



*Meteorologia e Micrometeorologia
per l'inquinamento atmosferico
2011*

Parte 2

Modello Fluidodinamico del PBL

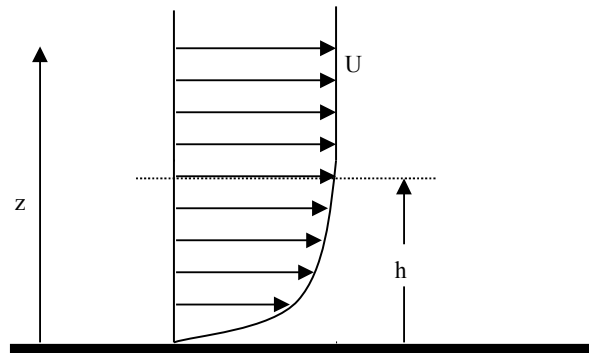
*dott. Roberto Sozzi
dott. Andrea Bolignano*

Aria del PBL → Fluido Viscoso

1. Consideriamo uno strato di atmosfera che scorre con velocità orizzontalmente omogenea sopra una superficie orizzontale;
2. Suddividiamo questo strato in tanti *straterelli* sovrapposti di spessore verticale molto piccolo;
3. Due generici *straterelli* sovrapposti *strisciano* uno sull'altro scambiandosi uno sforzo di taglio τ proporzionale alla differenza di velocità che li contraddistingue secondo la legge (di Newton) [μ è la viscosità]:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$$

4. Lo straterello a contatto con la superficie rigida aderisce ad essa e possiede velocità nulla (***no-slip condition***)



$PBL \Rightarrow$ porzione di troposfera \Rightarrow *Fluido Newtoniano Viscoso*

Dovrebbe essere modellizzato con le Leggi di Conservazione, cioè con i normali metodi della Fluidodinamica.

Dominio di Calcolo e Variabili.

Dominio di calcolo = porzione di troposfera a forma di parallelepipedo a base inferiore al suolo e superiore oltre l'altezza di rimescolamento.

Sistema di coordinate = cartesiano ortogonale meteorologico.

Variabili considerate = ***valori istantanei*** di

\Rightarrow componenti u , v e w del vento

\Rightarrow temperatura potenziale θ

\Rightarrow pressione barometrica p

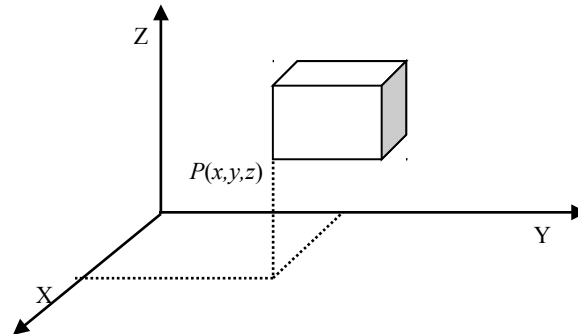
\Rightarrow densità dell'aria ρ

Relazioni di base del modello

Si ottengono considerando un volume di controllo centrato nel punto $P(x,y,z)$ all'istante t

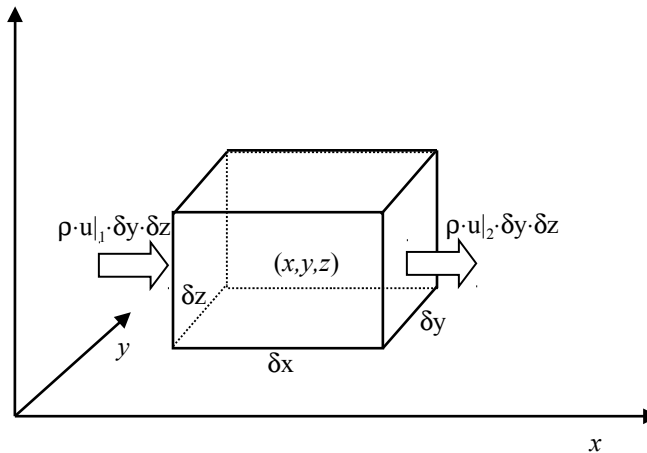
- *legge di conservazione della massa*
- *legge di conservazione della quantità di moto*
- *legge di conservazione dell'entalpia*
- *equazione dei gas perfetti*

(Per semplicità non si considerano l'acqua liquida e le sostanze inquinanti presenti nel PBL)



1. Conservazione della Massa

Bilancio di Massa per il volume di controllo in un contesto euleriano



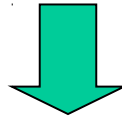
$$-\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

È un'equazione prognostica, cioè un'equazione che determina la **variazione nel tempo della densità dell'aria**.

È scritta in forma di flusso.

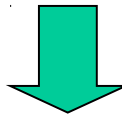
In molte situazioni si ha che

$$(d\rho/dt)/\rho \ll \partial u_j / \partial x_j$$



Fluido incompressibile (si trascurano le variazioni di densità)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

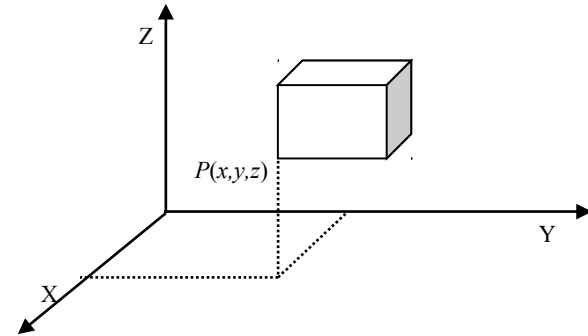


Equazione diagnostica per le componenti del vento

2. Conservazione della Quantità di Moto

A) Derivata Materiale

Consideriamo una **Particella Lagrangiana** che al tempo t_0 coincide col **volume di controllo** in $P(x,y,z)$ a t_0 .



Al generico istante t la particella:

- segue una traiettoria definita dalle funzioni $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$
- possiede la velocità (u,v,w) data dalle funzioni:

$$u = \left(\frac{dx}{dt} \right)_t \quad v = \left(\frac{dy}{dt} \right)_t \quad w = \left(\frac{dz}{dt} \right)_t$$

Se a t_0 la particella possiede una proprietà fisica f (es. una delle componenti della quantità di moto per unità di massa, calore, ecc.), **quanto tale proprietà varierà da t_0 ad un istante $t = t_0 + \delta t$?**



Sviluppo in Serie di Taylor
della funzione $f = f(x, y, z, t)$

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \delta t + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot [x(t_0 + \delta t) - x(t_0)] + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot [y(t_0 + \delta t) - y(t_0)] + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot [z(t_0 + \delta t) - z(t_0)] + O(\delta t^2)$$

Quando $\delta t \rightarrow 0$, il **tasso di variazione di f** è dato da:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta t}$$

che risulta pari alla **derivata materiale** (equazione di Eulero)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Il tasso di variazione di una proprietà f di una **particella in moto lagrangiano** è pari alla somma del tasso locale (al tempo t nel punto P) di f più l'avvezione.

$$\underbrace{\frac{df}{dt}}_{\text{Derivata Materiale}} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{Derivata Locale}} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}$$

Avvezione

Se la proprietà f è una della tre componenti della velocità della particella, dall'equazione di Eulero si ha che:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

Ricordiamo che la velocità euleriana del fluido all'istante t nel punto $P(x,y,z)$ coincide con la velocità della particella che a quell'istante si viene a trovare in quella posizione.

B) Conservazione della quantità di Moto

Consideriamo una **Particella Lagrangiana** che al tempo t_0 coincide col **volume di controllo** in $P(x,y,z)$ a t_0 .

Ipotizziamo che sulla particella di aria agisca una forza $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ per unità di massa dovuta alle varie *forzanti atmosferiche* (che specificheremo poi).

Dalla **Seconda Legge di Newton** abbiamo che, se il sistema è inerziale, valgono le relazioni di moto seguenti che rappresentano **la conservazione della Quantità di Moto**:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = F_x \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = F_y \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = F_z \end{cases}$$

Forzanti atmosferiche

1. La forzante derivante dalla rotazione terrestre che induce la forza apparente di Coriolis (il sistema di riferimento non è inerziale)
2. La forzante derivante dai gradienti di pressione dovuti alla non omogeneità ed anisotropia della distribuzione barica in atmosfera
3. La forzante derivante dall'azione della gravità terrestre sulla particella di aria
4. La forzante derivante dalla viscosità del fluido

Tenendo conto di tutte queste forzanti, le equazioni che esprimono il **bilancio della quantità di moto** (le equazioni del moto) risultano così espresse:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + f^* u + \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]\end{aligned}$$

N.B. $\nu = \mu / \rho$ è la *viscosità cinematica dell'aria*

Struttura tipica delle equazioni prognostiche



$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_c v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\}$$

Termine di Trasporto ⇒ Derivata sostanziale
Termine inerziale
Diffusione molecolare



$$\frac{du(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

Termini non lineari

Conservazione dell'Entalpia

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = v_{\theta} \left\{ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right\} + \text{Source / Sink}$$

Conservazione del vapor d'acqua

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} = v_q \left\{ \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right\} + \text{Source / Sink}$$

Entalpia



$$H=U+PV$$

v_{θ} diffusività termica

v_q diffusività molecolare del vapor d'acqua

Legge dei Gas Perfetti

$$p = \rho RT$$

In **tutte** le equazioni si considerano i **valori istantanei delle variabili**.

**Le variabili sono 7 ($u, v, w, \rho, p, q, \theta$) e le equazioni sono 7,
*il sistema è formalmente chiuso.***

In teoria:

- se si conoscessero le condizioni iniziali del fluido
- e le condizioni al contorno

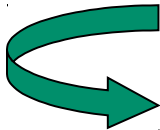


il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali dovrebbe potersi risolvere.

Data la complessità matematica, non è possibile una sua risoluzione analitica, tuttavia è sperabile una sua soluzione almeno numerica.

Ciò in pratica non è possibile perché:

- ⇒ le equazioni **non sono lineari** e hanno caratteristiche tipiche dei **sistemi caotici** (sono deterministiche, ma il loro comportamento risulta estremamente irregolare e apparentemente stocastico);
- ⇒ per una loro risoluzione numerica su un dominio di calcolo realistico sarebbero necessari **computer con potenze di calcolo lontane dalle possibilità attuali**;
- ⇒ si dovrebbero fornire al modello le **condizioni iniziali e al contorno relative alle variabili istantanee** in tutto il dominio di calcolo.



Cosa totalmente impossibile in pratica, soprattutto per il fatto che i sistemi caotici risultano estremamente sensibili a piccoli errori proprio nelle condizioni iniziali.

L'inutilizzabilità pratica del modello fluidodinamico nella descrizione del PBL deriva:

- dalla non linearità delle equazioni prognostiche, presenti soprattutto nei termini avvevivi
- dalla ipersensibilità alle condizioni iniziali.

Non linearità dei termini avvevivi

Per esplorare in modo semplice l'effetto della non linearità dei termini avvevivi, è opportuno considerare la più semplice equazione del moto:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Immaginiamo che al tempo t_0 , la velocità (funzione solo del tempo e della coordinata x) sia espressa dalla funzione cosinusoidale (armonica) seguente:

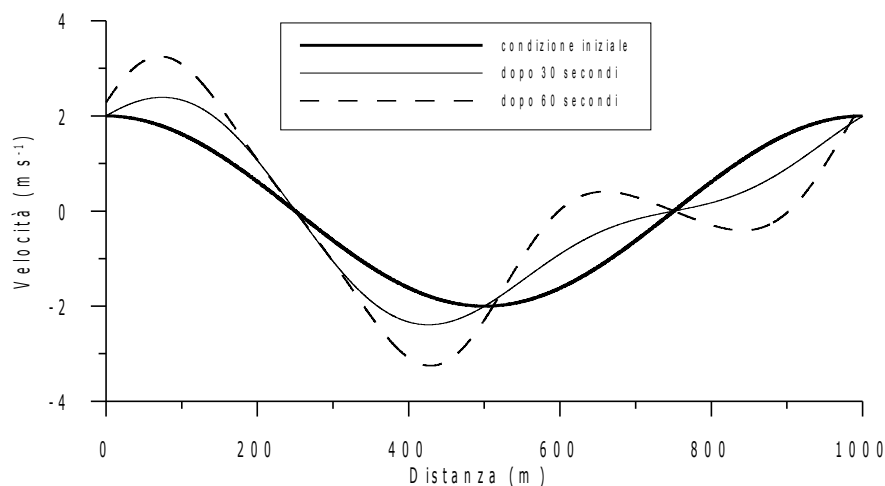
$$U(x, t_0) = B \cos(kx) = B \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$$

Cerchiamo ora quale sarà il campo di moto al tempo $t = t_0 + \Delta t$. Il risultato è dato da:

$$U(x,t) = B \cos(kx) + (t-t_0) \cdot B^2 k \sin(2kx) + \dots$$

Quindi, dopo un tempo Δt il campo di moto, costituito inizialmente da una sola armonica, acquista un'ulteriore armonica che ne rende meno regolare la forma.

Procedendo con altri incrementi temporali, il segnale inizialmente monocromatico, diventa via via più irregolare, fino ad apparire completamente casuale.



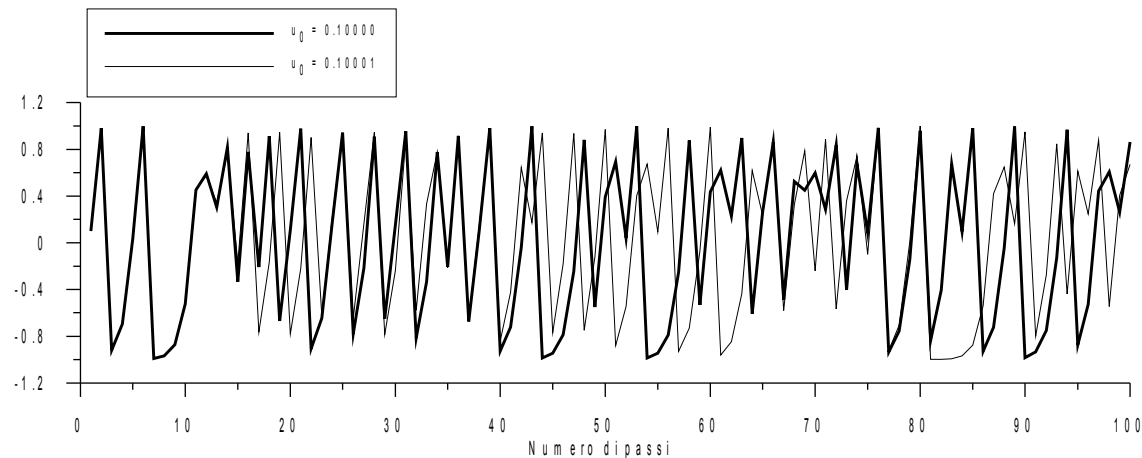
Ipersensibilità alle condizioni iniziali

Per esplorare in modo semplice l'effetto della ipersensibilità alle condizioni iniziali è possibile considerare una forma semplificata dell'equazione di moto monodimensionale, opportunamente discretizzata. Se ipotizziamo di considerare un punto del dominio monodimensionale ed eseguiamo due esperimenti numerici in cui all'istante $t = 0$:

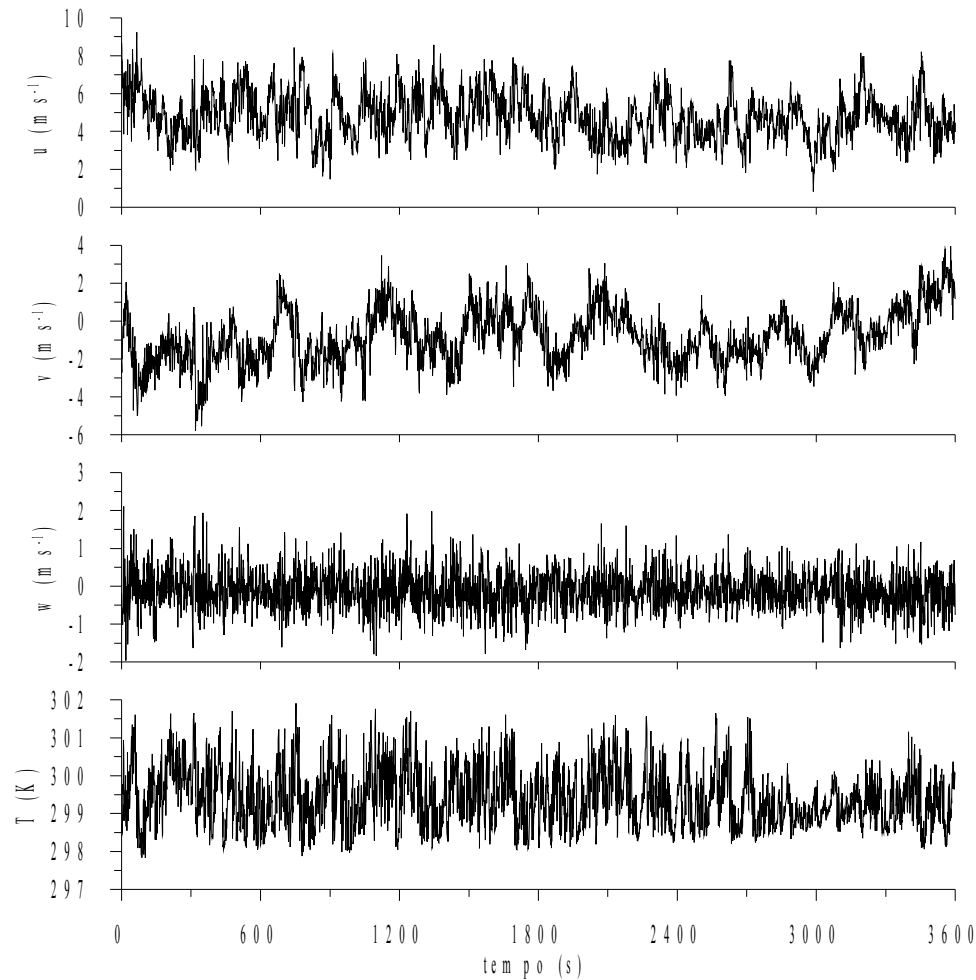
$$u_0 = 0.10000$$

$$u_0 = 0.10001$$

otterremo, col passare del tempo, soluzioni completamente diverse.



Che l'irregolarità, o meglio la caoticità, sia intrinseca alle variabili meteorologiche misurate nel PBL è un'evidenza sperimentale.



Che fare?

1. È un dato di fatto che l'aria nel PBL (ed in tutta l'atmosfera) si comporta in maniera deterministica, seguendo le leggi di conservazione e quindi le relazioni differenziali presentate.
2. È un dato di fatto l'ipersensibilità di queste relazioni alle condizioni iniziali ed alle non linearità presenti in esse.
3. Ciò ci suggerisce che le soluzioni che da esse potremmo ottenere dovrebbero essere irregolari e sensibili alle condizioni iniziali.
4. In effetti questa irregolarità la troviamo nelle misure, che pur essendo deterministiche, appaiono come realizzazioni di processi stocastici.
5. Sulla base di tutto ciò, possiamo fare l'ipotesi di lavoro che **ogni variabile meteorologica** che descrive il PBL sia la **somma di una componente deterministica che varia nello spazio e nel tempo in maniera sufficientemente regolare e di una componente completamente stocastica.**

Il modello fluidodinamico, corretto e chiuso, non può essere impiegato in pratica



Ciò che realisticamente si può conoscere, sono i valori medi delle variabili caratteristiche del PBL e pochi altri indicatori statistici (come varianze e covarianze).



E' necessario, quindi, costruire un **modello in cui siano presenti non i valori istantanei, ma i valori medi ed eventualmente varianze e covarianze.**

Bibliografia Essenziale

R. Sozzi, T. Georgiadis, M. Valentini (2002): Introduzione alla turbolenza atmosferica (ed. Pitagora)

Approfondimenti:

R. Sozzi – Capitolo 2: Modello Fluidodinamico del PBL

R.B. Stull (1988): An Introduction to Boundary Layer Meteorology (ed. Kluwer)

Blackadar (1997): Turbulence and Diffusion in the Atmosphere-Lectures in Environmental Sciences (ed. Springer)

J.R. Garratt (1992): The atmospheric boundary layer (Cambridge University Press)

J. Dutton (1986): Dynamic of Atmospheric Motion (ed. Dover)

R.A. Pielke (2002): Mesoscale meteorological modeling (Academic Press)