Meteorologia e Micrometeorologia per l'inquinamento atmosferico

2011

Parte 4

Modello Operativo del PBL

dott. Roberto Sozzi
dott. Andrea Bolignano

ARPALAZIO

Modello Fluidodinamico

- Variabili istantanee
- Modello *esatto*
- Modello *chiuso*
- Caratteristiche <u>caotiche</u>

Le **caratteristiche caotiche** del sistema di equazioni differenziali che costituiscono il modello *comportano* soluzioni che appaiono **realizzazioni di processi stocastici**

Inutilizzabile Operativamente

Ipotesi di Lavoro
Consideriamo le variabili meteorologiche del PBL come **campi stocastici**

Ipotesi di Reynolds

Ipotesi di Reynolds

Ogni variabili istantanea che caratterizza il PBL, relativa ad un punto dello spazio può essere vista come la somma di due parti:

- un valore medio (costante e deterministico)
- una fluttuazione stocastica

$$F(t) = \overline{F} + F'(t)$$

Variabile Istantanea

Valore Medio
Deterministico e Costante

Fluttuazione Stocastica
A meda nulla

Caratteristiche dell'Operatore Media

L'operatore Media impiegato nell'Ipotesi di Reynolds deve possedere le seguenti proprietà:

$$A(t) = \overline{A} + a'(t) \qquad B(t) = \overline{B} + b'(t) \qquad c = \text{costante}$$

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

$$\overline{a'} = 0$$

$$\overline{cA} = c\overline{A}$$

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{\overline{A}B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{\frac{\partial A}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial t}$$

$$\overline{\frac{\partial A}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial x}$$

$$\overline{\frac{\partial a'}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial a'}{\partial x}} = 0$$

L'unico **Operatore Media** che rispetta *esattamente* tutte queste proprietà è la **media d'insieme** (cioè il valore atteso statistico)

Una considerazione importante

Consideriamo due variabili meteo del PBL (es. componente verticale del vento w e temperatura potenziale θ:

$$\begin{cases} w(t) = \overline{w} + w'(t) \\ \theta(t) = \overline{\theta} + \theta'(t) \end{cases}$$

$$\overline{w\theta} = \overline{\left(\overline{w} + w'(t)\right)\cdot\left(\overline{\theta} + \theta'(t)\right)} =$$

$$= \overline{\overline{w}\cdot\overline{\theta}} + \overline{\overline{w}\theta'} + \overline{w'\overline{\theta}} + \overline{w'\theta'} =$$

$$= \overline{w}\cdot\overline{\theta} + \overline{w}\cdot\overline{\theta'} + \overline{w'}\cdot\overline{\theta} + \overline{w'\theta'} =$$

$$= \overline{w}\cdot\overline{\theta} + \overline{w'\theta'}$$

Flusso Medio di calore **Flusso turbolento di calore**

In *pratica*, la **media di insieme** non è utilizzabile.

Normalmente viene spontaneo utilizzare la **media temporale** definita, per un generico processo stazionario, nel modo seguente:

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot dt$$

La media di insieme e la media temporale coincidono?

In generale le due medie non coincidono

Un **<u>processo stocastico</u>** per cui **la media di insieme** e la **media temporale <u>coincidono</u>** viene detto **processo stocastico ergodico.**

Non è detto che le variabili del PBL siano processi ergodici.

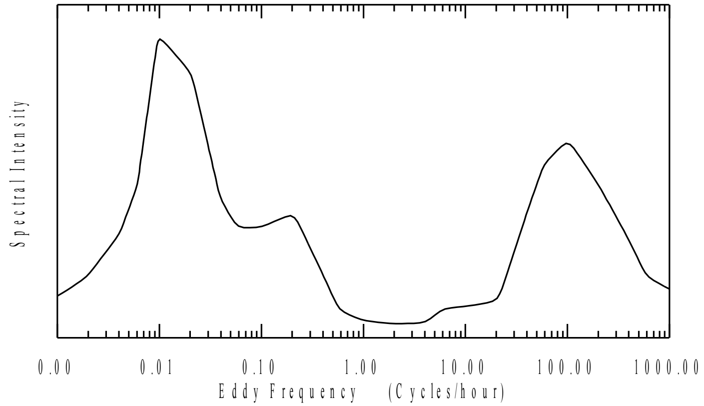
Per comodità (e non potendo fare nulla di meglio) si ipotizza che <u>tutte</u> le variabili meteorologiche caratteristiche del PBL siano <u>variabili ergodiche</u> e quindi possiamo adottare la media temporale al posto della media d’insieme

ARPALAZIO

La definizione di Media Temporale implica un **tempo di mediazione infinito** e perciò non risulta direttamente applicabile. Se però:

- consideriamo per esempio la velocità del vento
- e la vediamo come sovrapposizione di segnali armonici (sinusoidali)
- e se consideriamo l’ampiezza delle varie armoniche (cioè la loro importanza reciproca)

otteniamo lo **spettro** della velocità del vento.



Dallo spettro vediamo che esiste una **banda spettrale** che separa i moti a grande scala, con periodo caratteristico superiore al giorno, dai moti a piccola scala (turbolenti) con periodo dell’ordine dell’ora.

Se adottiamo un tempo di mediazione non superiore all’ora per tutte le variabili caratteristiche del PBL, possiamo essere ragionevolmente certi che i processi stocastici che li rappresentano sono ergodici e che la media temporale (con periodo di mediazione dell’ordine dell’ora) ben approssima la media di insieme.

Deduzione del Modello Operativo del PBL

- Ogni variabile caratteristica del PBL (le tre componenti del vento, la temperatura potenziale, la pressione, la densità, l’umidità, ecc.) viene scomposta in un valore medio ed in una fluttuazione turbolenta secondo l’ipotesi di Reynolds;
- Inserisco nelle varie equazioni alle derivate parziali del modello fluidodinamico le variabili così decomposte;
- Medio entrambi i membri delle varie equazioni;
- Manipolo opportunamente le equazioni così ottenute in modo tale da ottenere l’insieme di equazioni differenziali alle derivate parziali relative ai vari momenti statistici di interesse.

Questa procedura è concettualmente semplice, è costituita solo da manipolazioni algebriche, ma è estremamente noiosa.

ARPALAZIO

Equazioni relative ai valori medi (momenti del primo ordine)

Legge di Conservazione della Massa

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0$$

Ipotesi di incomprimibilità

L'equazione di conservazione della massa scritta per le variabili media è analoga a quella scritta per le variabili istantanee

Legge di conservazione della Quantità di Moto

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+v\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+w\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+f_c v-\left\{\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right\}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}+u\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+v\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+w\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-f_c u-\left\{\frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}\right\}$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}+u\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}+v\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}+w\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g-\left\{\frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z}\right\}$$

La presenza di quest'ultimo termine implica che la *turbolenza deve sempre essere considerata*, anche quando si sia interessati soltanto alle variabili medie;

sottolinea il fatto che il valore medio di una componente del vento non dipende solo dal valore medio delle altre, ma anche dalla loro covarianza.

ARPALAZIO

Struttura Tipo di un'Equazione Prognostica

Tasso di Variazione locale della variabile

Termine di pressione

Termine di Coriolis

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \underbrace{f_c \overline{v}} - \left\{ \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right\}$$

Trasporto (avvezione) media

Divergenza del flusso turbolento di quantità di moto (Stress di Reynolds)

Legge di Conservazione dell'Entalpia

$$\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t}+u\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}+v\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}+w\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z}=-\left\{\frac{\partial\overline{\theta'u'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\theta'v'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\theta'w'}}{\partial z}\right\}+Source/Sink$$

Legge di Conservazione del vapor d'acqua

$$\frac{\partial\overline{q}}{\partial t}+u\frac{\partial\overline{q}}{\partial x}+v\frac{\partial\overline{q}}{\partial y}+w\frac{\partial\overline{q}}{\partial z}=-\left\{\frac{\partial\overline{q'u'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{q'v'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{q'w'}}{\partial z}\right\}+Source/Sink$$

Legge di Conservazione di uno scalare

$$\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t}+u\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}+v\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}+w\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z}=-\left\{\frac{\partial\overline{\theta'u'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\theta'v'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\theta'w'}}{\partial z}\right\}+Source/Sink$$

Legge dei Gas Perfetti

$$p=\rho R\overline{T}$$

ARPALAZIO

Se si trascura per semplicità l’equazione del vapor d’acqua e della concentrazione delle sostanze scalari

in questo modello le variabili sono:

$$\begin{bmatrix} \overline{p}, & \overline{\rho}, & \overline{\theta} \\ \overline{u}, & \overline{v}, & \overline{w}, \\ \overline{u'u'}, & \overline{v'v'}, & \overline{w'w'}, \\ \overline{u'v'}, & \overline{u'w'}, & \overline{v'w'}, \\ \overline{u'\theta'}, & \overline{v'\theta'}, & \overline{w'\theta'} \end{bmatrix}$$

Le variabili sono 15, le equazioni sono sempre 6

$\Downarrow$

il sistema di equazioni non è chiuso.

$\Downarrow$

Mancando equazioni, è necessario individuare delle relazioni semiempiriche che consentano di esprimere le variabili in eccesso (varianze e covarianze) in funzione delle variabili medie.

$\Downarrow$

Schemi di Chiusura

Componenti del vento geostrofico (equilibrio tra pressione e forza di Coriolis)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + w\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + f_c v - \left\{\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right\}$$

$$f_c \bar{u}_g = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \qquad f_c \bar{v}_g = +\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \overline{u_j}\cdot\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} = +f_c\cdot\left(\bar{u}_g - \bar{u}\right) - \frac{\partial \overline{u'_j\, v'}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \overline{u_j}\cdot\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = -f_c\cdot\left(\bar{v}_g - \bar{v}\right) - \frac{\partial \overline{u'_j\, u'}}{\partial x_j}$$

Ipotesi

- **ambiente secco**
- **omogeneità orizzontale**
- **assenza di subsidenza**

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = f_c(\overline{v} - \overline{v_g}) - \frac{\partial\left(\overline{u'w'}\right)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} = -f_c(\overline{u} - \overline{u_g}) - \frac{\partial\left(\overline{v'w'}\right)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} = -\frac{\partial(\overline{w'\theta'})}{\partial z}$$

Le incognite di queste equazioni sono rappresentate dai tre momenti del secondo ordine riportati nelle equazioni

$$\overline{u'w'}, \quad \overline{v'w'}, \quad \overline{w'\theta'}$$

ARPALAZIO

Chiusura del primo ordine (di tipo K)

Il modo più semplice per *esprimere le variabili in eccesso* (che sono sempre o varianze delle componenti del vento o le covarianze tra la temperatura e le singole componenti del vento) è:

$$\overline{w'F'} = -K_F \frac{\partial \overline{F}}{\partial z}$$

K_F Coefficiente di diffusività turbolenta

$$\overline{v'w'} = -K_m \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \qquad \overline{u'w'} = -K_m \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \qquad \overline{w'\theta'} = -K_k \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}$$

Ipotesi di base

$\Downarrow$

Flusso/covarianza verticale/orizzontale di una variabile proporzionale al gradiente locale verticale/orizzontale della variabile stessa.

Coefficiente di proporzionalità = Diffusività turbolenta

Alcuni esempi:

⇒ **Condizioni Stabili**:

$$K_m(z) = ku_* z \cdot (1 - z/h)^{1.5} / (1 + 4.7z/L)$$

⇒ **Condizioni Convettive**:

$$K_m(z) = 2.5 w_* z_i (1 - z/z_i)(z/z_i)^{1.5}$$

Molte sono le *relazioni semiempiriche* che esprimono i vari coefficienti *K* (coefficienti di diffusività turbolenta).

Tutte sono dipendenti dai parametri che caratterizzano la turbolenza del PBL, cioè:

⇒ u_*

⇒ H_0

⇒ z_i

⇒ w_*

ARPALAZIO

Riepilogo delle Equazioni
(Chiusura K)

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = f_c(\overline{v} - \overline{v_g}) - \frac{\partial\left(\overline{u'w'}\right)}{\partial z}$$

$$\overline{u'w'} = -K_m \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} = -f_c(\overline{u} - \overline{u_g}) - \frac{\partial\left(\overline{v'w'}\right)}{\partial z}$$

$$\overline{v'w'} = -K_m \frac{\partial \overline{v}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} = -\frac{\partial(\overline{w'\theta'})}{\partial z}$$

$$\overline{w'\theta'} = -K_k \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}$$

A cui si aggiungono l’equazione di stato dei gas e l’equazione di bilancio di massa

ARPALAZIO

Visto che nelle equazioni per i valori medi compaiono i momenti del secondo ordine (varianze e covarianze)

È possibile, semplice (ma noioso) ottenere anche delle equazioni per i momenti del secondo ordine che:

- **sono numericamente molto superiori di quelle relative ai momenti del primo ordine (es. se considero solo u, v, w, θ, le equazioni relative solo ai monenti sono 9)**
- **in queste equazioni compaiono però i <u>momenti del terzo ordine</u>**

Ma potrei ricavare le equazioni dei momenti del terzo ordine e vedrei comparire in esse i momenti del quarto ordine

E così via, all'infinito.

ARPALAZIO

Se ipotizzo che ogni variabile del PBL sia una variabile stocastica, per un noto Teorema della Statistica mi devo aspettare che la descrizione completa di esse può essere fatta solo conoscendo tutti gli infiniti momenti che posso costruire con tali variabili.

Ciò comporterebbe la scrittura un numero infinito di equazioni, tutte differenziali alle derivate parziali.

Quindi, all’atto pratico, il modello operativo del PBL non è mai chiuso e lo si deve chiudere con opportune ipotesi di chiusura (cioè di parametrizzazione dei momenti per cui non sono state scritte le relative equazioni) di cui la Chiusura di tipo K è un esempio importante.

La Chiusura di Tipo K è stata la prima ad essere utilizzata nei modelli numerici di PBL, ma si è visto abbastanza presto che essa non consentiva di trattare in maniera abbastanza realistica le situazioni convettive.

Per ovviare a ciò, sono state realizzate chiusure alternative di ordine superiore.

In pratica, nei modelli numerici di uso pratico vengono introdotte chiusure del secondo ordine in cui:

- oltre alle equazioni prognostiche per le variabili medie
- vengono scritte anche le equazioni per alcuni (o tutti) i momenti del secondo ordine,
- parametrizzando i momenti per cui non sono state scritte le rispettive equazioni.

È stata sviluppata una famiglia di chiusure del secondo ordine note come Chiusure di Mellor-Yamada che differiscono tra loro solo per il numero di momenti che vengono trattati esplicitamente.

Chiusure Non Locali

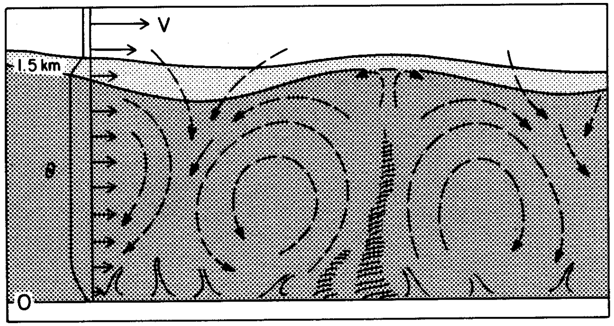
La caratteristica principale di tutte le Chiusure finora considerate sta nel fatto che le relazioni di chiusura mettono in relazione un momento con altre proprietà (in genere differenziali) possedute dal fluido esattamente nel punto dello spazio-tempo cui si riferisce il momento stesso.

Quindi queste chiusure sono intrinsecamente locali.

Chiusura K $\overline{w'\theta'} = -K_h \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}$

Il Flusso Turbolento di calore sensibile in un punto dello spazio è direttamente proporzionale al gradiente verticale locale di temperatura potenziale.

Ma i grandi Vortici Convettivi



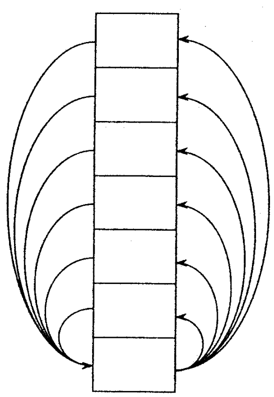
Suggeriscono che le proprietà turbolente di un punto possono essere influenzate anche dalle proprietà di punti molto distanti dello spazio, cioè **possono avere una spiegazione non locale**.

La presenza dei grandi vortici convettivi suggerisce che la chiusura locale può non essere realistica.

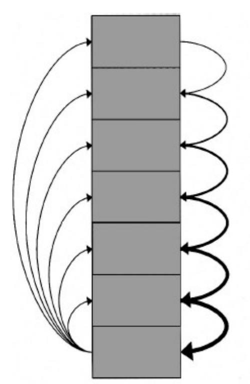
Sono stati sviluppato Schemi di Chiusura non Locale per descrive più realisticamente questi fenomeni

Modelli di

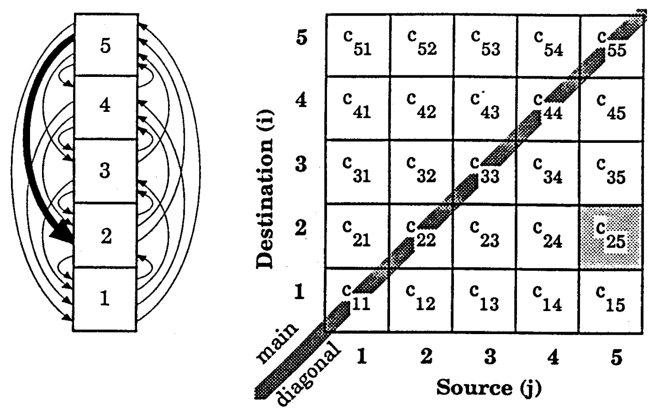
Blackadar



Pleim e Chang



Stull



In sostanza, una chiusura non locale tratta i flussi in un punto dello spazio come se fosse il risultato del trasporto di proprietà da differenti parti dello spazio, mimando il comportamento reale dei vortici turbolenti.

.... per concludere ...

Chiusura locale di tipo K:

1. è concettualmente molto semplice
2. richiede poche equazioni
3. è facilmente parametrizzabile
4. è adatta a trattare situazioni stabili caratterizzate dalla presenza di vortici di piccola dimensione
5. è totalmente inadatta a descrivere le situazioni convettive

Chiusura locale di ordine superiore:

1. richiede molte equazioni differenziali per la descrizione dei momenti trattati esplicitamente
2. richiede la parametrizzazione dei momenti non trattati esplicitamente, non sempre semplici da individuare
3. è necessaria per le situazioni convettive

Chiusure non locali:

1. sono relativamente semplici
2. sono adatte soprattutto in presenza di situazioni convettive

Bibliografia Essenziale

R. Sozzi, T. Georgiadis, M. Valentini (2002): Introduzione alla turbolenza atmosferica (ed. Pitagora)

Approfondimenti:

R. Sozzi – Capitolo 4: Modello Operativo del PBL

R.B. Stull (1988): An Introduction to Boundary Layer Meteorology (ed. Kluwer)

Blackadar (1997): Turbulence and Diffusion in the Atmosphere-Lectures in Environmental Sciences (ed. Springer)

J.R. Garratt (1992): The atmospheric boundary layer (Cambridge University Press)

R.A. Pielke (2002): Mesoscale meteorological modeling (Academic Press)

ARPALAZIO