



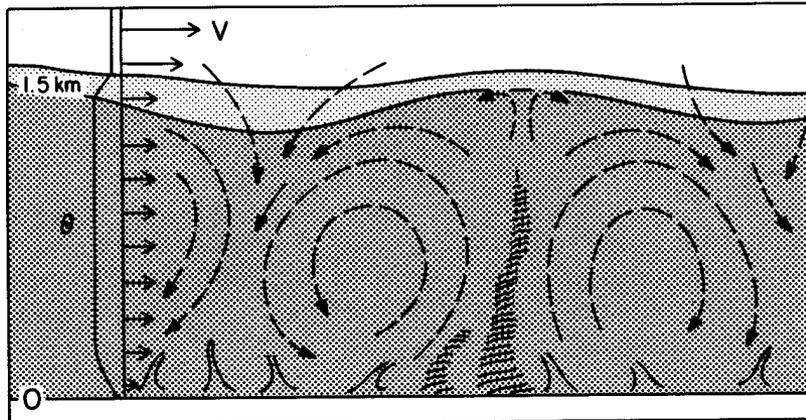
***Meteorologia e Micrometeorologia
per l'inquinamento atmosferico
2011***

Parte 5

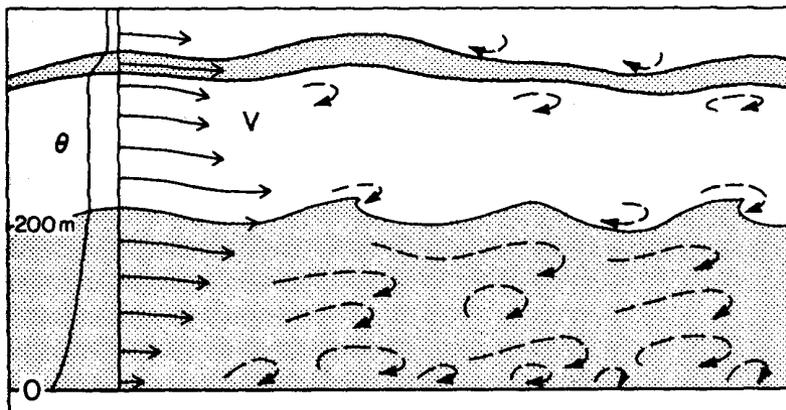
**Le Scale della
Turbolenza**

*dott. Roberto Sozzi
dott. Andrea Bolignano*

Situazione Convettiva



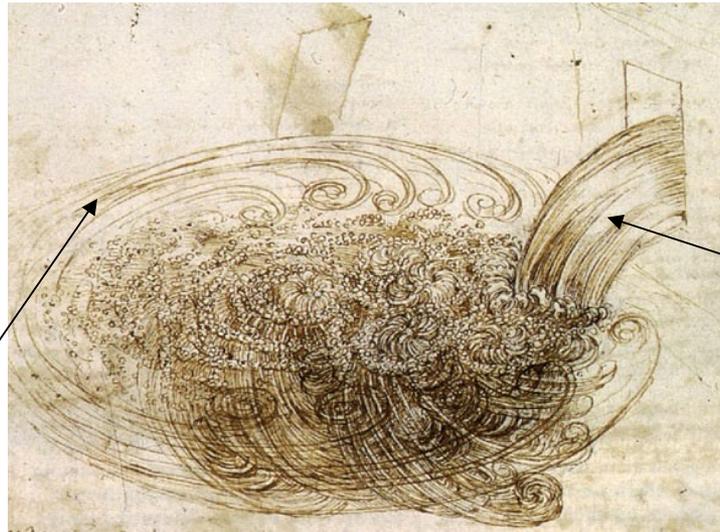
Situazione Stabile



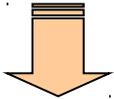
Elemento Caratteristico del moto turbolento nel PBL

- Moto medio di traslazione
- Disturbi nel moto di origine turbolenta (Vortice/Eddy)

Energy Cascade



Moto Medio

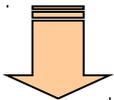


Destabilizzazione

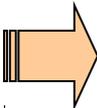


Vortici di Grandi Dimensioni

(sono i primi che si formano e traggono la propria energia dal moto medio)

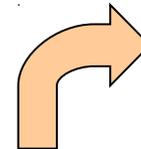


Destabilizzazione e frammentazione



Vortici di Dimensioni Inferiori

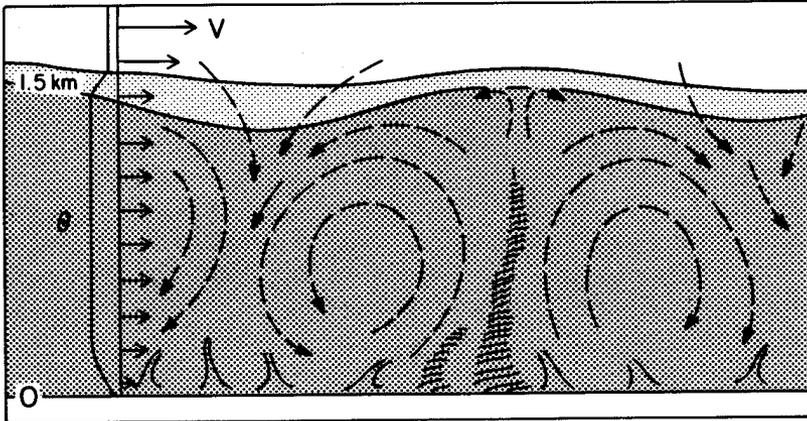
(la loro energia deriva dai vortici di dimensione immediatamente superiore)



Moto Medio

Il processo di destabilizzazione e di frammentazione continua producendo vortici sempre più piccoli finché tutta l'energia si dissipa in calore per l'azione della viscosità

Vortice (Eddy): porzione di PBL di dimensioni finite (L) in cui si localizza un disturbo del moto e/o un disturbo nelle proprietà chimiche e fisiche del fluido.



I vortici a maggiori dimensioni (es quelli convettivi) possono avere forme asimmetriche dovute all'azione del moto medio da cui hanno tratto la propria energia

Energy Cascade → **Produzione di una sequenza di vortici** $i = 1, \dots, N$ con dimensione L_i e velocità caratteristica V_i progressivamente inferiori.

Vortice i Vortice i+1

$$L_i > L_{i+1}$$

$$V_i > V_{i+1}$$

Più si procede nella frammentazione dei vortici, più i vortici secondari che si vengono a generare tendono ad essere isotropi.



Grandezza Caratteristica dei Vortici

Numero di Reynolds

$$Re_i = \frac{L_i V_i}{\nu}$$

ν È la viscosità cinematica dell'aria pari a $1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

Si vede immediatamente come per $i > j$, $Re_i < Re_j$.

Vortici di dimensioni maggiori →

Derivano direttamente dall'instabilità del moto medio.

Le loro caratteristiche principali sono:

- Dimensione caratteristica $L_0 \sim z_i$,
- velocità caratteristica $V_0 \sim \sigma_u$,
- tempo caratteristico $\tau_0 \sim L_0/V_0 \sim z_i/\sigma_u$



Frammentazione



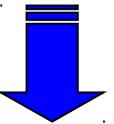
Vortice nato nella i-esima frammentazione → Presenta le caratteristiche

seguenti:

$$\begin{aligned} L_i &< L_{i-1} < \dots < L_0 \\ V_i &< V_{i-1} < \dots < V_0 \\ \tau_i &< \tau_{i-1} < \dots < \tau_0 \end{aligned}$$



Frammentazione



Vortici di dimensione minima →

Presenta le caratteristiche seguenti:

- Dimensione caratteristica $L = \eta$
- velocità caratteristica $V = V_\eta$
- tempo caratteristico $\tau = \tau_\eta$

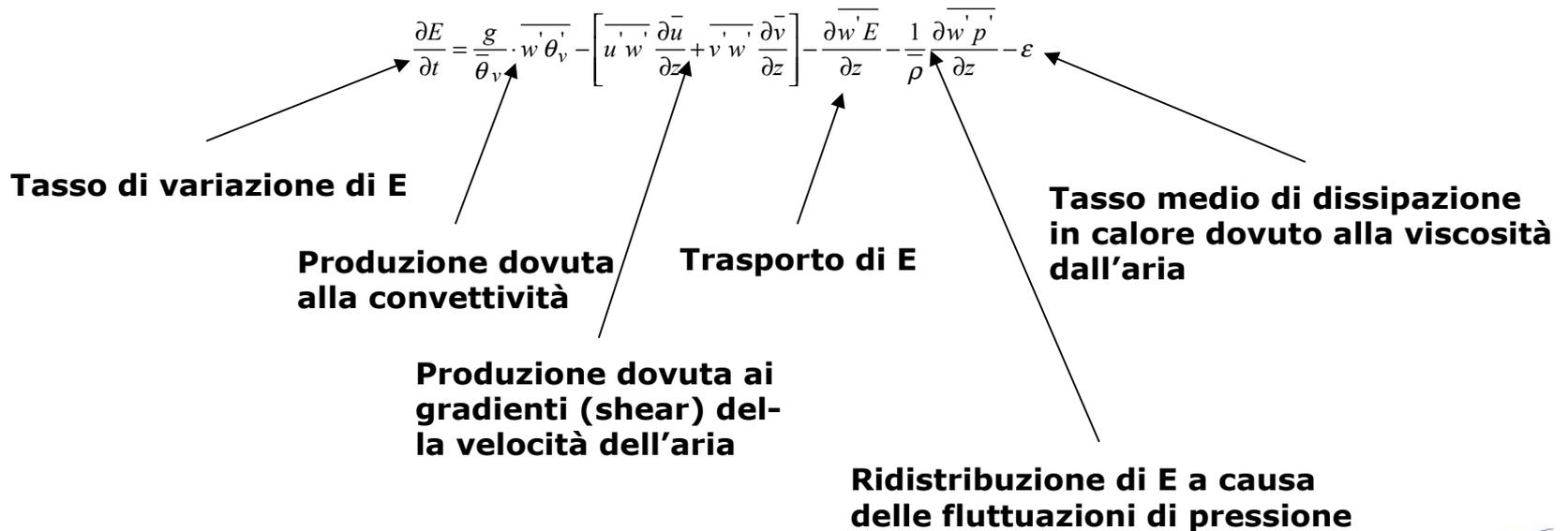


Dissipazione in calore a causa della viscosità dell'aria

Per comprendere meglio, è conveniente scrivere l'**equazione prognostica per l'Energia Cinetica Turbolenta** $E = \frac{1}{2} (\sigma_u^2 + \sigma_v^2 + \sigma_w^2)$.

Questa equazione descrive come l'Energia Cinetica Turbolenta, che è il motore che mantiene in vita la turbolenza del PBL, si produce, si trasporta, si ridistribuisce, si disperde e si dissipa.

Nella situazione semplificata in cui l'asse x è orientato nella direzione del vento medio essa è data dalla relazione seguente



Tuttavia, questa equazione nulla dice su **come l'energia cinetica turbolenta viene acquisita dai vortici di grandi dimensioni e viene trasferita ai vortici di dimensioni inferiori durante l'energy cascade.**

Ipotesi di Kolmogorov 1941

Sono due ipotesi che descrivono quantitativamente e semplicemente la struttura dei vortici in un fluido in moto turbolento.

Esse possono essere così sintetizzate:

- 1) L'intera struttura del moto turbolento del PBL è costituita dall'insieme di tutti i vortici turbolenti possibili, ciascuno caratterizzato da:**
 - una lunghezza di scala L_i**
 - una velocità di scala V_i**
 - un tempo di scala τ_i**

Se il vortice è sferico:

L_i → diametro esterno

V_i → velocità media tangenziale

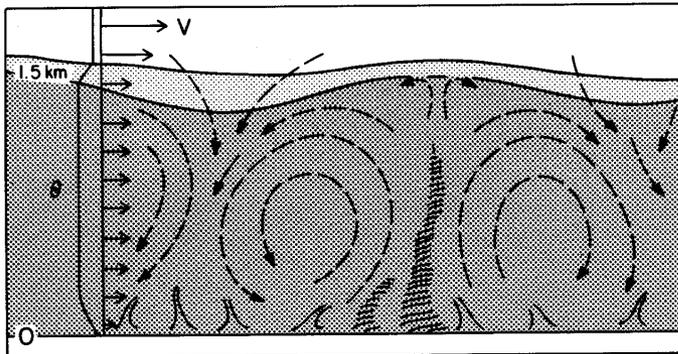
τ_i → tempo medio di vita del vortice

2) I vortici di dimensione maggiore:

- sono **asimmetrici** a causa della loro nascita diretta dall'instabilità del moto medio
- hanno una **dimensione caratteristica** L_0 dell'ordine di z_i (l'estensione verticale del PBL)
- hanno una **velocità caratteristica** V_0 che nelle condizioni stabili è dell'ordine di σ_u (deviazione standard della componente longitudinale del vento) ed in condizioni convettive della velocità convettiva di scala w_*

hanno tempi caratteristici $\tau_0 = L_0/V_0$

$$w_* = \left[\frac{g}{\theta} \overline{w'\theta'} z_i \right]^{1/3}$$



Esempio Situazione Convettiva

$$Z_i = 1000 \text{ m}$$

$$H_0 = 300 \text{ Wm}^{-2}$$

$$W_* = 2 \text{ ms}^{-1}$$

Quindi:

$$L_0 = 1000 \text{ m}$$

$$V_0 = 2 \text{ ms}^{-1}$$

$$\tau_0 = 500 \text{ s}$$

3) I vortici a grandi dimensioni possiedono una instabilità intrinseca che li porta a frammentarsi → Energy Cascade → i vortici così prodotti, più diminuiscono di dimensione più tendono ad essere localmente isotropi

4) Ogni processo di frammentazione comporta il trasferimento di energia cinetica turbolenta dai vortici a dimensione maggiore (i-esimi) a quelli a dimensione immediatamente inferiore (i+1 esimi).

Il tasso medio di trasferimento di energia cinetica da vortice a vortice è pari al **tasso medio di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta ε (già visto nell'equazione prognostica di E)**

Si può dimostrare che una buona stima di ε si ha applicando la relazione seguente:

$$\varepsilon = \frac{u_*^3}{kz}$$

Esempio

Consideriamo una quota $z = 10$ m. A questa quota il vento medio sia pari a $U = 2$ ms⁻¹ e la friction velocity $u_* = 0.3$ ms⁻¹.

Un questo caso, si ha che:

$$\varepsilon = 6.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2\text{s}^{-3}$$

La potenza trasferita per unità di massa risulta quindi pari a:

$$P\varepsilon = \frac{1}{2} \rho\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Wm}^{-3}$$

- 5) Da una certa dimensione caratteristica L_{is} (diciamo $1/6 L$) in poi, i vortici diventano a tutti gli effetti localmente isotropi e ciò è vero anche per tutti i vortici più piccoli che si generano dalle successive frammentazioni.
- 6) Quando a furia di frammentarsi i vortici raggiungono una dimensione caratteristica η (**microscala di Kolmogorov**) pari a:

$$\eta = \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}$$

inizia il processo di dissipazione viscosa di tutti questi vortici che trasformano la propria energia cinetica turbolenta in calore.

Questi vortici hanno una velocità di scala v_η ed un tempo di scala τ_η dati rispettivamente dalle relazioni seguenti:

$$v_\eta = (v\varepsilon)^{1/4} \qquad \tau_\eta = \left(\frac{v}{\eta} \right)^{1/2}$$

L'intervallo dimensionale dei vortici localmente isotropi è, quindi, pari a:

$$L_{is} \div \eta$$

e prende il nome di Inertial Subrange

Esempio

Situazione Convettiva caratterizzata da:

$$U_{10} = 2 \text{ ms}^{-1}$$

$$H_0 = 250 \text{ Wm}^{-2} \rightarrow \overline{w'\theta'} = 0.21 \text{ mK s}^{-1}$$

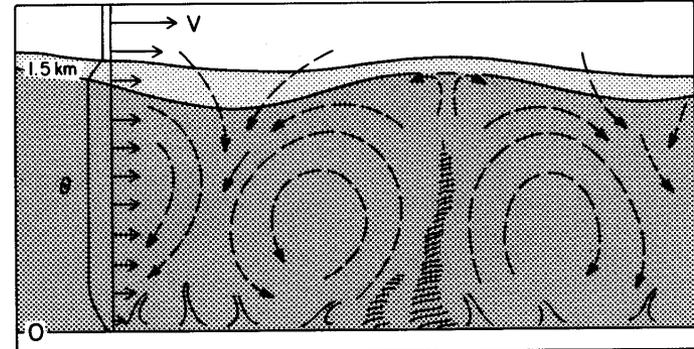
$$U_* = 0.17 \text{ ms}^{-1}$$

$$z_i = 1000 \text{ m}$$

$$\sigma_u = 0.8 \text{ ms}^{-1}$$

$$w_* = 2.6 \text{ ms}^{-1}$$

$$\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$



L'Inertial Subrange è pari a:

$$10^2 \text{ m} \div 10^{-4} \text{ m}$$

cioè è ampio 6 decadi!

Otteniamo quindi:

$$\varepsilon = 0.012 \text{ m}^2\text{s}^{-3}$$

$$L_0 = 1000 \text{ m}$$

$$V_0 = 2.6 \text{ ms}^{-1}$$

$$\tau_0 = 382 \text{ s} = 6.4'$$

$$L_{is} = 167 \text{ m}$$

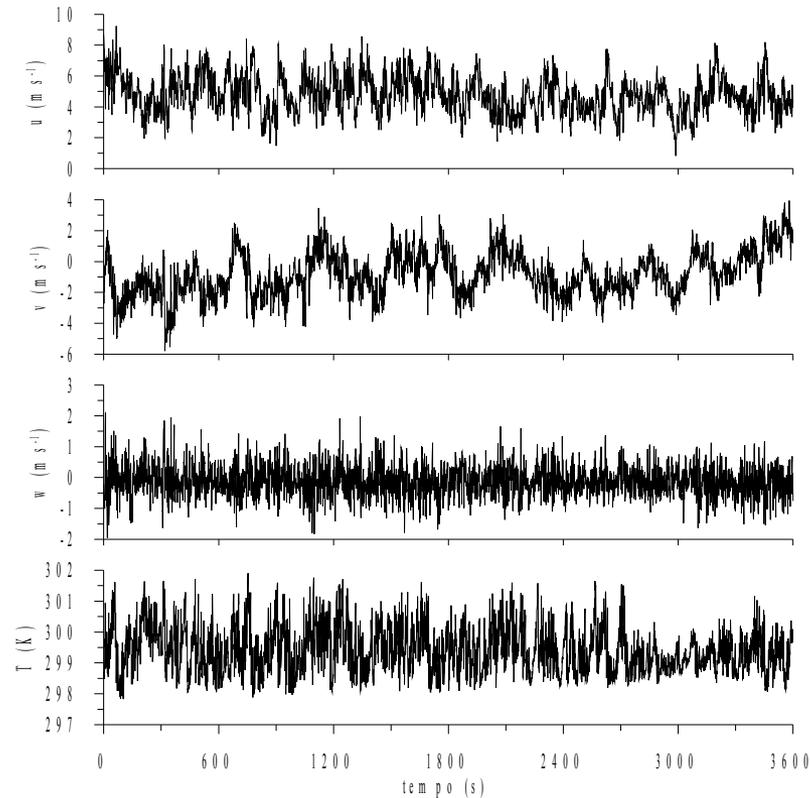
$$\eta = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$V_\eta = 20.6 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$$

$$\tau_\eta = 0.15 \text{ s}$$

Come posso vedere i vortici turbolenti?

- ⇒ La tecnologia attuale non ci consente di vederli nella loro completa tridimensionalità
- ⇒ Un'alternativa possibile è una loro visione *parziale* analizzando le serie storiche delle principali variabili meteorologiche caratteristiche del PBL.



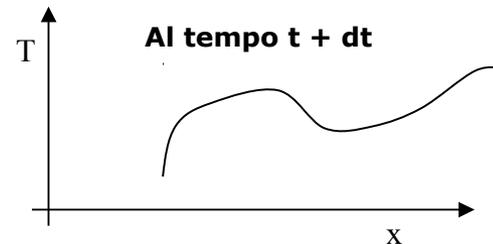
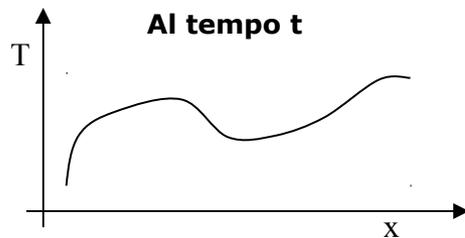
Analisi nel Dominio del tempo

Problema → I vortici sono strutture spaziali mentre le serie storiche si riferiscono ad un solo punto dello spazio.

Come posso individuare strutture spaziali con osservazioni puntuali?

Come posso passare dal tempo allo spazio?

Ipotesi di Taylor (1938) del congelamento della turbolenza



Se U è la velocità media del vento al punto x e se $\sigma_u/U < 0.5$, allora vale l'Ipotesi di Taylor secondo cui:

$$T_x(t+dt) = T_t(x-Udt)$$

Analisi nel tempo → Analisi nello spazio

I principali indicatori statistici della struttura turbolenta del PBL

- 1) La **funzione di correlazione normalizzata**. Essa può essere definita sia per un'unica variabile (per esempio la componente longitudinale del vento u) sia per due variabili (per esempio la componente verticale del vento e la temperatura potenziale) nel modo seguente:

$$R_{uu}(\tau) = \frac{\overline{u'(t+\tau) \cdot u'(t)}}{\sigma_u^2}$$
$$R_{w\theta}(\tau) = \frac{\overline{w'(t+\tau) \cdot \theta'(t)}}{\overline{w' \theta'}}$$

In sostanza questa funzione quantifica la **parentela** (appartenenza ad un vortice) che esiste tra la statistica al tempo t (punto x) e quella al tempo $t + dt$ (al punto $x-Udt$).

Se $R = 0 \Rightarrow$ i due punti dello spazio non sono correlati tra loro, cioè stanno su disturbi turbolenti differenti.

Tempo Euleriano di Scala T_u per la variabile u :

$$T_u = \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau) \cdot dt$$

Tempo dopo il quale la variabile u non risulta più correlata con sé stessa.

2) La funzione di Struttura. La sua definizione per una generica variabile u è la seguente:

$$D_{uu}(\tau) = \overline{[u(t+\tau) - u(t)]^2}$$

Questo indicatore statistico è più difficile da interpretare intuitivamente di quanto sia per la funzione di correlazione, ma ha un'importanza teorica ed applicativa notevole.

Quando la funzione di struttura ha un τ tale che:

$$L_{is} > U\tau > \eta$$

cioè sta entro l'Inertial Subrange, l'applicazione delle Ipotesi di Kolmogorov (1941) portano ad individuare per questo indicatore statistico un'espressione estremamente semplice:

$$D_{uu}(\tau) = C \cdot (U\tau \cdot \varepsilon)^{2/3}$$

che dipende solo dal tasso medio di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta.

Analisi nel Dominio delle frequenze

Punto di partenza → serie storica $x(t)$. Teoricamente essa sarebbe una funzione continua, ma nella pratica essa sarà un insieme ordinato di misure x_i realizzate agli istanti temporali discreti t_i ($t_{i+1} - t_i = \Delta t$).

Ipotesi → ogni segnale meteorologico $x(t)$ può essere visto come la somma di un **valor medio** e di un **segnale irregolare** che può essere visto come la **sovrapposizione** (somma) di infinite **armoniche** del tipo:

$$f(\omega) = A_\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Dato un segnale $x(t)$, l'importanza di un'armonica a frequenza angolare ω è proporzionale all'ampiezza A_ω dell'armonica in questione

Normalmente, l'analisi in frequenza (cioè l'individuazione del peso delle differenti armoniche nel segnale) viene fatta per generico segnale $u(t)$ a partire dalla funzione di autocorrelazione:

$$R_{uu}(\tau) = \overline{u'(t) \cdot u'(t+\tau)}$$

Valgono le seguenti relazioni:

$$\Phi_u(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\tau$$

$$R_{uu}(\omega) = \int_0^{\infty} \Phi_u(\omega) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\omega$$

La funzione $\Phi_u(\omega)$ è la densità spettrale (spettro) della variabile u .

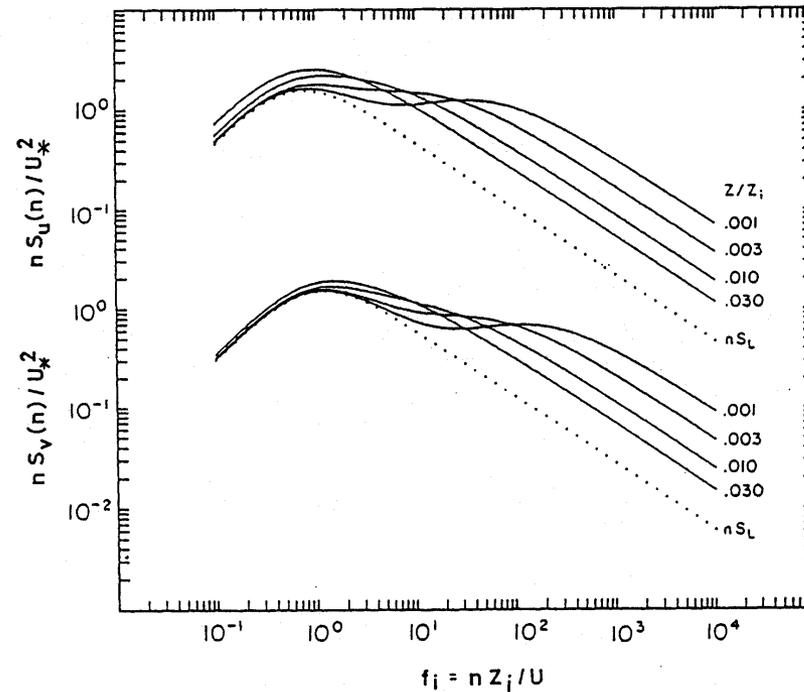
In pratica $\Phi_u(\omega)d\omega$ è l'energia portata (o la porzione di varianza spiegata) dal gruppo di armoniche aventi frequenza angolare compresa tra ω ed $\omega+d\omega$

Di fatto, il valore di $\Phi_u(\omega)$ indica l'importanza (e quindi la presenza) di un vortice di frequenza ω nel segnale.

Risultato di estrema importanza:

$$R_{uu}(0) = \sigma_u^2 = \int_0^{\infty} \Phi_u(\omega) \cdot d\omega$$

Esempio della densità spettrale delle componenti u e v del vento nel PBL



N.B. La frequenza n è legata alla frequenza angolare ω dalla relazione $n = 2\pi/\omega$ ed è espressa in Hz (s^{-1})

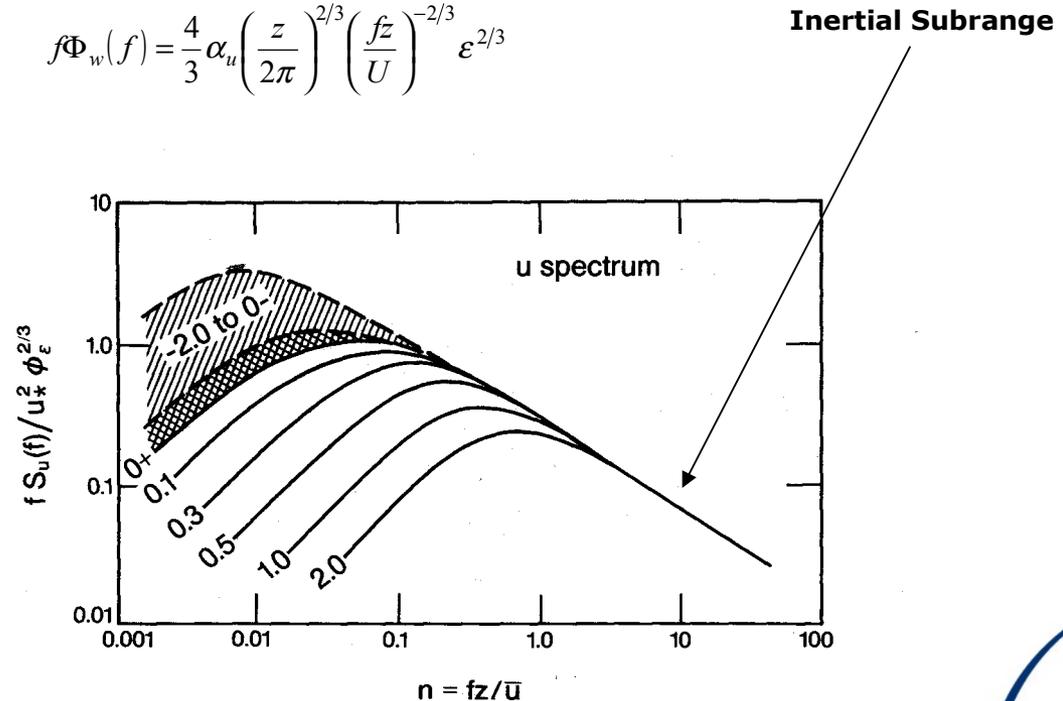
Entro il **Surface Layer** e nell'**Inertial Subrange** la densità spettrale delle tre componenti cartesiane del moto dipendono dal tasso medio di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta ε secondo le relazioni seguenti:

$$f\Phi_u(f) = \alpha_u \left(\frac{z}{2\pi} \right)^{2/3} \left(\frac{fz}{U} \right)^{-2/3} \varepsilon^{2/3}$$

$$f\Phi_v(f) = \frac{4}{3} \alpha_u \left(\frac{z}{2\pi} \right)^{2/3} \left(\frac{fz}{U} \right)^{-2/3} \varepsilon^{2/3}$$

$$f\Phi_w(f) = \frac{4}{3} \alpha_u \left(\frac{z}{2\pi} \right)^{2/3} \left(\frac{fz}{U} \right)^{-2/3} \varepsilon^{2/3}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

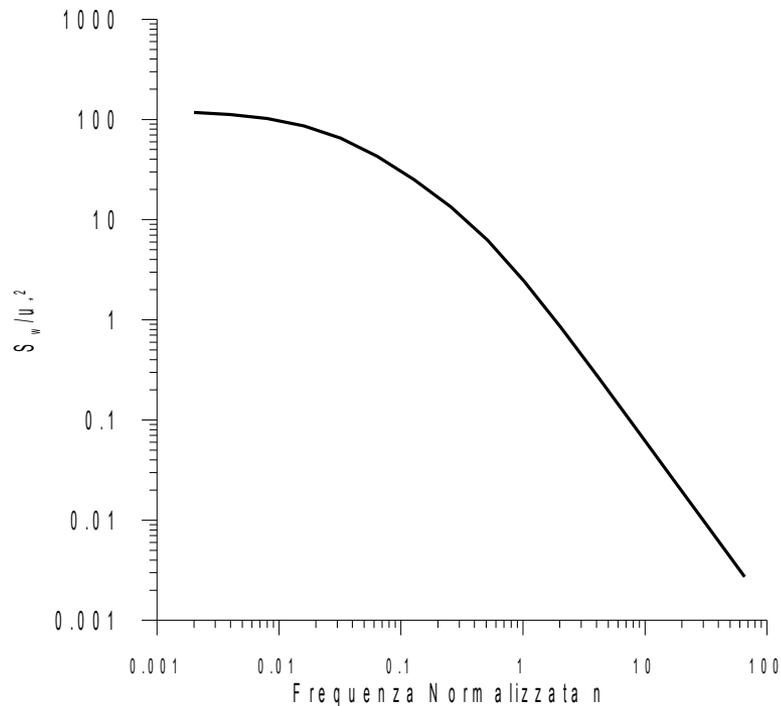


Come interpretare gli Spettri?

- ⇒ **Costruiamo lo spettro di una variabile (per es. $u(t)$)**
- ⇒ **Con l'ipotesi di Taylor possiamo ottenere la lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi U/\omega$**

Bassa frequenza → elevata lunghezza d'onda → vortice di grandi dimensioni

Spettro della componente u del vento



I vortici di grandi dimensioni pesano il massimo possibile e ciò evidenzia il loro ruolo di motori della turbolenza del PBL

Più aumenta la frequenza, più diminuiscono le dimensioni dei vortici e meno pesano.

La perturbazione indotta dai vortici di piccole dimensioni è una *perturbazione sottile* che produce quel *rumore* che vediamo in ogni segnale micrometeorologico.

Spettri di lungo periodo

Il concetto di spettro lo possiamo usare in molti modi diversi.

Per esempio possiamo prendere una serie storica della componente longitudinale del vento lunga 10 anni e campionata a 20 Hz. Avremmo a disposizione circa 10^{10} valori con cui costruire la densità spettrale.

In questo segnale troviamo:

⇒ **La turbolenza alle alte frequenze ($3 \cdot 10^{-4} \div 20$ Hz)**

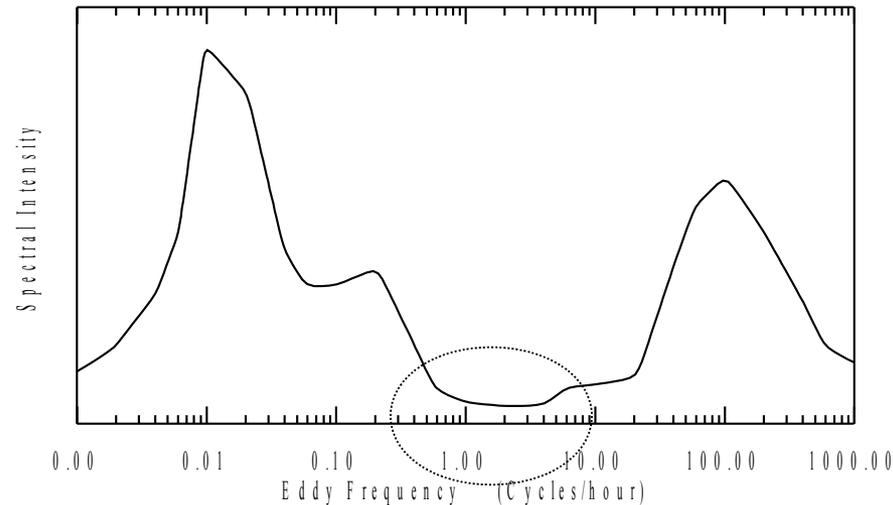
⇒ **Le componenti a mesoscala a ciclo diurno a frequenze medie ($\sim 10^{-5}$ Hz)**

⇒ **Le componenti a mesoscala a ciclo annuale a basse frequenze ($\sim 10^{-8}$ Hz)**

il tutto mischiato ed irriconoscibile.

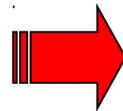
L'Analisi Spettrale separa i contributi alle differenti scale

Il risultato che otterrei è il seguente (Spettro di Van der Hoven 1957)



Spectral Gap

Zona di frequenze poco probabili. Questa zona è centrata attorno alla frequenza oraria



Se si utilizza un periodo di analisi e di campionamento non superiore a 60'

Filtriamo la maggior parte delle oscillazioni del segnale dovute ai moti a mesoscala

Evidenziando solo la turbolenza del PBL

Bibliografia Essenziale

R. Sozzi, T. Georgiadis, M. Valentini (2002): Introduzione alla turbolenza atmosferica (ed. Pitagora)

Approfondimenti:

R. Sozzi – Capitolo 5: le scale della turbolenza

R.B. Stull (1988): An Introduction to Boundary Layer Meteorology (ed. Kluwer)

S.B. Pope (2000): Turbulent Flows (ed. Cambridge University Press)

Monin A.S., A.M. Yaglom (2007): *Statistical fluid mechanics: mechanics of turbulence Vol. 1* (ed. Dover)

Monin A.S., A.M. Yaglom (2007): *Statistical fluid mechanics: mechanics of turbulence Vol. 2* – (ed. Dover)