. Inoltre $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ e $\overline{v'w'} = 0$. Trovare l'accelerazione dell'aria nella direzione x ad una quota di 100 m entro il *PBL*, assumendo che a quella quota il valore medio delle componenti medie del moto U e V valgano rispettivamente 4 ms^{-1} e 2 ms^{-1} .

- 4.2 Si consideri una situazione di omogeneità orizzontale alla latitudine di 44° . Se si riscontra che la velocità media U presenta un'accelerazione di 5 ms^{-1} in un'ora, trascurando la variazione con la quota degli Stress di Reynolds, quale deve essere lo scostamento geostrofico della componente media V , cioè la differenza tra v_g e V ?
- 4.3 Se si riscontra un gradiente di pressione di 10 mb nella direzione Est lungo una distanza di 500 km, determinare il vento geostrofico posto che la densità dell'aria sia pari a $1.2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ e $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.
- 4.4 Se ci si trova a 30° N di latitudine e la densità dell'aria è pari a $0.76 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, a fronte di un gradiente di pressione di 4 mb per 150 km nella direzione Sud-Nord, determinare la componente u_g del vento geostrofico.
- 4.5 Qual è l'accelerazione in direzione Est-Ovest del vento a 300 m di quota dovuto al trasferimento verticale di quantità di moto dalla quota di 400 m sotto le seguenti ipotesi: $u_1 = 10 \text{ ms}^{-1}$, $z_1 = 300 \text{ m}$, $u_2 = 12 \text{ ms}^{-1}$, $z_2 = 350 \text{ m}$, $u_3 = 15 \text{ ms}^{-1}$, $z_3 = 400 \text{ m}$? Si assuma che il valore tipico del coefficiente di diffusività turbolenta sia di $50 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e che la densità dell'aria ed il coefficiente di diffusività turbolenta restino costanti con la quota.
- 4.6 Qual è la decelerazione della componente Est-Ovest del vento nella direzione Nord-Sud a causa del trasferimento di quantità di moto sotto le seguenti condizioni: $u_1 = 10 \text{ ms}^{-1}$ a $y_1 = 0$, $u_2 = 9 \text{ ms}^{-1}$ a $y_2 = 500 \text{ m}$, $u_3 = 7 \text{ ms}^{-1}$ a $y_3 = 1000 \text{ m}$, $K_z = 100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e K_z e densità dell'aria costanti con la quota.
- 4.7 Qual è la fluttuazione di densità corrispondente ad una fluttuazione di temperatura di 0.1 K ? Assumere che il valor medio della temperatura è 300 K e la densità dell'aria è $1.1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.
- 4.8 Immaginiamo di stare negli Stati Uniti poco prima che un tornado si abbatta sulla vostra casa. Immaginiamo che voi abbiate un box per l'automobile e che al suo interno la densità dell'aria sia di $1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Immaginate poi di aver dimenticato aperto l'ingresso del box e che un vento di $100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ entra dall'ingresso da Ovest, ma l'aria entrata nel box non può uscire da Est per la mancanza di ogni apertura. Inoltre, per il momento il vostro box è intatto e quindi non permette all'aria entrata di fuoriuscire. Se il vostro box è lungo 8 m nella direzione Est Ovest, quale variazione di pressione si avrà nel vostro box nel primo secondo? (Stull, 2000).